

定係数の主部をもつ双曲型作用素に対する特異性の伝播

筑波大学 数学系 若林誠一郎

定係数の主部をもつ m 階の双曲型作用素 $P(x, D) = P_m(D) + Q(x, D)$ を考える。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D = -i(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$,

$$Q(x, D) = \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$$

である。次の仮定の下で $P(x, D)$ に対する Cauchy 問題が well-posed であることは、Dunn [2] によって証明された:

(A) 各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $P(x, \xi)$ は $\nu = (1, 0, \dots, 0)$ に関して双曲型多項式である。

ここでは、上の仮定の下で、解の波面集合についての定係数双曲型作用素に対する Atiyah-Bott-Gårding [1] の結果と同様の評価が得られることを示す。

1. まず、Cauchy 問題が well-posed であることを、[2] とは異なる方法で示す。

$$(1) \quad \begin{cases} P(x, D) u = f \in \mathcal{D}', \text{ supp } f \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}, \\ \text{supp } u \subset \{x_1 \geq 0\} \end{cases}$$

の解を逐次近似によって求めよう。すなわち

$$P_m(D) u_0 = f, \quad P_m(D) u_{l+1} = -Q(x, D) u_l, \quad l=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{supp } u_l \subset \text{supp } f + \Gamma(P_m, \nu)^*$$

とおけば、 $u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l$ が収束して(1)の解である。ここで、

$$\Gamma(P_m, \nu) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n; P_m(\xi) \neq 0 \} \text{ の } \nu \text{ を含む連結成分,}$$

$$\Gamma^* = \{ x \in \mathbb{R}^n; x \cdot \xi \geq 0 \text{ for } \forall \xi \in \Gamma \}$$

である。Dunn は Payser の方法によってこれを証明したが、

ここでは u_l の Fourier-Laplace 変換 $\hat{u}_l$ の評価によって証明する。

補題 1 (Svensson [4]). $P_m(\xi)$ が ν に関して双曲型多項式でかつ
 斉次多項式で、多項式 $p(\xi)$ が $(m-1)$ 次以下であるとする。

そのとき、次の 3 つは同値である：

(i) $P_m(\xi) + p(\xi)$ は ν に関して双曲型多項式である。

(ii) $p \prec P_m$

(iii) $C(>0)$ が存在して、

$$\xi \in \mathbb{R}^n, |I_m s| \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{p(\xi + s\nu)}{P_m(\xi + s\nu)} \right| \leq C |I_m s|^{-1}$$

ここで、 $p^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} p(\xi)$, $\tilde{p}(\xi) = (\sum_\alpha |p^{(\alpha)}(\xi)|^2)^{1/2}$ とお

けば、 $p \prec P_m$ は $C(>0)$ が存在して

$$\tilde{p}(\xi) \leq C \tilde{P}_m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

が成立することを意味する。

仮定(A) より

$$Q(x, \xi) = \sum g_j(x) p_j(\xi), \quad g_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad p_j \prec P_m, \\ \deg p_j < m$$

と表わすことができる。これと補題1より次を得る。

補題2. (A)を仮定する。さらに、 $q_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{E}'$, $\text{supp } f \subset \{x_1 \geq 0\}$ ならば

$$|\hat{u}_l(\xi - i\gamma\eta)| \leq C(f) C(P_m) e^{\gamma\eta^{-1} (C(P_m, Q, s)/\gamma)^l \langle \xi \rangle^s}, \\ l = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma \geq 1$$

が成立する。ここで、 $|\hat{f}(\xi)| \leq C(f) \langle \xi \rangle^s$, $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ である。

補題2と同じ仮定の下で、 u を

$$\hat{u}(\xi - i\gamma\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{u}_l(\xi - i\gamma\eta), \quad \gamma > C(P_m, Q, s)$$

によって定義すれば、 u は(1)の解である。

$$|\hat{u}(\xi - i\gamma\eta)| \leq C(f) C(P_m) e^{\gamma\eta^{-1} (1 - C(P_m, Q, s)/\gamma)^{-1} \langle \xi \rangle^s}, \\ \gamma > C(P_m, Q, s)$$

をみたす。特に $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が従う。 P^* も P と同じ仮定をみたすので、補題2と有限伝播性より、仮定(A)の下で Cauchy問題が well-posed であることが従う。また $\hat{u}_l$ を詳しく評価することによって、エネルギー不等式をしめすこともできる[5]。

2. $E(x, y)$ を $P(x, D)$ の基本解とする。すなわち

$$P(x, D_x) E(x, y) = \delta(x - y)$$

$$\text{supp } E(x, y) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; x - y \in \Gamma(P_m, \nu)^*\}$$

である。各 $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$P(x, t\xi^0 + \xi) = t^{r_{\xi^0}} P_{\xi^0}(x, \xi) + \sum_{j=1}^{\infty} t^{r_{\xi^0} - j} R_{\xi^0}^j(x, \xi),$$

$$R_{\xi^0}^j(x, \xi) \equiv 0 \quad \text{if } j > r_{\xi^0}$$

と表わす。ここで、 r_{ξ^0} は非負整数で x に依存しない。また、 $P_{\xi^0}(x, \xi)$ は ξ^0 における $P(x, \xi)$ の localization である。 $P(x, \xi)$ が仮定 (A) を満たせば、 $P_{\xi^0}(x, \xi)$ も (A) を満たす。

$$P_{\xi^0}(x, D_x) E_0(x, y; \xi^0) = \delta(x - y),$$

$$P_{\xi^0}(x, D_x) E_j(x, y; \xi^0) = -\sum_{k=1}^{\infty} R_{\xi^0}^k(x, D_x) E_{j-k}(x, y; \xi^0),$$

$$\text{supp } E_j \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^n; x - y \in \Gamma(P_{m_{\xi^0}}, \nu)^*\}$$

$$E_j(x, y; \xi^0) \equiv 0 \quad (j < 0)$$

によって $E_j(x, y; \xi^0)$ を定義すれば、次の定理を得る。

定理 3. 仮定 (A) の下で

$$t^N \left\{ t^{r_{\xi^0}} \exp[-i t(x-y) \cdot \xi^0] E(x, y) - \sum_{j=0}^N t^{-j} E_j(x, y; \xi^0) \right\} \\ \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}) \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

が成立する。さらに

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \{(x, y), (\xi^0, -\xi^0) \in T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus 0; (x, y) \in \text{supp } E_j(\cdot, \cdot; \xi^0)\} \\ \subset \text{WF}(E(x, y)), \quad \xi^0 \neq 0$$

が成立する。

3. (1) の解 u の波面集合を (外側から) 評価するには、基本解 $E(x, y)$ の波面集合の評価を導けばよく、[1] の手法と逐次近

似を用いて次の定理を得る。

定理4. 仮定(A)の下で、(1)の解 u に対して

$$WF(u) \subset C \circ WF(f)$$

が成立する。ここで

$$C = \{((x, \xi), (y, \eta)) \in T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n \setminus 0; \xi = \eta \text{ and } x - y \in \Gamma(P_{m\xi}, \vartheta)^*\}$$

である。

以下、定理4の略証を与える。一般性を失うことなく、 $Q(x, D)$ の係数 a_α は C^∞ に属すると仮定してよい。定理を証明するには、

$WF(E(x, y)) \subset \{((x, y), (\xi, \eta)) \in T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus 0; ((x, \xi), (y, -\eta)) \in C\}$ を証明すればよい。 $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^0 - y^0 \notin \Gamma(P_{m\xi^0}, \vartheta)^*$ とする。そのとき、 x^0 の近傍 U_1 と y^0 の近傍 U_2 , $\eta_0 \in \Gamma(P_{m\xi^0}, \vartheta)$ が存在して、

$$(x - y) \cdot \eta^0 < 0 \quad \text{for } \forall x \in U_1, y \in U_2$$

をみたす。そのとき、[1] Lemma 5.1より次を得る。

補題5. ξ^0 の凸開錐近傍 Γ , 正数 δ, τ_0 が存在して、

$$P_m(\xi - i(t|\xi|\delta + \vartheta)) \neq 0 \quad \text{when } 0 \leq t \leq \tau_0, \xi \in \Gamma, \\ |\xi - \eta^0| \leq \delta, \xi \in \mathbb{R}^n$$

をみたす。

この補題

を用いて、定理4の証明において重要な

次の補題がレめされる。

補題6. $p \prec P_m$, $\deg p < m$ とする。そのとき、

$$\left| \frac{p(\xi - i(t|\xi|\gamma^0 + \gamma v))}{P_m(\xi - i(t|\xi|\gamma^0 + \gamma v))} \right| \leq C(P_m, p)/\gamma$$

when $\xi \in \Gamma$, $0 \leq t \leq t_0$, $\gamma \geq 1$.

今、

$$P_m(D_x - i\gamma v) F_0(x, y; \gamma) = \delta(x - y),$$

$$P_m(D_x - i\gamma v) F_{l+1}(x, y; \gamma) = Q(x, D_x - i\gamma v) F_l(x, y; \gamma),$$

$$\text{supp } F_l(x, y; \gamma) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; x - y \in \Gamma(P_m, v)^*\},$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

によって $F_l(x, y; \gamma)$ を定義する。そのとき、 γ 十分大に對して

で

$$F(x, y; \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(x, y; \gamma)$$

が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ で存在し、

$$F(x, y; \gamma) = \exp[-\gamma(x_1 - y_1)] E(x, y)$$

である。 $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$ ($j=1, 2$) に對して、 $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$

とおく。そのとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F_l](\xi, \eta) &= \sum_{j_1, \dots, j_l, \pm} (-1)^l (2\pi)^{-(l+1)n} \\ &\times \int d\xi^0 \hat{\varphi}_1(\tfrac{1}{2}\xi - \xi^0) P_m(\tfrac{1}{2}\xi + \xi^0 - i\gamma v)^{-1} \\ &\times \left\{ \int d\xi^1 \hat{\varphi}_{j_1, l}^{\xi \pm}(\xi^1; |\xi|) \varphi_{j_1}(\tfrac{1}{2}\xi + \xi^0 - \xi^1 - i\gamma v) P_m(\tfrac{1}{2}\xi + \xi^0 - \xi^1 - i\gamma v)^{-1} \right. \\ &\times \{ \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int d\zeta^l \hat{\phi}_{j,l}^{\varepsilon\pm}(\zeta^l; |\xi|) p_{j,l}(\tfrac{1}{2}\xi + \zeta^0 - \zeta^1 - \dots - \zeta^l - i\sigma\zeta) \\
& \times p_m(\tfrac{1}{2}\xi + \zeta^0 - \zeta^1 - \dots - \zeta^l - i\sigma\zeta)^{-1} \hat{\phi}_2(\tfrac{1}{2}\xi + \eta + \zeta^0 - \zeta^1 - \dots - \zeta^l) \dots \}. \\
& \text{そこで, } \hat{\phi}_{j,l}^{\varepsilon+}(\zeta; s) = \chi_l^\varepsilon(\zeta; s) \hat{\phi}_j(\zeta), \quad \hat{\phi}_{j,l}^{\varepsilon-}(\zeta; s) = (1 - \chi_l^\varepsilon(\zeta; s)) \hat{\phi}_j(\zeta), \\
& \chi_l^\varepsilon(\zeta; s) = 1 \quad \text{if } |\zeta| < \varepsilon s/l, = 0 \quad \text{if } |\zeta| > \varepsilon s/l \\
& \text{である.}
\end{aligned}$$

$$I^+ = \sum_{j_1, \dots, j_l, +} (\quad)$$

$$I^- = \mathcal{F}(\alpha, \eta) [\varphi F_l](\xi, \eta) - I^+$$

とおけば, 補題1より

$$\begin{aligned}
|I^-| & \leq C(Q) C(P_m) \gamma^{-1} l^N (C(P_m, Q)/\gamma)^l |\varphi_1|_{n+1} |\varphi_2|_0 \\
& \quad \times |Q|_{N+n+1} \langle \xi \rangle^{-N}, \quad \gamma \geq 1
\end{aligned}$$

が従う。ここで、 $|Q|_k = \sup_j |\varphi_j|_k$, $|f|_k = \sup_{\substack{|\alpha| \leq k \\ x \in \mathbb{R}^n}} |D^\alpha f(x)|$
 で、 $C(Q)$ は Q に依りては、 $\text{supp } \varphi_j$ と $|Q|_{n+1}$ にのみ依存し、
 $C(P_m, Q)$ は $|Q|_0$ に依存する。次に、 I^+ を評価しよう。正数 ε
 と ξ^0 の錐近傍 Γ' を適当にとり、

$$\xi \in \Gamma' \text{ かつ } |\xi| < \varepsilon |\xi| \Rightarrow \pm \xi + \xi^0 \in \Gamma$$

となるようにできる。 $\Phi(\xi) \in C^\infty$ を、 $|\xi| \geq 1$ において0次の
 正斉次函数で、 $\Phi(\xi) = 1$ on nbd. of $\Gamma' \cap \{|\xi| \geq 1\}$, $\text{supp } \Phi$
 $\subset \Gamma \cap \{|\xi| > \frac{1}{2}\}$, $0 \leq \Phi(\xi) \leq 1$ をみたすようにえらぶ。

$$v_\pm(\xi) = \pm |\xi| \Phi(\xi) \eta^0$$

$$V_\pm = \{ \xi^0 \in \mathbb{C}^n; \xi^0 = \xi - i v_\pm(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n \}$$

とおけば, 補題6とStokesの定理より,

$$I^+ = \sum_{j_1, \dots, j_l} (-1)^l (2\pi)^{-(H+l)n} \int_{V_{t_0}} d\zeta^0 \int_{\mathbb{R}^n} d\zeta^1 \dots \int_{\mathbb{R}^n} d\zeta^l$$

を得る。補題 6 と [1] の方法によつて、

$$|I^+| \leq C(Q) C(P_m) \gamma^{-1} (C(P_m, Q)/\gamma)^l |\varphi_1|_{N+n+1} |\varphi_2|_{0 < \xi}^{-N},$$

$$N = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{if } \xi \in P' \text{ and } \gamma \geq 1$$

が示めされる。故に

$$|\mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F](\xi, \eta)| \leq C(P_m, Q, \gamma) (|\varphi|_{n+1} |Q|_{N+n+1} + |\varphi|_{N+n+1})$$

$$\times \langle \xi \rangle^{-N}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \text{ if } \xi \in P', \gamma > C(P_m, Q)$$

ここで、 $C(P_m, Q, \gamma)$ も Q に関して $|Q|_0$ のみ依存する。これは、

$$((x^0, y^0), (\xi^0, \eta)) \notin WF(E(x, y)) \text{ when } x^0 - y^0 \notin P(P_m, \xi^0, \eta)^*, \eta \in \mathbb{R}^n$$

を示す。また、 $((x^0, y^0), (\xi, \eta)) \in T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$, $\xi \neq -\eta$ のとき、

$$((x^0, y^0), (\xi, \eta)) \notin WF(E(x, y))$$

が容易に従う。よつて、定理 4 が示めされた。

定理 4 の証明より次のことは明らかであろう。

定理 7. 条件 (A) を仮定し、さらに、 $Q_\alpha \in C^L(\mathbb{R}^n)$ ([3] 参照) を仮定する。そのとき

$$WFL(u) \subset C \circ WFL(\dagger)$$

である。

References

- [1] Atiyah, M. F., Bott, R. and Garding, L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., 124 (1970), 109-189.
- [2] Dunn, J. L., A sufficient condition for hyperbolicity of partial differential operators with constant coefficient principal part, Trans. Amer. Math. Soc., 201 (1975), 315-327.
- [3] Hormander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 671-704.
- [4] Svensson, S. L., Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part, Ark. Mat., 8 (1969), 145-162.
- [5] Wakabayashi, S., Propagation of singularities for hyperbolic operators with constant coefficient principal part, to appear.