

Surgeries and simple loops on a solid torus of genus g

筑波大数学系 金戸 武司

1. 序

この報告は, S^3 の Heegaard diagrams による基本群の表示に関する筆者の一連の仕事 [5], [6], [7], [8] の最初の動機となった問題「 S^3 の genus 2 Heegaard diagrams による基本群の表示は, cyclic reduction と substitution によって, 自明なもの $\langle a_1, a_2 : a_1, a_2 \rangle$ に変形できるか?」の肯定的解決を与える。その証明は, surgery の手法と“fake Heegaard diagram の概念”に基づく。この idea の応用として, 与えられた Heegaard diagram (of genus g for a 3-manifold) を pseudo-minimal なものに変形する algorithm の存在定理 ([15], [3]) の簡単な別証を与える。

idea の本質が明らかになるよう, 以下では, 実際に

得られた順序とは逆の順序で述べることにする。

2. 結果

T を genus g の solid torus (i.e. 3-ball with g 1-handles), ∂T をその境界とする。 $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_g\}$ を oriented meridian disks of T の complete system (i.e. T を $\mathcal{M}$ で切り開くと 3-ball, 又 "system" は mutually disjoint set の意.) とする。 ∂T 上の simple loop l が normal to $\mathcal{M}$ とは, 交わり $l \cap \mathcal{M} (= l \cap (m_1 \cup \dots \cup m_g))$ は transversal で, ∂T の isotopy で除けるものを含まないことをいう。各 $m_i \in \mathcal{M}$ ($i=1, \dots, g$) に文字 a_i によるラベルを付け, l に沿って交点 $l \cap \mathcal{M}$ を読みとることによって得られる cyclic word を $W(l, \mathcal{M})$ で表わす。 cyclic permutation と inversion の違いを無視すれば, $W(l, \mathcal{M})$ は一意的である。以後, cyclic word W_1, W_2 がこれらの違いを無視して等しいとき, $W_1 \equiv W_2$ と表わすことにする。 cyclic word が cyclic に cancell する部分 $a_i a_i^{-1}$ or $a_i^{-1} a_i$ (or $a_i \dots a_i^{-1}, a_i^{-1} \dots a_i$) を含むとき, これを除く操作を cyclic reduction

という。もはや, *cyclic reduction* が適用できないとき, *cyclically reduced* という。

定理 1. (*Geometric reduction*)

simple loop l は *normal to* $\mathcal{M}$ とする。

$W(l, \mathcal{M})$ が *not cyclically reduced* ならば, *oriented proper disks of* T の system $\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_k\}$ ($k \geq g$) で 次の性質 (*) をもつものを見つける algorithm が存在する:

(*) 0) l は *normal to* $\hat{\mathcal{M}}$,

1) どの $\hat{m}_i$ ($i=1, \dots, k$) も文字 $a_1, \dots, a_g$ のいずれか一つによりラベルがつけられている,

2) $\hat{\mathcal{M}}$ はその *sub-system* として *meridian disks of* T の *complete system* $\mathcal{M}_0 = \{\hat{m}_{i_1}, \dots, \hat{m}_{i_g}\}$ で, 各 $\hat{m}_{i_j}$ が文字 a_j ($j=1, \dots, g$) をラベルにもつものを含む,

3) $W(l, \hat{\mathcal{M}}) \equiv \tilde{W}(l, \mathcal{M})$, ニニド, $\sim$ は *cyclically reduced form* の意.

注. 2-disk $m (\subset T)$ が proper とは $m \cap \partial T = \partial m$ の意. $T-m$ が connected ならば, meridian disk である.

Zieschang [15] は, Whitehead [14] の結果を用いて, 次の定理を示した. これは与えられた Heegaard diagram を pseudominimal (cf. [3]) なものに変形する algorithm の存在定理を含む. 定理 1 により, 自然でより簡単な別証をうる.

系 1. (Whitehead-Zieschang)

∂T 上の simple loops の任意の system $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ に対し, meridian disks of T の complete system M で L との総交点数が最小となるものを見つける algorithm が存在する.

以下, S^3 の genus 2 Heegaard diagrams による基本群の表示について考察する.

定義. (substitution) 群表示 $\langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ において, 一方の relator が他方の relator に sub-

word として (cyclically に) 含まれるとき, その sub-word を除くことにより, relators の長さがより短かい表示 $\langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$ が得られる。この変形を substitution といい, 「 $\searrow$ 」と書く。即ち,

$$\{r_1, r_2\} \equiv \{r_1 r_2', r_2'\} \text{ のとき, } \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle \searrow \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle.$$

定理 2. D を任意の S^3 の genus 2 Heegaard diagram, $\pi(D) = \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ を D に関する基本群の表示とする。今, cyclically reduced form $\tilde{\pi}(D) = \langle a_1, a_2; \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \rangle$ が non trivial (i.e. $\neq \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$) ならば, substitution $\tilde{\pi}(D) \searrow \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$ でその cyclically reduced form $\langle a_1, a_2; \tilde{r}_1', \tilde{r}_2' \rangle$ が再びある S^3 の genus 2 Heegaard diagram D' に関する cyclically reduced な表示 $\tilde{\pi}(D')$ になっているものが存在する。

この系として, 序で述べた問題 (cf. [5], [7]) の肯定的解決をうる。

系 2. S^3 の任意の genus 2 Heegaard diagram

による基本群の表示は *cyclic reduction* と *substitution* により *trivial* な表示 $\langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ に変形できる。

注. Thurston 達によって, *genus 2 Poincaré conjecture* が肯定的に解決されたので, 上の系は次のような決定問題の純代数的な解決を含む:

- i) 与えられた 3-manifold with genus 2 Heegaard splitting の基本群が *trivial* かなかの判定,
- ii) 同じく上の 3-manifold が S^3 と同相かなかの判定,
- iii) 与えられた 3-bridge 表現をもつ knot が *trivial* かなかの判定.

3. 証明

1) 定理 1 の証明

α を l の sub-arc で $W(l, \mathcal{M})$ の一つの *cyclically cancellable part* $a_i a_i^{-1}$ 或 $a_i^{-1} a_i$ に対応するものとする。 m_i を α に沿って surgery すると, 二本の oriented simple loops で,

それぞれ T の proper disks m_i' , m_i'' を bound するものが得られる。 $\mathcal{M}$ において, m_i に代えて, m_i' と m_i'' を加えて, 新しい system $\hat{\mathcal{M}}_1$ をうる。 m_i' と m_i'' に同じ文字 a_i をラベルに付けると, $\mathcal{M}_1$ は条件 1), 2) を満たす。もし, $W(\mathcal{L}, \mathcal{M}_1)$ が not cyclically reduced ならば, 同様の手法で新しい system $\hat{\mathcal{M}}_2$ をうる。この場合, surgery によって二枚の proper disks m_i' , m_i'' が一枚の proper disk $m_i''' (= m_i' \# m_i'', \# : \text{band sum along } \alpha)$ になることもあり得るが, $\mathcal{M}_2$ も又, 1), 2) を満たす。(2) について, surgery によって生ずる simple loops) は一つ手前の complete system $\mathcal{M}_0$ で T を切り開いて考えると, 3-ball の境界上にあるから, T での proper disk(s) を bound する。又, $\partial \mathcal{M}_2$ の各 simple loops を $H_1(\partial T)$ の元とみたとき, surgery は homology class を変えないから, 同じ文字 a_i ($i=1, \dots, g$) をラベルにもつ loops の総和は ∂m_i と同じ homology class $[\partial m_i]$ を表わし, $\{[\partial m_1], \dots, [\partial m_g]\}$ は $H_1(\partial T)$ で一次独立だから, $\mathbb{Z}$ -加群の基

底変換の議論により, ∂M_2 の sub-system ∂M_0 で各文字を一度ずつラベルにもつ g 個の loops からなり, それらが $H_1(\partial T)$ で一次独立となるものが存在する。よって, M_0 が求める T の meridian disks の complete system である。) 以下, この process を (P回) 繰り返し, $W(l, M_p)$ が cyclically reduced になるまで行えば, M_p が求める $\hat{M}$ である。

2) 系1の証明

Whitehead algorithm [14] (cf [3], [15]) により, oriented meridian disks of T の complete system M' で,

(a) L は normal to M' ,

(b) cyclically reduced words $\tilde{W}(l_1, M')$

, ..., $\tilde{W}(l_n, M')$ の長さの総和が最小

, または, 任意の complete system M'' に対し,

$$\sum_{i=1}^n L(\tilde{W}(l_i, M')) \leq \sum_{i=1}^n L(\tilde{W}(l_i, M'')),$$

を満すものを見つけ出せる。定理1を l_i と M' に適用

して, oriented proper disks of T の system $\hat{M}_1$

で, 1), 2) 及び $\tilde{W}(l_i, M') \equiv W(l_i, \hat{M}_1)$ が

$W(l_i, m') = W(l_i, \hat{m}_1)$ ($i=2, \dots, n$) を満たすものをうる。ここで、定理 1 は m を $\hat{m}_1$ に代えても成り立つ (実際、 $H_1(\partial T)$ の元として、同じ文字 a_i ($i=1, \dots, g$) の ∂m の loops の総和が 1 次独立であれば良い。) ことに注意すれば、 l_2 と $\hat{m}_1$ に対しても同様に適用でき、system $\hat{m}_2$ で、1), 2) 及び $\hat{W}(l_i, m') \equiv W(l_i, \hat{m}_2)$, $\hat{W}(l_2, m') \equiv W(l_2, \hat{m}_2)$ から $W(l_i, m') = W(l_i, \hat{m}_2)$ ($i=3, \dots, n$) を満たすものをうる。以下、同様にこの process を合計 n 回繰り返して、system $\hat{m}_n$ で、1), 2) 及び $\hat{W}(l_i, m') \equiv W(l_i, \hat{m}_n)$ ($i=1, \dots, n$) を満たすものをうる。ここで、性質 2) による $\hat{m}_n$ の complete subsystem を m_0 とすると、

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n L(\hat{W}(l_i, m')) & (= \sum_{i=1}^n L(W(l_i, \hat{m}_n))) \\
 & \geq \sum_{i=1}^n L(W(l_i, m_0))
 \end{aligned}$$

が成り立つが、 m' は性質 (c) を満たすことから、 $\hat{W}(l_i, m') (= W(l_i, \hat{m}_n)) = W(l_i, m_0)$ でなければならぬ。すなわち、この m_0 が求める m である。

3) 定理2の証明

[1]. 準備的補題及び命題

cyclically reduced な表示 $\tilde{\pi}(D) = \langle a_1, a_2; \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2 \rangle$ を幾何的に実現するため, "fake Heegaard diagram" の概念を次のように定義する:

定義. $\mathbb{C}$ を ∂T (of genus 2) 上の simple loops の complete system, $\mathbb{Q}$ を 2 つの文字 a_1, a_2 のいずれかをそれぞれラベルにもつ ∂T 上の oriented simple loops の system (必ずしも complete ではない.) とする. このとき, $(\partial T; \mathbb{Q}, \mathbb{C})$ を (oriented) fake Heegaard diagram (略して, F-diagram) といい, $F = (\partial T; \mathbb{Q}, \mathbb{C})$ (略して, F または $(\partial T; \mathbb{Q}, \mathbb{C})$) と書く。

以下, F-diagram F として normal なもののみを考えることにする. F に対して, Heegaard diagram の場合と同様にして, 群表示 $\pi(F) = \langle a_1, a_2; \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ をうる. その cyclically reduced form を同じく, $\tilde{\pi}(F) (= \langle a_1, a_2; \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2 \rangle)$ と書くことにする。

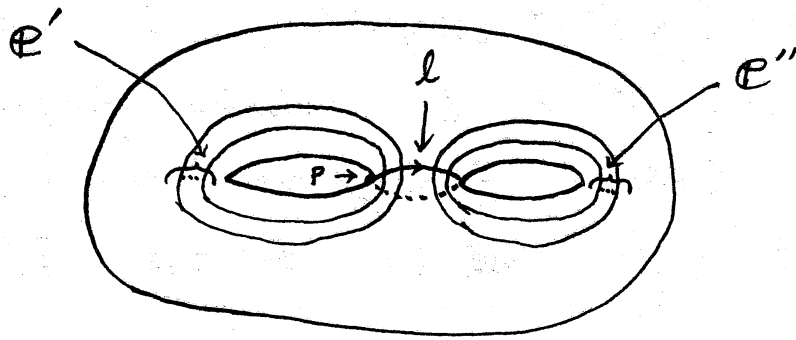
補題. F-diagram $F = (\partial T; \mathbb{Q}, \mathbb{C})$ は次 (*) を満たすものとする:

(*) (1) $\pi(F) = \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ は *not cyclically reduced*,

(2) $\pi(F)$ のアーベル化群は 0,

(3) $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ ($\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = \emptyset$) は次を満たす:

a) $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ はそれぞれ *parallel な simple loops* からなり, 下図のようである.



∂T

Fig. 1

b) P を基点とする ∂T 上の *oriented simple loop* l を上図のようにとるとき,

$$W(l, \mathcal{C}) = W_1 W_2 \quad (=: \text{, } W_1 = W(l, \mathcal{C}'), W_2 = W(l, \mathcal{C}'')) \text{ は,}$$

- i) $W_1 = A, W_2 = AB, \text{ 即ち } A, B \text{ は words,}$
- ii) AB, A, B はそれぞれ *cyclically reduced*,

を満たす。

このとき, $\mathbb{C}$ のある loop C の sub-arc α_i ($i=1, \dots, k$, $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \dots \subset \alpha_k$) で次を満たすものが存在する:

α_i に沿った surgeries $S(\alpha_i): \mathbb{C} \xrightarrow{S(\alpha_1)} \mathbb{C}_1 \xrightarrow{S(\alpha_2)} \dots \xrightarrow{S(\alpha_k)} \mathbb{C}_k$ において, $\mathbb{C}_k$ は次を満たす: ある

向きを保つ homeomorphism $f: \partial T \rightarrow \partial T$ に対し,

(A) $f\mathbb{C}_k = \mathbb{C}'_k \cup \mathbb{C}''_k$ ($\mathbb{C}'_k \cap \mathbb{C}''_k = \emptyset$) は

前条件 (3) の a) を満たす,

(B) $W(l, f\mathbb{C}_k) = W_1 W_2$ ($=1$, $W_1 = W(l, \mathbb{C}'_k)$, $W_2 = W(l, \mathbb{C}''_k)$) は,

Type I: $W_1 = A$ か $W_2 = B$,

又は,

Type II: (i) $W_1 = A$ か $W_2 = A(AB)$,

又は, (ii) $W_1 = B^{-1}A^{-1}$ か $W_2 = (B^{-1}A^{-1})A^{-1}$,

を満たす。

証明. ∂T を standard longitudes l_1, l_2 (cf. 下図) に沿って切り開くと, 下図のように 4-punctured 2-sphere をうる。

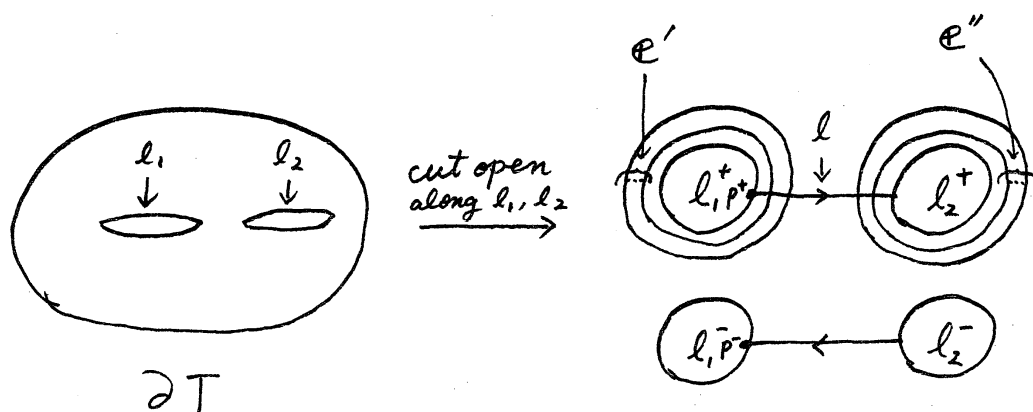


Fig. 2

条件 (I) より, r_1 と r_2 は *cyclically reduced part* をもつ。以下, これに対する $\mathbb{C}$ の *loop* の *sub-arc* の在り方を多掛りに場合に分けて考える。

(I) Fig. 2 にあつて, $\mathbb{C}$ のある *loop* C の *sub-arc* α で, l_1^- と l_2^+ を結ぶものが存在する場合。
 α を C に沿つて l_1^+ の方に延長して, *sub-arc* $\tilde{\alpha}$ (cf. 下図) で, $W(\tilde{\alpha}, \mathbb{C}) \equiv A^{-1}AB$ とできる。

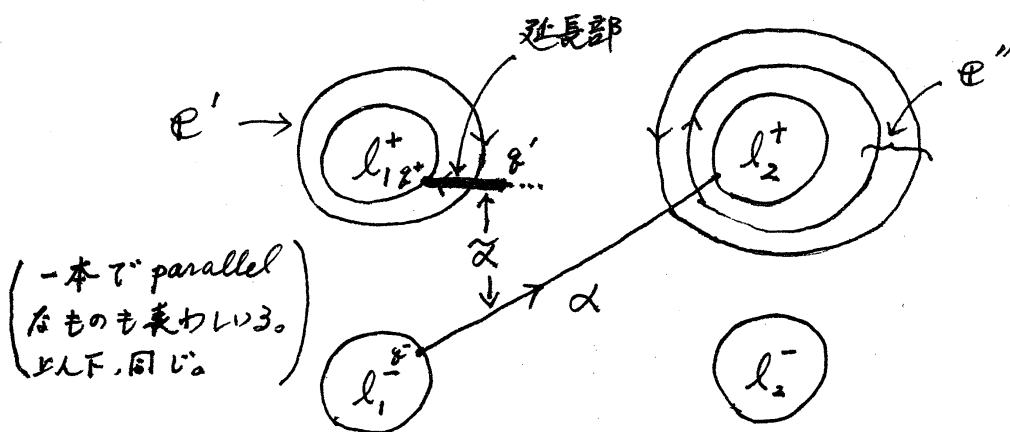
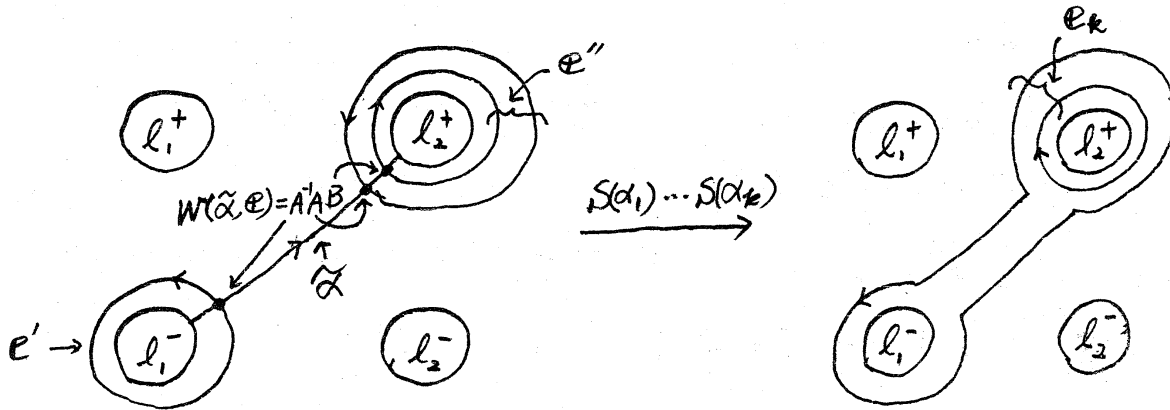


Fig. 3

この $A^{-1}A$ の cancells を $\tilde{\alpha}$ の sub-arcs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ に沿った *surgeries* で実現すれば, (A), (B) Type I を満たすことは容易にわかる。(cf. F図)



isotopic to Fig. 3

Fig. 3'

Fig. 4

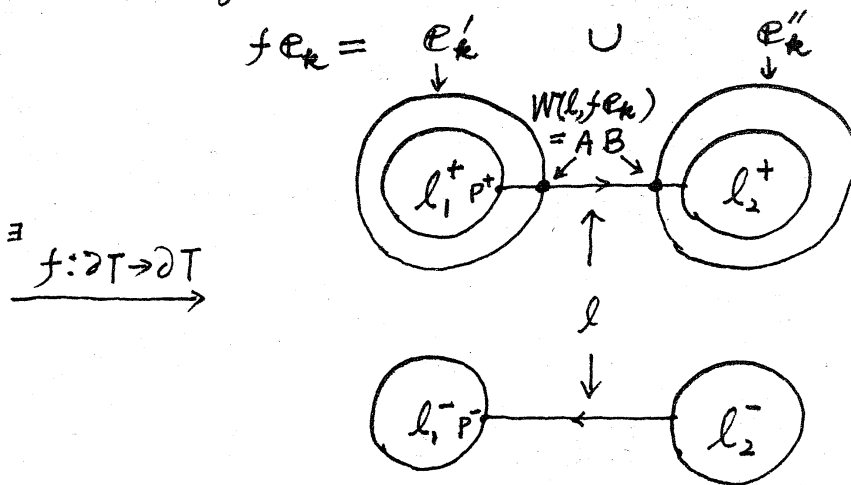


Fig. 4'

(II) (I) ような l_1^- と l_2^+ を結ぶ $\mathbb{C}$ の sub-arc が存在しない場合. genus 2 Heegaard diagram (この場合は, $(\partial T; \{l_1, l_2\}, \mathbb{C})$) の 2-symmetry 性 (cf. [2], [12]) より, l_1^+ と l_2^- を結ぶ $\mathbb{C}$ の sub-arc も存在しない. 4-punctured 2-sphere 上の graph の分類結果 (cf. [4], [12]) より, l_1, l_2 を fixed する ∂T 上の向きを保つ homeomorphism の違いを無視すれば, F は下図のタイプになる.

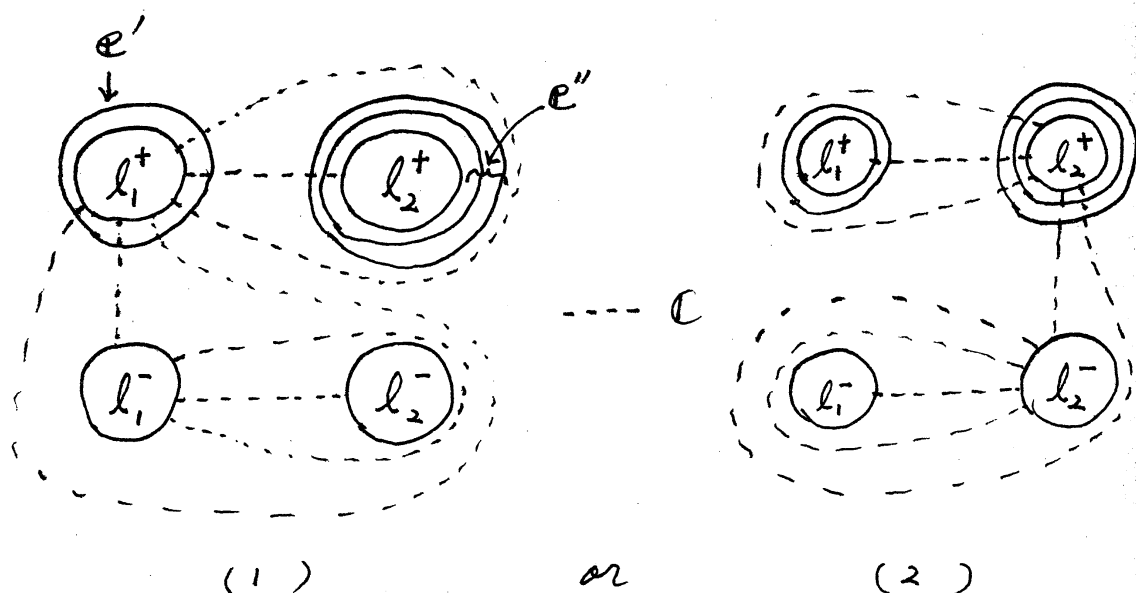
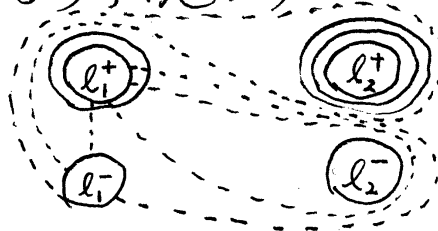


Fig. 5

(条件(2)より, 次のタイプは生じない。)



このとき, l_1^+ (or l_2^+) 上に両端点をもつ $\mathbb{C}$ の loop C の sub-arc α について, $W(\alpha, \mathbb{C}) \equiv A\bar{A}^{-1}$ or $AB(B^{-1}A^{-1})$ であるから, これらの cancell に対応する α の sub-arcs $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ に沿った surgeries により, 得られた $\mathbb{C}_k$ は, (A), (B) Type II を満たすことは, (I) と同様に確かめられる。

この補題から, 少し一般的な次の命題が導かれる。

命題. $D = (\partial T; \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2)$ を homology sphere の oriented genus 2 Heegaard diagram とする。このとき, $\mathbb{C}_2$ の loops の sub-arcs に沿った $\mathbb{C}_1$ の surgeries によって, 得られた F-diagram $F = (\partial T; \mathbb{C}, \mathbb{C}_2)$ による表示 $\pi(F)$ が cyclically reduced であるようにできる。更に, surgeries を適当に選べば, ある向きを保つ homeomorphism $f: \partial T \rightarrow \partial T$ に対し,

- i) $hF = (\partial T; h\mathbb{C}, h\mathbb{C}_2)$ が前補題の条件 (2), (3) を満たすか, 又は

ii) $\mathcal{H}F = (\partial T; \{l_1, l_2\}, \mathcal{H}\mathcal{C}_2)$ である
ようにできる。

証明. $\mathcal{C}_1$ は それぞれ, l_1, l_2 に isotopic
な二本の oriented loops からなるとしてよい。(必
要なら, D に代えて, ϕD を考えればよい。ニニに,
 ϕ は向きを保つ ∂T 上の homeomorphism で, $\phi \mathcal{C}_1 = \{l_1^+, l_2^+\}$) もし, $\pi(D)$ が cyclically reduced
なら, 何もしなくても, ii) が成り立つ。 $\pi(D)$ が
not cyclically reduced な場合について考える。
このとき, $\mathcal{C}_1$ に 補題の Type II の surgery
を行うことができる。実際, up to orientation pre-
serving homeomorphism on ∂T で, D は下
図のタイプである。(Fig. 3 の (2) に相当するものも
同様に扱えるので省いた。)

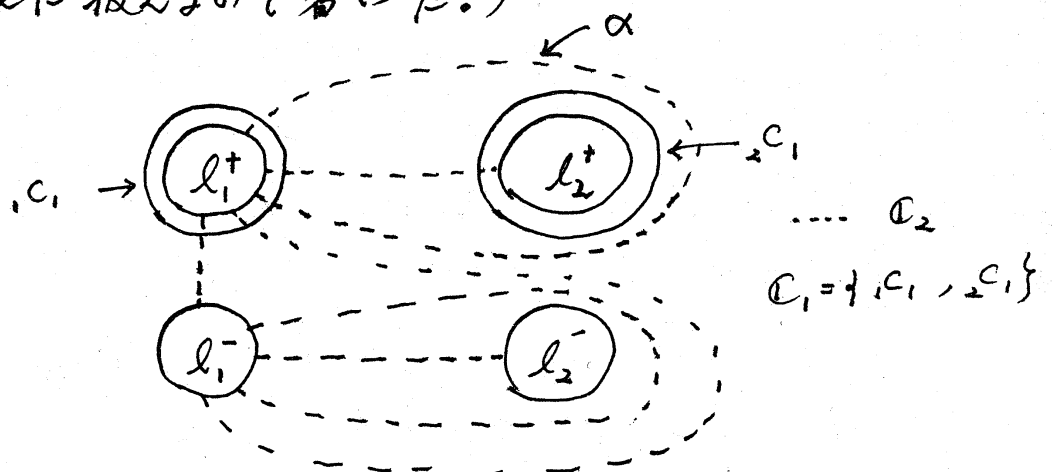


Fig. 6

従って, l_1^+ に両端点をもつ C_2 の loop の sub-arc α に沿った surgery で, C_1 は $\mathbb{E}_1$ に変形され, 向きを保つ homeomorphism $h_1: \partial T \rightarrow \partial T$ により下図のようになる。

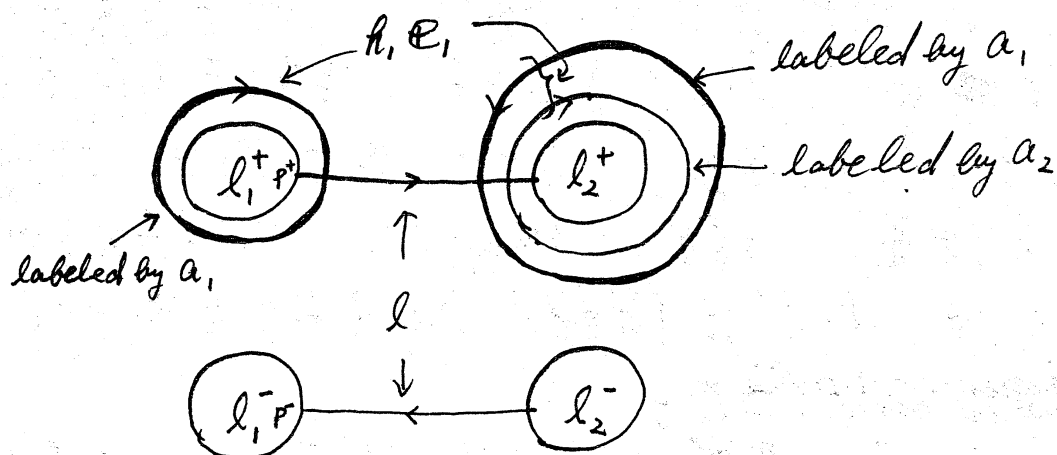


Fig. 7

このとき, $W(l, h_1, \mathbb{E}_1) = W_1, W_2$ において,
 $W_1 = a_1$, $W_2 = a_1, a_2$ で, oriented F -diagram $h_1, F_1 = (\partial T; h_1, \mathbb{E}_1, h_1, C_2)$ は補題の条件(2), (3)を満たす。もし, $\pi(F_1) (\equiv \pi(h_1, F_1))$ が cyclically reduced ならば, この F_1 が求める F である。 $\pi(F_1)$ は not cyclically reduced とする。これは, 補題の条件(1)だから, h_1, F_1 に補題が適用できる。ここで, 補題に関して次の二点に注意しておこう。

i) Type II の場合, 新しく得られた F -diagram $(\partial T; f \oplus_k, f(C))$ は, 再び 条件 (2), (3) を満たす, (従って, 更に, 条件 (1) を満たせば, 補題が, 又, 適用できる.)

ii) Type II に引き続いて Type I を適用される場合, $W(l)$ を変えない. すなわち, $W(l, \oplus) \equiv W(l, f \oplus_k)$, $\equiv \equiv$ に, $\oplus \rightarrow \oplus_1 \rightarrow \dots \rightarrow \oplus_k$ (Type II), $f \oplus_k \rightarrow f \oplus_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow f \oplus_{k'}$ (Type I), 又, f, f' は補題における向きを保つ ∂T の *homeomorphism*.

よって, 補題を繰り返し適用することにより, 求める F をうる.

[2]. 定理 2 の証明

D を S^3 の (oriented) genus 2 Heegaard diagram で, $\hat{\pi}(D) \neq \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ とする. 前命題より, oriented F -diagram $F = (\partial T; \oplus, C_2)$ で次を満たすものをうる:

- 1) $\pi(F)$ は *cyclically reduced*
- 2) ある ∂T 上の向きを保つ *homeomorphism* h に対し,

i) $\mathcal{H}F$ は補題の条件(2), (3)を満たすか

又は, ii) $\mathcal{H}F = (\partial T; \{l_1, l_2\}, \mathcal{H}\mathbb{C}_2)$

である。又, $\widehat{\pi}(D) \equiv \pi(F)$ である。今, $\mathcal{H}F$ に associated な Heegaard diagram $D_1 = (\partial T; \mathcal{Q}, \mathcal{H}\mathbb{C}_2)$ ($\equiv$ i.e., $\mathcal{Q} = \{l_1, l_2\}$) を考える。

Case 1. D_1 が trivial, (i.e. $c(D_1) = |\mathcal{Q} \cap \mathcal{H}\mathbb{C}_2| = 2$) のとき。 $\pi(D)$ は $\langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ より, 2) の ii) (上記) の場合は生じない。従って, 2) の i) の場合である。よって, ある向きを保つ ∂T 上の homeomorphism f により, $f\mathcal{H}F$ は下図のようになる。

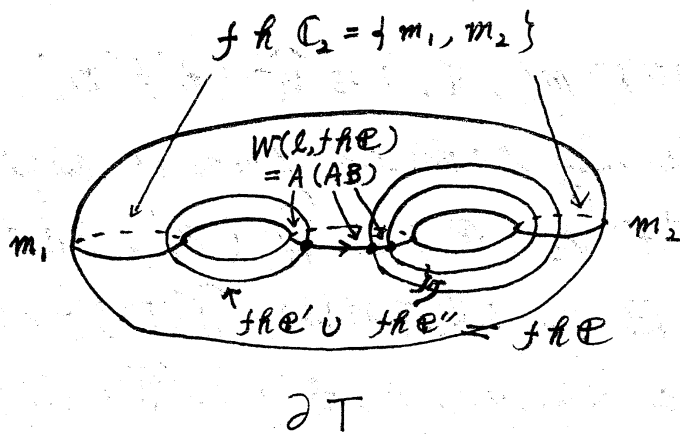


Fig. 8

従って, $\widehat{\pi}(D) = \langle a_1, a_2; \widehat{r}_1, \widehat{r}_2 \rangle$ は $\{\widehat{r}_1, \widehat{r}_2\} \equiv \{A, AB\}$ の開ツである。よって, 定理2の

求める Heegaard diagram D' として, $D = (\partial T; \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2)$ における $\mathbb{C}_2 = (fh)^{-1}fh\mathbb{C}_2 = \{h^{-1}f^{-1}m_1, h^{-1}f^{-1}m_2\}$ の loop $h^{-1}f^{-1}m_2$ を下図の m'_2 に對し $h^{-1}f^{-1}m'_2$ に取り変えたもの $(\partial T; \mathbb{C}_1, \mathbb{C}'_2)$ (:= $\mathbb{C}'_2 = \{h^{-1}f^{-1}m_1, h^{-1}f^{-1}m'_2\}$) をとればよい。

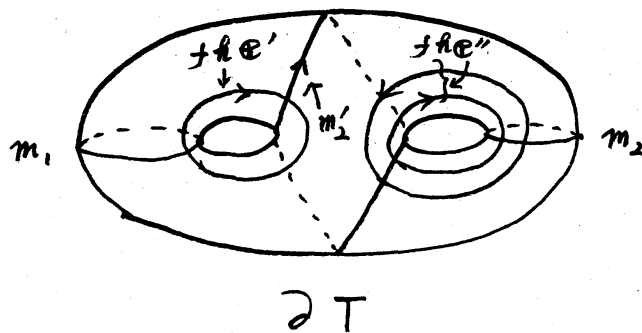


Fig. 9

実際, $\widehat{W}(h^{-1}f^{-1}m'_2, \mathbb{C}_1) \equiv \widehat{W}(h^{-1}f^{-1}m'_2, \mathbb{C})$
 (なぜなら, cyclically reduced form は surgery 不変.)
 , 又, $\widehat{W}(h^{-1}f^{-1}m'_2, \mathbb{C}) \equiv \widehat{W}(m'_2, fh\mathbb{C}) \equiv$
 $\widehat{AB^{-1}A^{-1}} \equiv B$ に注意すれば, $\widehat{\pi}(D) = \langle a_1, a_2; A, AB \rangle \rightarrow \langle a_1, a_2; A, B \rangle \equiv \widehat{\pi}((\partial T; \mathbb{C}_1, \mathbb{C}'_2))$
 である。

Case 2. D_1 が not trivial の場合。

Wave Theorem [4] により, D_1 は wave α をもつ。(wave の定義は, [13] 参照.) 以下, α

のタイプ $^{\circ}$ により二つの場合に分けて考える。

a) α が $\mathcal{C}_2$ に対する wave のとき。

ある向きを保つ T 上の homeomorphism f に対して、 $f\mathcal{C}_2$ は下図のようになる。

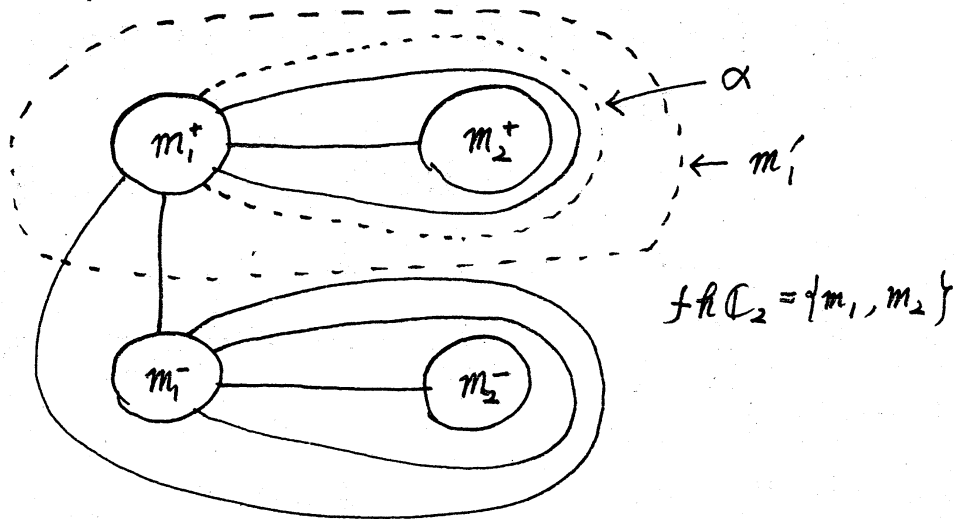


Fig. 10

$f\mathcal{C}_2 \ni m_1$ (上図) を α に沿って surgery して得られる二本の loops のうちの一本 m_1' (上図) は、 m_2 に沿った読みによる word を m_1 に沿った読みによる word への substitution を幾何的に実現していることが、上図より容易にわかる。従って、 $\pi(F) \equiv \hat{\pi}(D)$ より、定理 2 が示めされた。

b) α が $\mathcal{C}_1$ に対する wave のとき。このとき、この α を用いて、 $\mathcal{C}_2$ の surgeries が補題の

Type II と同様に行えることに注意すると, 2 の *surgeries* により, 新しい *oriented F-diagram* $F_1 = (\partial T; \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2)$ で, 次のを満たすものをうる:

- 1)' $\pi(F_1)$ は *cyclically reduced*,
- 2)' ある向きを保つ ∂T 上の *homeomorphism* h_1 に対し,

i) $h_1 F_1$ は補題の (2), (3) を満たすか, 又は,

ii) $h_1 F_1 = (\partial T; \mathbb{Q}, h_1 \mathbb{Q}_2)$ である.

従って, $h_1 F_1$ に associated な Heegaard diagram $D_2 = (\partial T; \mathbb{Q}, h_1 \mathbb{Q}_2)$ を用いて, これまで F に対して行った議論を F_1 に同じように適用できる。ここで, $C(D_2) < C(D_1)$ (≡ $C(\)$ は Heegaard diagram の complexity, i.e. 総交点数) であることに注意すれば, このやり方を (多々ても $C(D_2)$ 回) 繰り返すことにより, Case 2 の b) は Case 1, 又は Case 2 の a) に帰着される。よって, 定理 2 が証明された。

References

- [1] J. S. Birman, Heegaard splittings, diagrams and sewings for closed, orientable 3-manifolds, lecture notes for CBMS conference at Blacksburg, Va., Oct. 8-12, 1977.
- [2] ——— and H. M. Hilden, Heegaard splittings of branched coverings of S^3 , Trans. A. M. S. 213 (1975), 315-352.
- [3] ——— and J. M. Montesinos, On minimal Heegaard splittings, Michigan Math. 27 (1980), 49-57.
- [4] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi, An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka J. Math. 17 (1980), 625-648.
- [5] T. Kaneto, S^3 の Heegaard 分解に於ける π_1 の表示について, 数理研講究録 297 (1977), 69-84
- [6] ———, S^3 の種数 2 の Heegaard

diagrams に対応する基本群の表示について,
 数理研講究録 369 (1979), 144-163.

[7] ———, On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 147-158.

[8] ———, On Heegaard diagrams of S^3 ,
 数理研講究録 417 (1981), 9-27.

[9] ———, On genus 2 Heegaard diagrams for the 3-sphere, preprint.

[10] ———, On simple loops on a solid torus of general genus, preprint.

[11] E.S. Rapaport, On free groups and their automorphisms, Acta Math. 99 (1958), 139-163.

[12] M. Takahashi, An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem, Tsukuba J. Math. 2 (1978), 27-34.

[13] I.A. Volodin, V.E. Kuznetsov and A.T. Fomenko, The problem of discriminating algorithmically the standard

- three-dimensional sphere, Russian Math. Survey 29:5 (1974), 71-172.
- [14] J.H.C. Whitehead, On certain sets of elements in a free group, Proc. London Math. Soc. 41 (1936), 48-56.
- [15] H. Zieschang, On simple systems of paths on complete pretzels, A.M.S. Transl. (2) 92 (1970), 127-137.