

Jones の指数理論とその発展

大 教養 幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

von Neumann 環理論は 1930 年代に Murray, von Neumann により創造された。彼らはその研究の動機として作用素論、量子力学、表現論等をあげている。作用素環とは Hilbert 空間上の (有界線形) 作用素のつくる $*$ -algebra の事である。作用素環が 1 を含み strong operator topology に関して閉じている事は von Neumann 環と呼ばれる。(一方 norm topology に関して閉じている時は C^* 環と呼ばれる。) この分野の大きな特色は非可換且つ無限次元的な対象を扱っているという点にある。

Reduction 理論により (表現を既約表現の直積分で表わすように) von Neumann 環を factor の直積分の形に書ける。ここで factor とは center が $\mathbb{C}1$ となる von Neumann 環の事である。従って factor の研究が一番重要であると言える。Projection 全体の構造を見る事により、Murray-von Neumann はまず factor を次のように分類した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{type } I_n \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \\ \text{type } II_1 \end{array} \right. \quad (M_n(\mathbb{C}), B(H) \dots n=\infty \text{ の時})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{type II}_\infty \\ \text{type III} \end{array} \right.$$

type II_∞ -factor は type II_1 と $B(H)$ (Hilbert空間 H 上の作用素全体) の tensor 積となる。一方 type III factor は trace を持たないが Modular 理論を道具として Connes により更に type III_0 , III_λ ($0 < \lambda < 1$), III_1 と分類された。有限次元環の増大列の union の閉包となっている Approximately Finite Dimensional (= hyperfinite) factor の研究が理論上も又応用上も特に大切であるが、その完全分類が近年ようやく完成した。特に AFD II_1 -factor は unique であり、これを以後 R と表わす事にする。

さて index 理論とは factor M が subfactor N を含む時、 M と N の作用素環論的な“比”を調べるという事である。(dim M /dim N では ∞/∞ となり意味が全くない。) つまり N と同型の copy が M の中にいくつ入っているかを数えたい。ここでは Jones による II_1 -factor の index 理論 (1983) 及びその後の発展について説明する。その後、一般の factor 及び C^* 環に対する index 理論も登場したがそれらについては二つ目の講演及び穂谷氏の講演で説明されるのでふれない事にする。又 index 理論を通じて作用素環論と他分野 (Knot 理論 ・・・) との交流も活発になりつつあるが、ここでは作用素環論内部(?)での話題に話を限る事にする。

1. II_1 -factor に対する Jones の指数理論

$M \supseteq N \in \text{II}_1\text{-factor}$, $\text{II}_1\text{-subfactor}$ とする。 $\text{II}_1\text{-factor}$ の大玉の特長は unique normalized ($\tau(1)=1$) trace を持つという事である。 M の unique normalized trace $\tau = \tau_M$ で M に内積を入れた。

$$(x, y) \in M \times M \rightarrow \tau(y^*x) \in \mathbb{C}$$

これによる M の completion $\in L^2(M)$ (standard Hilbert space)

とある。 M は left multiplication として $L^2(M)$ に作用している。

(もっとも M が作用していた Hilbert 空間は忘れる事にある。)

M の commutant $M' = \{x \in B(L^2(M)) ; xy = yx \ \forall y \in M\}$ は

M の $L^2(M)$ への right mult. 全体となる。(以下 von Neumann 環

の commutant が時々登場するが、作用する空間を指定しない

限り commutant という概念は意味を持たない。) して恒等式

$\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ は $x \in M \rightarrow x^* \in M$ が $L^2(M)$ 上の (antilinear)

unitary involution に拡張される事を意味する。これを J と書く

事にある。 $*$ -operation (adjoint を取る事) が積の順序を逆

にする事より $JMJ = M'$ がわかる。 $N (\subseteq M)$ も $L^2(M)$ へ

(left mult として) 作用しているが、その commutant $N' (\supseteq$

$M')$ は一般論により type II_1 又は II_∞ factor となる。 type

II_∞ となる時は N が M の中で "非常に小さい" 時なので、こ

の時 Jones index $[M:N]$ は $+\infty$ と定義される。 一方 type II_1

の時には N' も unique normalized trace $\tau_{N'}$ を有する。定義より $L^2(M) = \overline{M}$ であるが closed subspace $\overline{N}$ を考える。 $L^2(M)$ から $\overline{N}$ への projection e_N は $e_N \in N'$ 及び $J e_N J = e_N$ を満たす。前者は $\overline{N}$ が N の作用で invariant だからで、後者は $\overline{N}$ が J で invariant であるからである。特に $\tau_{N'}(e_N)$ に意味がある。

Jones index $[M:N]$ は

$$[M:N] = 1/\tau_{N'}(e_N)$$

で定義される。この時 $[M:N]$ が index と呼ばれるにふさわしい諸性質を持つ事がすぐにわかる。 $\dim_{\mathbb{C}} M$ は $+\infty$ となり役に立たないが、Hilbert 空間 H (特に $H = L^2(M)$) への作用を考えて有限な量 $\dim_N H$ をうまく定めて index を定義した訳である。これは coupling constant の理論として知られている。

2. Basic Construction

Jones 理論の中で重要な basic construction と呼ばれる構成法について説明する。 $M \supseteq N$ が $L^2(M)$ に作用している時、 $N' \supseteq M'$ 及び $e_N \in N'$ であって、 N' が M' と e_N で (von Neumann 環として) 生成されている事はすぐにわかる。($N' = \langle M', e_N \rangle$) 従って $JN'J$ は $JM'J = M$ 及び $J e_N J = e_N$

で生成される。 $\mathcal{J}N\mathcal{J}$ を以後 M_1 と書き、 $M \supseteq N$ の basic extension と呼ぶ。 M_1 は $\mathcal{L}(M)$ 上に作用しており e_N を $\mathcal{J}$ で移す事により M_1 も unique normalized trace を持つ II_1 -factor である事がわかる。 ($[M:N] < +\infty$ の時) 従って $M \supseteq N$ より新しい pair $M_1 \supseteq M$ が作られた。(今度は M_1 をその standard Hilbert space $\mathcal{L}(M_1)$ に表現し直す事により) Jones index $[M_1:M]$ が定まる。この時、 $[M_1:M] = [M:N]$ と index が保存される事が重要である。従って basic extension を繰り返す事により (となり合う物同士の index が常に一定な) II_1 -factors の tower:

$$N \subseteq M \subseteq M_1 = \langle M, e_N \rangle \subseteq M_2 = \langle M_1, e_M \rangle = \langle M, e_N, e_M \rangle \\ \subseteq M_3 \subseteq M_4 \subseteq \dots$$

が得られる。一度 basic extension を行う毎に新しく projection が加わるので、 projection の列 $\{e_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ ($e_0 = e_N$, $e_1 = e_M$) が得られる。この projection の列は次の重要な関係式を満たす。

$$\begin{cases} e_i e_j = e_j e_i, & |i-j| \geq 2, \\ e_i e_{i+1} e_i = [M:N]^{-1} e_i. \end{cases}$$

これより次の Jones の基本定理の前半が出る。後半はこのように e_i の生成する環の構造を詳しく調べる事により得られる。(更にこの関係式が作用素環論と様々な他分野との接点を与えてくれる。)

Theorem Jones index $[M:N]$ の値は $\{4 \cos^2 \frac{\pi}{n}; n=3,4,\dots\}$
 $\cup [4, \infty]$ の中に入る。更にこの集合内の任意の値は (unique
 AFD II_1 -factor) R のある subfactor の index の値として実現さ
 れる。

3. Pimsner-Popa (1986) の仕事

Pimsner-Popa は 1986 年に発表された論文で $M \supseteq N$ より定
 義される relative entropy $H(M/N)$ (Connes-Størmer により以前
 に他目的の為に導入された。) と Jones index $[M:N]$ の関係
 を詳しく調べた。relative commutant $M \cap N'$ の様子を調べる
 事が直接の動機である。一般的結果は $H(M/N) \leq \ln [M:N]$
 であるが、彼らは等号成立条件、relative commutant との関係、
 様々な example についての計算等を行った。

1 の $e_N: M \rightarrow N$ は $M \in N \wedge$ 号し $E_N = e_N|_M: M \rightarrow N$ は
 normal conditional expectation となっている。 $[M:N] < +\infty$
 の時、 M の有限個の元 $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ で $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* e_N \lambda_i = 1$ を満
 たすものが取れる。簡単な恒等式 $e_N x e_N = E_N(x) e_N$, $x \in M$
 に注意すると、 $m \in M$ が

$$m = \sum_{i=1}^n E_N(m \lambda_i^*) \lambda_i$$

と書ける事がわかる。つまり $M \in N$ -module と見た時、 $\{\lambda_i\}$ が

basis となる。この basis の並び方はある種の一意性があり、これを Pimsner-Popa basis と呼ぶ。上の表示を利用して得られる

Pimsner-Popa 不等式

$$E_N(x) \geq [M:N]^{-1} x, \quad x \in M_+$$

を証明した。この不等式は $[M:N]$ の (解析的な) 特長付けにもなっており重要である。(III型 factor の指数理論でもくり返しくり返し使われる。) 始めに書いた relative entropy の不等式もこれより導かれる。

4. 問題

Jones の index 理論に因る問題を以下に述べる。

4.1 $[M:N] < +\infty$ の時、 M と N が II_1 -factor としてどの程度似ているか?

Pimsner-Popa basis が取れる事のみ想像が付きよるに非常に似ているはずである。実際 index 有限のもので II_1 -factor の様々な性質 (Property T 等々) が保存される事が知られている。この方面の結果は多く大切でもあるが、紙面の都合もあるのでここではふれない事にする。

4.2 ($[M:N] < 4$ の時は $M \cap N' = \mathbb{C}1$ となるが)

$M \cap N' = \mathbb{C}1$ と仮定した場合、4 以上の Jones index の値はど

の位あるか？

この集合が閉集合である事は知られているがどの位大きいのかについては未解決である。4に近い方の値としては $3+\sqrt{3}$ (Jones), $\frac{5+\sqrt{11}}{2}$ (≈ 4.56) (John Schou), 約 4.21 (Ocneanu) 等が知られている。Hecke 環 (他の物でもよい) の表現論を利用し、H. Wenzl は彼の学位論文の中で $3^2, 4^2, \dots$ 等に収束する index の値の列を作って見せた。

4.3 R の (finite-index) subfactor の (up to conjugacy での) 分類

始めに書いたように AFD factor の分類は完成したので次には subfactor の分類が問題となる。 R は一番小さい無限次元 factor である (Connes) ので $[R:N] < +\infty$ の時 N は factor としては R と同型である。従って R の subfactor の conjugacy class の分類に興味がある。つまり Galois 理論を作りたい。たとえば $[R:N]=2$ の時は、Goldman の定理により R は N の $\mathbb{Z}_2$ -outer action の crossed product (又は N は R の $\mathbb{Z}_2$ -outer action の fixed point subalgebra) として書ける。従って Connes の R の automorphism の研究により index 2 の subfactor は unique となる。明らかに Jones index は分類の為の (荒いが非常に重要な) 不変量を与えている。もっと詳しい不変量 (願わくば完全不変量) が求めたい訳であるが、この方面については Ocneanu 及び Popa 等が精力的に研究を進めている。次の 5

では最近の Ocneanu の理論について解説する。

5. Ocneanu の quantized group (paragroup)

有限群の量子化とでも言うべき Ocneanu の paragroup について説明する。これに基づいて彼は index 4 未満の R の subfactor の完全分類を完成させた。

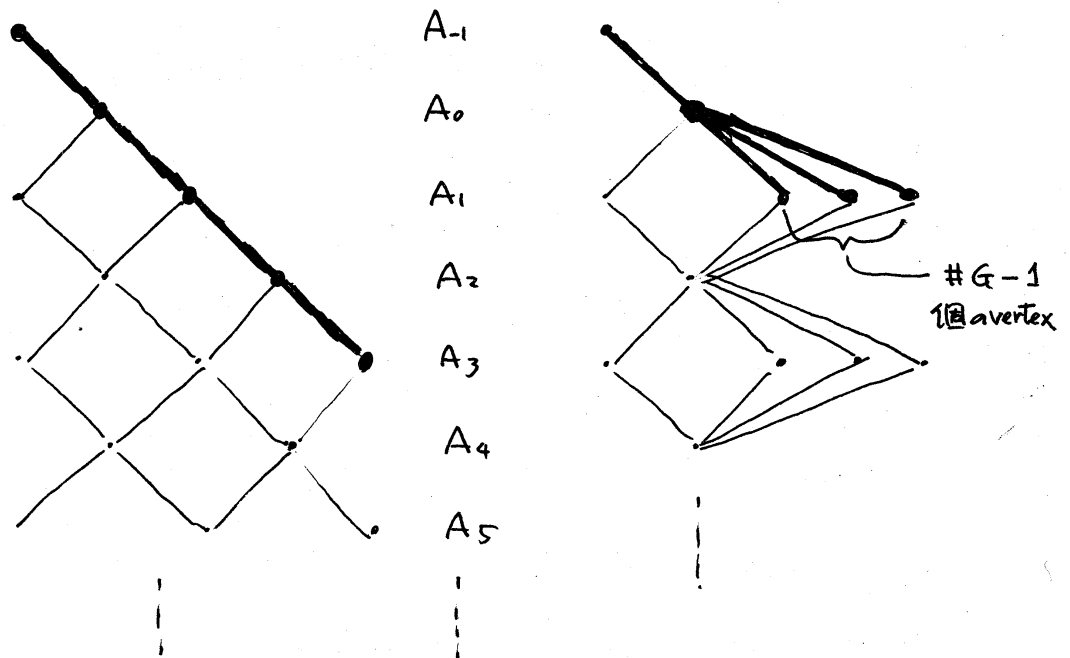
まず II_1 -factor の pair $M \supseteq N$ ($[M:N] < \infty$ 且 $M \cap N' = \mathbb{C}1$) より paragroup $\langle \mathcal{O}_{M:N}, \{\gamma_k\}_{k=0,1,2,\dots} \rangle$ と呼ばれる物がどのように表われて来るかを説明する。ここで $\mathcal{O}_{M:N}$ は principal graph と呼ばれるグラフであり、有限群の underlying set の量子化となっている。一方 $\{\gamma_k\}$ は (ある有限次元環の) anti-automorphism の列であり、群の積構造の量子化となっている。 $N \subseteq M$ から次の tower が得られる事は2で述べた。

$$N = M_{-1} \subseteq M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

ここで $[M_k : M_{-1}] = [M : N]^{k+1} < +\infty$ となるので $M_k \cap M_{-1}'$ が有限次元環 (つまり matrix 環の直和) となる事はあがわかる。

$A_k = M_k \cap M_{-1}'$ とおけば有限次元環の増大列 $\{A_k\}_{k=-1,0,\dots}$ が得られる。($A_{-1} = A_0 = \mathbb{C}1$) 従って $\{A_k\}$ は Bratteli diagram により完全に記述される。たとえば $M = R \rtimes S_3 \supseteq N = R \rtimes S_2$ 及び $M = R \rtimes \mathbb{Z}_3 \supseteq N = R$ の時は各々次の

diagram を得る。



2つの例が示す通り、一般にあるレベルの辺は必ず前のレベルの辺の繰り返しを含んでいる。あるレベルまでは前のレベルの辺の繰り返し以外の物も次々に加わるが、ある深さ以降では新しいものが付け加わらず、中の広がりも止まってしまう。このような時は depth が有限と定まる。上の例では各々 depth 4, 2 となっている。index 4 未満の時は有限な depth を持つが一般に depth は無限になりうる。太字で書いた部分（新たに加わるもの全体）を指定すれば繰り返しにより Bratteli diagram 全体が（つまり $\{A_k\}_k$ 全体が）定まる。太字の部分を principal graph $\mathcal{G}_{M=N}$ と呼ぶ。左の例の principal graph は Dynkin diagram A_5 であり、右の例で

$\#G = 3$ ($G = \mathbb{Z}_3$) の時は Dynkin diagram D_4 が表われている。Principal graph より index を読み取る事が出来る。(incidence matrix の最大固有値) これは paragroup の "位数" (群の要素の数) とみなす。

$2k+1$ 階の extension M_{2k+1} は本来 $L^2(M_{2k})$ に作用している M_{2k-1} より決まっている。しかし M_{2k+1} は $N \subseteq M_k$ の basic extension としてもつかまる。つまり $M_k \in L^2(M_k)$ に作用させて、ここから決まる J -operator を J_k と書く。 N の $L^2(M_k)$ の作用の commutant N' を使い $J_k N' J_k$ が出来る。 $N \subseteq M_k \subseteq M_{2k+1}$ 及び $N \subseteq M_k \subseteq J_k N' J_k$ が同視できる。(Pimsner-Popa) この事より $\gamma_k(x) = J_k x^* J_k$ ($x \in A_{2k+1} = M_{2k+1} \cap N'$) とおくと γ_k が A_{2k+1} の anti-automorphism を定めている。これらの family $\{\gamma_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ が paragroup の二番目の構成要素となっている。 γ_0 は群の operation $g \rightarrow g^{-1}$ に対応し $\gamma_0 \circ \gamma_0$ は comultiplication に対応する。depth 有限の時はある深さまでの γ_k を見れば十分でそれ以降の情報は以前のもののくり返しである。たとえば depth 2 の場合は丁度 (有限次元) Hopf algebra が得られる。前頁の右の例では各点に結ぶ辺が 1 本しかなく、この時は A_1 が可換環である事を意味する。これは commutative Hopf algebra が群環であるという事実に対応している。

もちろん上で構成した paragroup は $M \geq N$ の不変量である。
 又、paragroup は様々な性質を備える。これらの性質により
 paragroup 概念は公理化される。並に paragroup から出発して
 II_1 -factor, subfactor の pair が (path algebra の手法で) 構成さ
 れる。Pimsner-Popa basis を取る事は paragroup の subfactor
 への action を書き下した事に対応し、factor の元 x (3 で行っ
 たように) (subfactor の元を係数とした) 一次結合で書くとい
 う事が、factor を paragroup の subfactor への action に関与する
 “接合積” として表わすという事に対応する。

Ocneanu の仕事は index 4 未満の R の subfactor の分類が
 位数 4 未満の paragroup の分類に帰着する事を主張する。後者
 を実行し Ocneanu は次の完全分類を得た。

- (i) Dynkin diagram A_n ($n \geq 2$) ($\text{index} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{n+1}$) を有する subfactor
 が 1 つ存在する。
- (ii) Dynkin diagram D_{2n} ($n \geq 2$) ($\text{index} = 4 \cos^2 (\frac{\pi}{4n-2})$) を有
 する subfactor が 1 つ存在する。
- (iii) Dynkin diagram E_6 ($\text{index} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{12}$) を有する subfactor
 が丁度 2 つ存在する。
- (iv) Dynkin diagram E_8 ($\text{index} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{30}$) を有する subfactor
 が丁度 2 つ存在する。

(i), (ii) の場合には principal graph が決まると $\{ \theta_k \}$ の決め

言が unique となる。一方 (iii), (iv) の場合には $\{p_k\}$ の決め方が丁度 2通りある。)

以上のように index 4 未満の場合は R の subfactor が完全に分類された。depth 無限の場合が今後の重要な研究課題である。