

場の理論における非摂動くりこみ群

金沢大理 青木健一

くりこみとくりこみ群がこの研究会のテーマである。これまでの話を伺っていると、用語法の違いで議論がかみ合わないという面がある。一方、くりこみという概念自身はかなり幅のある概念である、という事実もある。すると、「それは言い方の違いでしょう」ということで、用語法の違いだけだと決めて相手を批判するよりは、むしろお互い敢えて相当に寛容になってそれぞれの研究を位置付けることによって、くりこみという概念の意外なひろがり遭遇するという機会を失わないようにした方が良いのではないかと私は考えている。

今回の講演では、普通の論文にはあまり書かないようなお話をさせていただいたので、ここにもそういう話だけを書くことにする。普通の話は末尾の文献を見ていただきたい。

1. くりこみな生活

この数年、私はくりこみ群を研究対象にして来ているが、時々、実生活でもくりこみやくりこみ群が気になってしまうことがある。

1-a 講演準備の法則

10日前の10時間は、1日前の1時間、1時間前の3分（…どこかで年齢相応の紫外カットオフせざるを得ないが…）、と同じ有効性がある。

だから、あまり前から準備する気がなくなってしまう。逆に言うと、最後の1時間がなかったら講演の中身が何分の一かになってしまうわけだ。私は、こういうくりこみな準備法則でこれまでずっとやってきたのであるが、最近ふと気付いたことがある。それは、この法則はA型の場合だ、ということだ。それなら、B型の場合はどうなるか。

B型の場合：講演は準備してはいけな。detail（ミクロ）を忘れ去り、coarse graining せよ。そうしてこそ、general audience(マクロ)に意味のある情報だけが残る。

1-b パソコン(PC)は、いつ買えばよいのか。

私には苦い思い出がひとつある。それは、学生時代に、関数電卓が欲しくて仕方がなかったのだが、次々と予定される新製品に希望を乗り換えるうちに、遂に買えなかった、ことである。

次の二つのことを仮定しよう。PCの能力進歩は既にScaling Regionに入っている。すなわち、能力は毎年 $a(>1)$ 倍になる。もう1つは、人の満足度は、自分のPCの絶対能力にではなく、各時点での世界最強マシンに対する相対能力だけの関数である。これは全くその通りであろう。世界最速スーパーコンピュータを使って研究をする人たちは、そのマシンで例えば1ヶ月で1本論文が書けるような設定の規模で計算する。この $b(>1)$ 分の1の能力のマシンでは、このレベルの論文を書くのには b ヶ月かかりそのマシンの満足度 S は b だけで決まるある割合に落ちてしまうだろう。

この二つの仮定を認めれば、トータルな積分された総満足量は、不変量である。

$$S_{\text{tot}} = \int_T^\infty S(b(t))dt = \int_T^\infty S(a^{t-T})dt = \int_T^\infty S(a^t)dt \quad (1)$$

すなわち、PCはいつ買ってもいいのだ。満足度は不変である。逆に言えば、いつ買っても、同じだけ後悔する。

1-c コンパで某先生が切れて修羅場になる転移点を正確に見極めて脱出すること

これもなかなかくりこみな世界である。critical flow の特徴は、まず、fixed point への漸近であるが、これは比較的わかりやすい。多くの場合、同じことを繰り返ししゃべるようになるからである。続いて、relevant operator の発散が始まるが、このタイミングはなかなか難しい。実際多くの場合脱出に失敗するのだが、それは相転移が一次相転移になっていて、くりこみ群解析だけではとらえきれなかったからなのである。

2 非摂動くりこみ群とは

ここでは、「非摂動くりこみ群」と私たちが呼ぶものの本質的な正体を単純に表現しよう。そのためには、くりこみ理論とは、くりこみ群とは、そして、その非摂動バージョンとは、ということを経験的に理解する必要がある。

まず出発点は、積分の微分方程式解による評価である。以下の積分を評価することを考える。

$$I(g) = \int_0^{T_0} f(g, t) dt \quad (2)$$

積分領域についてパラメータ T を導入して、

$$I(g, T) \equiv \int_0^T f(g, t) dt \quad (3)$$

とする。このパラメータ T についての微分方程式をたて、初期値問題を設定する。

$$\frac{\partial I(g, T)}{\partial T} = f(g, T), \quad I(g, 0) = 0 \quad (4)$$

この微分方程式の解の $T = T_0$ での値が元の積分を与える。

$$I(g) = I(g, T_0) \quad (5)$$

もちろん、これはあまりにも当たり前の話で、それは「積分」の定義にすぎない、と言われるかもしれない。また、積分を数値的に求める時、端から「区分求積」をしているのと同じ事でもある。いずれにしても、私たちは、

積分 $\Rightarrow$ 微分方程式の初期値問題の解

という置き換えを量子系の物理に適用する。

さて、量子系の物理を解くことは、経路（汎関数）積分（無限多重積分）

$$Z(g) = \int \prod_x d\phi(x) \exp(-S[g, \phi(x)]) \quad (6)$$

を評価することと同等である。この積分は、各点 x 毎に用意された変数、いわゆる場の変数 $\phi(x)$ を積分変数とする積分であり、連続無限多重積分となっている。被積分関数は「作用」と呼ばれるもので、これが系を完全に特定する。 g は一般に結合定数と呼ばれるもので、系を完全に指定する外部パラメータ（多次元）である。すると、上での積分と微分方程式の関係は、自由度が連続無限に拡張され、

経路積分 $\Rightarrow$ 汎関数微分方程式の初期値問題の解

となる。汎関数微分方程式というのは要するに連続無限次元偏微分方程式である。この右辺の汎関数微分方程式のことを私たちは非摂動くりこみ群方程式と呼ぶ。

このある意味でトリビアルに置きかえられた右辺をなぜこのように呼ぶのか。まず、なぜ「くりこみ」という言葉が出てくるのか。くりこみとはなんだったか。上で定義された $Z(g)$ は g の関数の顔をしてはいるが、実際には g の well-defined な関数には決してならない。これが、場の理論では「発散」が不可避であり「くりこみ」が必要である、ということに他ならない。すなわち、変数変換

$$g = Y g_R \quad (7)$$

を行うことによって、

$$Z(g) = Z(Y g_R) = Z_R(g_R) \quad (8)$$

という具合に新しい関数 Z_R を定義して、これを有限な関数にする、というのが「くりこみ」である。この時、関数値は変えず、変数を変えているだけ、というのが重要である。もちろん、この変換自体が well-defined ではなく、 Y はくりこみ因子と呼ばれる一般に「無限大」を含む量である。別の見方をすれば、元の関数で独立変数側の無限小の領域を顕微鏡で拡大して見ているとも言えよう。

次に「くりこみ群」とは何だったか。その最も現代的な意義付けは、ミクロからマクロへの有効相互作用の変化を表す、というものである。そして、まさに上式の右辺の微分方程式がそのミクロからマクロへの有効相互作用の変化を体現しているのである。(この事を理解するためには、かなりの物理的説明を要する。) そのため、この方程式をくりこみ群方程式と呼ぶ。積分そのものは g の関数としては well-defined ではない。しかし、それを等価な微分方程式に置き換えた途端に、微分方程式自身は well-defined となる。くりこみ群方程式には、問題の変数 g は一切登場しないのである。もともとの「発散」は、その解の境界値あるいは初期値の問題としてだけ現れることになる。この意味で、くりこみ群とはまさに「くりこみ」を最も単純明快にまぎれなく記述する方法である。

それだけではない。「非摂動」とは何か。それは、この右辺のくりこみ群方程式を導出し、実際に解いて行こうとする時に、「摂動論」の概念に一切依拠する必要がないからである。それでは「摂動論」とは何か。それは、例えば次のような作用

$$S[g, \phi] = \phi^2 + g\phi^4 \quad (9)$$

に対して $Z(g)$ を求める時に、 g の部分を級数に展開し、項別積分することに他ならない。

$$z(g) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp(-\phi^2 - g\phi^4) \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g\phi^4)^n}{n!} \exp(-\phi^2) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{(-\phi^4)^n}{n!} \exp(-\phi^2) g^n \quad (12)$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n \quad (13)$$

例えば、時空の次元が 0 の一次元積分であっても、この項別積分された級数すなわち摂動級数の収束半径は 0 である。この 1 次元積分の場合はボレル和がとれるが、一般にはそうはならない。

このような物理的な事情から、私たちは、上の汎関数微分方程式を非摂動くりこみ群方程式と呼ぶ。非摂動くりこみ群方程式にはいろいろなバリエーションがある。積分と等価な微分方

程式という導入以外にも、直接物理的な有効作用についてのくりこみ変換から先に定義していくことによって、いろいろな方程式や逐次変換式が得られてきた。ここで扱う微分方程式型のくりこみ群方程式はその中でもはっきりした長所をもっている。それは、くりこみ群方程式を近似なしに書き下すことができる、という点である。後は、そのくりこみ群方程式をどのように近似して解いていくか、という問題になる。つまり、汎関数微分方程式をどう近似して解いていくか、という数学の問題として捉えることが可能になる。もちろん、近似方式を考える時には、物理的な思考が欠かせない事は言うまでもない。他方、微分方程式型以外の定式化では、くりこみ群方程式自身を定める段階で近似や級数展開が必要となるのが難点となる。

3 「非摂動」の2種類

「非摂動」という場合に、一般には二つのレベルがある。ひとつは摂動級数の足し上げに相当する内容を捉えられるか、である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n \quad (14)$$

簡単なモデルでは、摂動級数のボレル和を評価することができる場合がある。また、通常の場合の理論の摂動論の枠組みの中で導入される摂動くりこみ群は、leading logarithmic series という形で摂動級数の無限次にわたる組替えを行い、無限個の項の和を順次とり入れていく。無限個の項の和自体は、正しく評価されている。しかし、それを順次とり入れていく時点では、再び級数は収束しない。

もう1つのレベルは、いわゆる真性特異点構造である。

$$\exp\left(-\frac{1}{g^2}\right) \quad (15)$$

このような関数の摂動級数は全ての次数で0であるから、この項を摂動級数から評価することはできない。こういう振るまいは典型的に、トンネル効果に伴って現れることが知られており、簡単な系ではインスタントン法と呼ばれる方法で評価できることもわかっている。また、超対称性のある系などでも、同様な構造がある。非摂動くりこみ群方程式による解析が、これらの「非摂動性」をどこまでとり入れられるのか、特に、ある近似解の範囲で、どこまで何が入るのか、がひとつの焦点として研究されてきた。

ここでひとつ着目しておくべきことがある。それは、微分方程式とその解の解析的な性質の違いである。たとえ係数が整級数展開された微分方程式であっても、その解は、非解析的なものになる、つまり、微分方程式の解は、非自明な非摂動効果を含む。例えば、 $\beta(g)$ はいわゆるベータ関数と呼ばれるもので、これが g で摂動展開されているとしよう。この時、くりこみ群方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} M(g, t) = \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} M(g, t) \quad (16)$$

の解は、

$$M(g, t) = \exp\left(t + \int^g \frac{dx}{\beta(x)}\right) \quad (17)$$

と一般に書かれるが、これは、 g の原点で真性特異点構造をもっている。従って一般にくりこみ群方程式の解は、このような非摂動的構造を容易に生成しうる。むしろ問題は、その定量的妥当性とくりこみ群方程式に対する系統的な近似方法にある。

4. 自発的（カイラル）対称性の破れ

カイラル対称性とはフェルミオン場の位相回転から生じる対称性であり、左右カイラリティの場を独立に回転するため、通常の素粒子のいわゆる質量項を禁止する対称性となる。この対称性は、素粒子の統一理論にとって本質的なものであり、それが自発的に破れることによって、素粒子のアイデンティティそのもの、すなわち素粒子属性（質量、相互作用）が生成される。いわば、素粒子属性の起源は、この自発的カイラル対称性の破れの構造そのものに起因している。

この自発的対称性の破れは、ちょうどスピン系がある温度を境にして強磁性を持つという相転移によく似たものである。スピンの場合には、系の平均スピンの0でなくなり、特定の方向を持つことによって空間回転対称性が自発的に破れることになる。カイラル対称性の場合に特に重要なのは、フェルミオン場2つの積 $\bar{\psi}\psi$ が真空期待値を持つことによって対称性が自発的に破れる場合であり、この場合を「力学的」カイラル対称性の破れと呼ぶ。オーダーパラメタが複合オペレータとなっているために、取り扱いが難しくなる。

一般に、カイラル対称性に対応した相構造は非自明なものとなり、その間の相転移、それに伴う臨界現象、などが物理的に重要となる。こういった相構造や相転移を扱う、格子シミュレーション以外のこれまでの標準的なアプローチとしては、

- * はしご近似シュウィンガー・ダイソン方程式：量子色力学
- * $1/N$ 展開：南部・ジョナラシニオ模型、スカラー理論
- * ϵ 展開：D（あるいは3）次元スカラー理論
- * 摂動くりこみ群：統一理論

などがあげられる。上の二つは、自己無撞着方程式型で非摂動性をとり込み、下の二つは、非摂動くりこみ群方程式のひとつの近似と見ることができる。しかしそれぞれ本質的な問題を抱えている。例えば、

- × あるパラメータによる「級数展開」となっている
- × 系統的な近似改善方法が定義されていない
- × モデルの特性に強く依存した手法であり汎用性がない

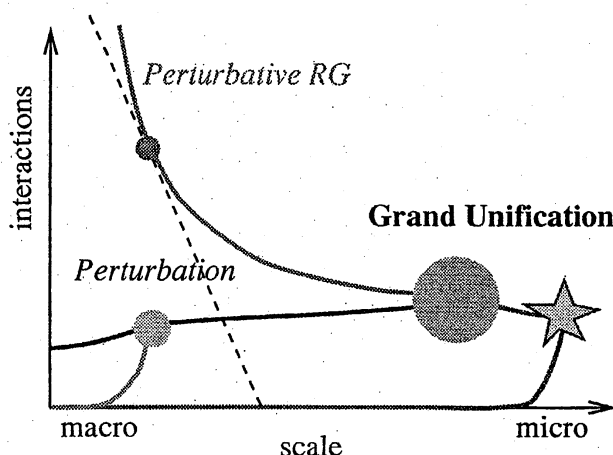
などであり、これらの問題はそれぞれの手法にとって本質的な困難となっている。

5. 非摂動くりこみ群の最近の発展

非摂動くりこみ群による解析が、相構造や臨界現象の研究にとって本来もっともふさわしい方法論であるべきことは自明であった。しかし、上記の様な、比較的素粒子物理や場の理論的な課題においては、70年代初めにウィルソンが定式化して以来、あまり活用されて来なかった。それはなぜだろうか。その理由の第1は、素粒子論の本筋、素粒子の統一理論の構成、ミクロへのアタックにおいて、摂動くりこみ群の支配は強力で、ほぼ完全であった、ということがある。もうひとつは、非摂動くりこみ群の概念にとって本質的なエネルギーのスライス、あるいはカットオフの導入、という概念が、素粒子統一理論にとって超本質的なゲージ対称性と衝突してしまい、カットオフという言葉さえ忌み嫌われてきた、ことも効いているだろう。

ここで、念のため摂動くりこみ群について少し述べよう。場の理論を摂動論で扱うと、すぐにくりこみが必要になり、くりこみ理論が生み出されてきた。考えているプロセスのエネルギースケールに依存する有効な結合定数という概念の導入を経て、摂動くりこみ群が作られ、壮大で壮麗な体系を築いてきた。それは結局、改善された摂動論として、leading logarithmic series 展開を組織し、強い相互作用の正体がQCDと呼ばれる非可換ゲージ理論であることを明らかにする最大の根拠を与えた。この時、もうひとつのポイントは、factorization という概念、すなわち複数のエネルギースケールの物理が同時に関係する時それらを切り分けて因子化して扱うという手法、にあり、有効オペレータや有効場の理論というより広い概念が生まれた。

摂動くりこみ群は、量子電気力学の摂動論から生まれ、QCD を確立した後そのスピードをあげて、弱電磁相互作用の統一から大統一理論へと素粒子の統一理論の系譜を一気に超ミクロのスケールに進め、現在では、量子重力を含む統一が素粒子論の最前線と言える状況になった。すると、いわゆるプランク長さ (10^{-33}cm) から、現在の素粒子実験の前線までの 10^{16} ものスケールが、摂動くりこみ群によって支配されていることになる。



しかし、摂動くりこみ群は、結局は摂動に過ぎない。摂動に過ぎない、ということは、情報の生成、あるいは縮約は起こり得ない、ということである。すなわち、摂動くりこみ群は、ミクロのある領域で設定された統一理論とそのパラメータの値が、それよりマクロの領域でどのように変化するか、という関係式を与えているにすぎず、何も非自明な構造は生み出さない。この意味で、素粒子統一理論は摂動的に構成されているのだが、どうしても非摂動的な内容が必要になるところがある。ひとつは、QCD によって記述されるクォークとグルーオンが「閉じ込め」という状況によって観測されず、その複合体であるハドロンとしてだけ観測されるという事実、更にそれと機を一にして、クォークのカイラル対称性が自発的に破れ、陽子や中性子の質量が作られるという事実、また、よりミクロの領域でのもっと一般的な意味でのカイラル対称性の破れ、超対称性の自発的破れ、などである。

この様な場の理論の非摂動的な研究の広がり、最近になって進んできたものである。この中で、非摂動くりこみ群も、非摂動的な手法の新手として、活躍を始めたわけである。特に、最近のコンピュータの発達によって数値計算のバリアがなくなり、解析的な手法と数値的な手法を組合わせた研究が行われることによって、70年代に解析的なことをメインに考えていた時とは比べものにならない成果が得られてきた。実際問題として、非摂動くりこみ群はその基礎方程式自身は正確に書き下せるわけであるが、それを解くには近似が必要になる。その近似のいわゆる第0近似が局所ポテンシャル近似と呼ばれるが、その第0近似が予想をはるかに越えて有効であり、昔からの他の非摂動手法の全てを含んでいるということが明らかになった。この点が、最近の発展につながっている。

特に私たちが取り組んだ中では、非摂動くりこみ群を使って、力学的なカイラル対称性の破れを解くこと、量子トンネル効果を調べることで、の二つが全く新しい手法を与えるものとなった。トンネル効果の方は、いわば、くりこみ群とトンネル効果というこれまで全く関係のなかった手法とテーマを融合したことになり、もともと有効な解析手段の極めて乏しいトンネル効果の理論的解析の幅を広げることになった。

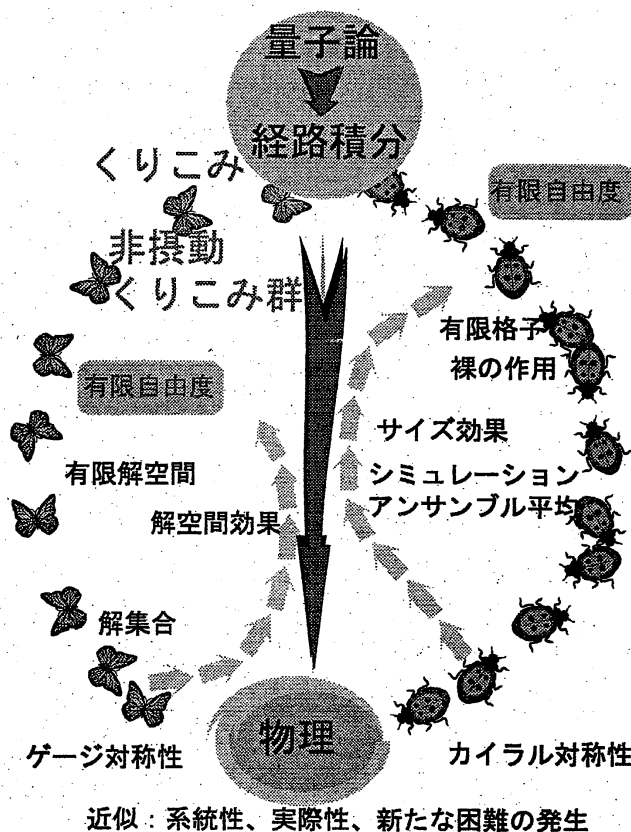
カイラル対称性の方では、これまでもっともよく用いられたのは、はしご近似シュウイン

ガー・ダイソン (SD) 方程式である。SD 方程式の世界では、いうまでもなく、そのゲージ依存性が大問題となる。はしご型のグラフしかとり入れないので、ゲージ依存性が非常に悪いということは自明である。また、QCD にそれを適用する時、SD 方程式に現れるゲージ結合定数をいわゆるくりこみ群的に走る有効結合常数に置き換えて計算する「改善されたはしご近似」がよく使われ、定量的には良い結果を与えるものの、その理論的根拠は全くなかった。自己無撞着方程式にそんな走る結合常数を勝手に入れると、その近似の意味が不明となり、その近似を更に改善する方法など全く議論すらできないことになる。

非摂動くりこみ群方程式によって力学的なカイラル対称性の破れをまともに扱い得るのかどうかすら、まったく非自明なことであったが、我々の研究によって、その手法が新たに開発された。その第0近似が、ちょうど、はしご近似の、それも「改善されたはしご近似」の結果を再現することが示された。これによって初めて、「改善されたはしご近似」はその理論的根拠を得たことになり、「改善されたはしご近似」を更に改善することが初めて展望できるようになった。実際、はしご近似を超える解析を行うことによって、はしご近似がかぶっている大きなゲージ依存性が改善されること、現象論的にも物理量の結果が改善されること、が確かめられている。

6. 非摂動の双壁

最後に、非摂動くりこみ群の方法を、非摂動の「大帝国」、格子シミュレーションの手法と比較して、その特徴を明らかにしよう。



量子論を経路積分で書く。「昔の研究会だと、この辺りで、中西先生が突っ込んできてなかなか前に進めなかったのですが、今日は大丈夫そうですね」と、研究会の時には失礼を言ってしまった。するとその後、中西先生は、経路積分の諸問題を含め興味深い論考を「素粒子論研究」に掲載されている（文献参照）。格子シミュレーションの手法では、まず有限自由度の系で近似し、有限サイズの格子上で裸の作用を用いて経路積分をモンテカルロ法で評価する。物理量はアンサンブル平均として求め、格子サイズを拡大したり、裸の作用を調整したりして、真の物理量の評価を行う。

他方、非摂動くりこみ群の手法では、まず、くりこみ、による有効作用の変化をくりこみ群方程式として書き下す。この時点では、近似はなく、また、裸の作用の情報も関係ない。次に、この得られた汎関数微分方程式を有限自由度で近似して（数値的に）解く。そのためには、汎関数空間を適当な有限自由度の部分空間に近似し、元の微分方程式をこの部分空間に「射影」した方程式を求め、それを解く。この「射影」が近似を決める。解の集合を得た後、物理量を直接有効作用から計算する。最後に、近似を特徴付けている部分空間を拡大することによって、解および物理量の真の値を評価する。

どちらも摂動とは無縁なので、得られた物理量にすぐにエラーバーをつけることは難しい。格子シミュレーションでは格子サイズの拡大によって有限自由度で近似しているためのエラーを評価する。非摂動くりこみ群では、射影を定義する部分空間を拡大することによって、有限自由度で近似しているエラーを評価する。これらのプロセスは、数学的にも対応している。

どちらも有限自由度に落としてから数値計算に進むという近似を必要とする。これらの近似の系統性、実際性、近似による新たな困難の発生、ということが問題となる。格子シミュレーションでは長くカイラルフェルミオンを格子に乗せることができない、という困難があった。しかし、最近になって、ある種の凝った手法を使うことによって、カイラル対称性を格子上で事実上実現することが可能である、とわかってきたが、実際の数値計算ですぐに主流となるかどうかは不明である。そのための要求計算機資源が多くなるからである。非摂動くりこみ群の方では、近似以前のその定式化の段階で、ゲージ対称性を明白には維持できないという問題がある。これも明白ではないゲージ対称性という問題自身は原理的なものではなく、対症療法は存在している。例えば、ゲージ不変な正則化の技法が登場する以前でも、QEDのくりこみ理論計算は遂行されたという事を思えば、明白なゲージ対称性は便利ではあっても、必須ではない。しかし、実際には、非摂動くりこみ群における対症療法は「変形されたウォード・高橋恒等式」として定式化されているのであるが、この恒等式自身が無限次元の内容をもっているために、近似によって有限次元の情報に落とす時の任意性があまりにも大きく、近似をある程度進めないとその有効性が明らかにならず、今後の課題となっている。

非摂動くりこみ群でQCDを扱う際には、更に本質的な問題がある。それは、ゲージ結合常数の赤外での振るまいがどうなるのか、ということである。先の摂動くりこみ群を説明した図にあるように、単純な摂動は、有効結合常数がエネルギースケールの対数に対して線形に変化する。一方、摂動くりこみ群で「改善」すると、分数関数となる。このことによって、紫外方向では、ゲージ結合常数が虚数になる困難が避けられ、いわゆる漸近自由となって「改善された摂動論」が信頼にたる結果を出すことができる。他方、赤外では、分数関数の極が現れ、発散してしまう。この事実をどう理解するのか。よくされる説明は、「閉じ込め」が起こるために、この様な低エネルギーのスケールでのグルーオンやクォークの結合は物理的な実現場所がなく、従って、この発散は物理的に観測できないから大丈夫、というものである。別の考え方もある。この発散は、摂動くりこみ群が摂動に縛られた近似をしているために起きることであって、きちんと非摂動的な計算を行えば、結合常数が発散することなどありえない。従って、何か更に非摂動的な近似を発明することによって、発散しない結合常数を使いつづけられるだろう、というのである。この辺りの問題は、クォーク・グルーオンという変数からハドロン変数への移行、あるいは複合粒子の生成過程、をどのように非摂動くりこみ群は記述し得るのか、という

もっと一般的な問題と密接に絡んでおり、今後の大きな目標と言えよう。

参考文献

この分野の総合報告はまだ多くない。数理物理'99のプロシーディングスが以下で刊行される予定である。その中の私の講義及び文献が有用と思われる。この中の他の著者の講義録もくりこみ群のさまざまな展開を述べたものであり興味深い。

Lectures in the Proceedings of MathPhys'99,
International Journal of Modern Physics B (2000).

中西先生の文献は、

「素粒子論における 10 の迷信」 素粒子論研究 100-2 (1999) 95

なお、非摂動くりこみ群についての最近の私の研究は、金沢大学での以下の方々との共同研究に基づいているものであり、これらの方々との絶え間ない議論に感謝します。

尾野田浩志, 窪田健一, 児玉博明, 清水健一, 住淳一, 相馬亘, 高木郁, 谷口雅樹,
寺尾治彦, 友寄全志, 中村悦子, 堀越篤史, 森川慶一