

Oscillatory mode をもつ系の Dynamic Scaling Law

(2月16日受理)

金沢大・理 M.C. 池 田 博

Dynamic scaling law の定式化 (または導出) にはいろいろな方法があるが¹⁾、その中で最も intuitive で単純なのは Kadanoff によって用いられた cell analysis²⁾の方法である。これは多体系を、相関距離 ξ よりはずっと小さいが microscopic には大きい cell に分割し、自由エネルギーの性質などを使って critical exponent 間の関係を求めるものである。Kadanoff の仕事は static な場合だが、これを dynamic case に拡張し、さらに時間についての分割 (すなわち、いわゆる粗視化) を行なえば dynamic scaling law が得られる³⁾。それによると、なぜ critical slowing down⁴⁾の exponent Δ が r からずれているかが判明する (r は磁化率の exponent, 古典論⁵⁾からはこの値が critical slowing down の exponent となる)。

ここでは cell analysis の dynamical な例として oscillatory mode をもつ系⁶⁾における exponent 間の関係を求めてみる。考察する系は mode 間の coupling が無い単純な系で、方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Omega^2 \frac{\delta H}{\delta \psi} + \eta \quad (1)$$

によって記述される。(これが有効である model については Ref. 6 を参照。) ここで ψ は order parameter であり、 H はハミルトニアン、 Ω はある定数、そして η は平均値ゼロのランダムな力を表わす。exponent 間の関係式は緩和時間についての“scaling analysis”からも求めることができ⁷⁾、その結果は、 Δ を緩和時間の exponent として、

$$\Delta = \omega + \frac{1}{2} r \quad (2)$$

である。ここで ω は scaling relation

$$\Omega \sim \varepsilon^\omega W(\varepsilon/\psi^{1/\beta}) \quad \varepsilon = (T - T_c)/T_c \quad (3)$$

に現われる exponent である。(β は order parameter の exponent 。) 次に示す cell analysis によれば ω が何に由来するかが直観的にわかる。そのためには、系を一辺 L の cell に分割し、また、時間 t もある長さ L^z に分ける。すなわち方程式 (1) に現われる変数に対しては次のような変換を施す。^{2), 3)}

$$\psi \rightarrow \psi' = L^{d-x} \psi, \quad t \rightarrow t' = L^{-z} t, \quad H \rightarrow H' = L^d H \quad (4)$$

(d は系の次元。) さらに Ω も変換されると想像できる。なぜなら、cell 分割による短波長のゆらぎのくりこみの効果が Ω のような定数に現われてくると十分考えられるからである。⁸⁾ よって、

$$\Omega \rightarrow \Omega' = L^{\omega/\nu} \Omega \quad (5)$$

として ω を定義しよう。(ν は相関距離 ξ の exponent) さて、式 (4), (5) によって方程式 (1) はダッシュの付いた変数(と定数)に変換され、cell を単位にして成立する運動方程式が得られるが、その新しい運動方程式が (1) と同じ形を持つことを要請する。³⁾ するとランダムな力 η は、

$$\eta \rightarrow \eta' = L^{2\omega/\nu+x} \eta \quad (6)$$

と変換されなければならない。また、

$$z = \omega/\nu + (2x-d)/2 = \omega/\nu + r/2\nu \quad (7)$$

である。ここで、 $x = (r/\nu - d)/2$ を用いた(この関係式は static な場合の自由エネルギーの考察により導出される⁹⁾)。 z と Δ の関係は、式 (4) やさらに温度、磁場に対する変換則より導かれた動的な磁化率 $\chi(k, \omega')$ の考察により $\Delta = z\nu$ とわかる¹⁰⁾ (簡単に言えば、 z は特性振動数¹⁾ $\omega^c \sim \xi^{-z}$ の exponent にあたり、 $\xi \sim \varepsilon^{-\nu}$ で ω^c

は緩和時間に反比例する量だからである)。したがって、式 (7) は式 (2) と同等である。 ω という exponent は減衰系におけるのと同様に³⁾ 式 (3) より Ω (または η) の scale 変換に対する性質から出てくる。

このように非常に intuitive で仮定の多い議論 (例えば、式 (4) のように変換が L の巾で行なわれること) から、scaling analysis による exponent 関係式 (2) と同じものが導出できる。

参 考 文 献

- 1) R. A. Ferrell, N. Menyhárd, H. Schmidt, F. Schwabl, and P. Szépfalusy, *Ann. Phys.* **47** (1968) 565.
B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **177** (1969) 952.
L. P. Kadanoff, *Physics* **2** (1966) 263.
- 2) L. P. Kadanoff et al., *Rev. Mod. Phys.* **39** (1967) 395.
- 3) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **51** (1974) 1257.
- 4) H. Yahata and M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Japan* **27** (1969) 1421.
M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **43** (1970) 882.
- 5) L. Van Hove, *Phys. Rev.* **93** (1954) 1374.
- 6) Z. Ràcz and P. Ruján, *Amer. J. Phys.* **43** (1975) 105.
- 7) M. E. Fisher and Z. Ràcz, preprint.
- 8) Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys.* **51** (1974) 1712.
- 9) H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, (Oxford, England 1971)
- 10) M. Suzuki and G. Igarashi, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 1070.