

宇宙における渦状構造とチャーン・サイモン 重力理論

金野 幸吉 (Kohkichi Konno)¹, 松山 豊樹 (Toyoki Matsuyama)²,

浅野 泰寛 (Yasuhiro Asano)¹, 丹田 聡 (Satoshi Tanda)¹

¹ 北海道大学大学院工学研究科

Department of Applied Physics, Hokkaido University

² 奈良教育大学理科教育講座

Department of Physics, Nara University of Education

1 はじめに

宇宙における重力現象に関連して、現在まず3つの大きな問題が存在している。それらは、(i) 量子重力の問題、(ii) ダークマターの問題、(iii) ダークエネルギーの問題である。(i)に関連する量子重力の理論はブラックホールの近傍や初期宇宙での物理現象を取り扱う上で必要不可欠である。しかし、そのような理論が未だ完成していないことが大きな問題となっている。一方で、(ii) および (iii) に関することは、これまでの宇宙の観測から明らかになってきた事実である。近年、宇宙背景放射などの高精度な宇宙観測から、この宇宙を満たしているエネルギー構成要素の内訳が明らかになった [1]。しかしながらその結果は、宇宙全体の22%がダークマターと呼ばれる謎の物質から成り、74%がダークエネルギーと呼ばれる未知のエネルギーで、我々の知っている物質は全体の4%程でしかないというものである。つまり、全体の9割以上が我々の知らないダーク成分から成っていることを示している。ここではダークマターの存在を示す証拠の一例を紹介する。それは渦巻銀河の回転運動に関するもので、初等的な物理の知識があれば理解できるものである。渦巻銀河は、数千億個程の恒星から作られる銀河円盤から成り、その円盤が銀河中心の周りに回転運動を行っている。円盤の回転速度を中心からの距離の関数として描いたグラフが「回転曲線」と呼ばれるものである。観測から分かることは、ほとんどの銀河に対して、(光で観測される円盤の大きさをはるかに越えて) その回転曲線がほぼ平らになる ($v \simeq \text{const.}$) ということである。この事実は、ニュートン重力の下での運動を考えた場合、非常に奇妙に思われる。いまニュートン重力の下での回転運動を考えると、その運動方程式は

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 m は銀河中心の周りを運動する天体の質量、 v はその天体の速度、 r は銀河中心からの距離、 G はニュートン定数、 M は半径 r の球内に含まれる全質量を示す。この式より、 M が定数と見なせるところでは、速度 v は $1/\sqrt{r}$ に比例して減少するはずである。しかし、観測事実はそのような結果を示していない。このような観測結果と理論との不整合により、ダークマターの存在が一般に必要とされている。さらに、上述の3つの問題に加えて、宇宙にはジェットと呼ばれる物理現象があり、その中の特異なタイプのジェットの物理機構にも同様に大きな謎が存在する [3]。宇宙ジェットは中心天体から双方向にプラズマが吹き出す現象で、その中には竜巻のようにスパイラルな構造が観測されているものもある。中心天体は大小様々で原始星から銀河中心のブラックホールなどがある。特に銀河中心から放出されるジェットでは、その長さが銀河サイズの10倍程に達するものもある。宇宙ジェットの噴流の速さは、光速の99%に達するものも存在し、それらは非常に高くコリメートをされている。そのコリメーションの度合は、例えば長さ10kmもの水流の先端で、その水流が10mから100mぐらいしか広がらないような勘定となる。通常の理論の下では、このように速い流速と高いコリメーションを説明することはとても困難である。したがって、このような特異な宇宙ジェットのエネルギー源、加速機構、そしてコリメーション機構も大きな謎となっている。以上で述べたように、宇宙に存在する未解決問題は、宇宙の渦状構造といくつかの点で関係している。したがって、宇宙の渦状構造に関する物理機構の解明は、新しい物理を切り開く可能性を秘めている。

このような未解決問題へのアプローチとして、我々は現在チャーン・サイモン (CS) 重力理論という理論に着目している。一般に、上で述べたような未解決問題に対しては、次のような選択肢を考えることができる。

- (a) 我々はエネルギーの他の形態などについて全く無知なだけで、既存の重力理論の下で未解決問題は十分に説明可能である。
- (b) 基礎になっている重力理論（一般相対論）が実は不十分である。

最も主流といえるアプローチは (a) であり、ダークマターとされる未検出な素粒子の探索などが現在精力的に進められている。これに対して、我々のアプローチは、ある種のコペルニクス的な観点とも言える (b) に基づくものである。CS 理論は、通常のラグランジュ密度にチャーン・サイモン項と呼ばれるトポロジカルな項が付与された作用から作られる理論である。この理論は主に (2+1) 次元におけるゲージ場理論 (電磁場および重力場) において発展した [4]。重力場の理論に関しては、比較的最近 Jackiw & Pi [7] が (3+1) 次元への拡張を行った。この4次元 CS 重力理論の興味深い点としては以下が挙げられる。

- (I) CS 重力理論は、超弦理論などの量子重力理論から低エネルギー有効理論として導くことができる [5]。特に、CS 重力理論は量子重力理論において本質的となっている部分から構成されている。
- (II) 初期宇宙で重要な役割を果たすインフレーション場の有効場理論が、最近 Weinberg[6]により議論されたが、その有効場理論に現れる 3つの補正項の 1つが CS 重力理論を与え、唯一パリティ対称性を破る重力理論となっている。
- (III) CS 重力理論においては、一般相対論におけるシュワルツシルト解 (無回転のブラックホール解) がそのままの形で成り立つ。このため、この理論はこれまでに行われた (古典的な) 重力の検証実験をすべてパスする。
- (IV) CS 重力理論では、ブラックホールの回転に伴う時空の引きずりの効果が顕著に変更される。したがって、銀河の回転曲線のような異常な回転運動を説明できる可能性がある。

つまり、CS 重力理論は量子重力の問題を解決すると期待される理論と密接に関係し、かつダークマターの問題などに十分アプローチできる可能性を持っている。

この要約では、4次元 CS 重力理論の下で我々が行った最近の研究 [8, 9, 10] について紹介する。第2節では、4次元 CS 重力理論として最初に提案された Jackiw-Pi モデル [7] とそれを拡張したモデルとを紹介する。第3節では、シュワルツシルト・ブラックホール解からの摂動を考えることで得られた“回転するブラックホール”の近似解 [8] について触れ、銀河の回転曲線が CS 重力理論の下ではダークマターの導入無しに説明可能である [9] ということを示す。第4節では、CS 重力下における流体の運動のラグランジュ的な記述を与え、宇宙ジェットの謎との関連性について述べる。最後に第5節では、以上の内容をまとめる。なお、この要約では、時空の座標を $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$ などと表す。ここで、ギリシャ文字は $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3$ を取るものと約束する。空間座標を表すためにはラテン文字 $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$ を用いることにする。さらにアインシュタインの規約を用いて和の記号を省略する。つまり、 $A_\alpha B^\alpha \equiv \sum_{\alpha=0}^3 A_\alpha B^\alpha$ のように一つの項に同じ添字が現れた場合はその添字について和を取ることを約束する。単位系としては $c = G = 1$ となる単位系を以後用いることにする。

2 4次元チャーン・サイモン重力理論

Jackiw & Pi [7] により提案された4次元チャーン・サイモン重力理論 (Jackiw-Pi モデル) は次の作用から作られる.

$$\begin{aligned} I_{\text{JP model}} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(-\sqrt{-g}R + \frac{1}{4}l\vartheta {}^*R^\sigma{}_\tau{}^{\mu\nu} R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(-\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}l(\partial_\mu\vartheta) K^\mu \right). \end{aligned} \quad (2)$$

この式において, g はメトリック・テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式, $R \equiv g^{\alpha\beta} R^\lambda{}_{\alpha\lambda\beta}$ はリッチ・スカラー, $R^\tau{}_{\sigma\alpha\beta} \equiv \partial_\beta \Gamma^\tau{}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\tau{}_{\sigma\beta} + \Gamma^\tau{}_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^\tau{}_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\beta}$ はリーマン・テンソル, ${}^*R^\sigma{}_\tau{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\tau{}_{\sigma\alpha\beta}$ は双対なリーマン・テンソル, l は結合定数, ϑ は (外的な) スカラー関数, そして K^μ は

$$K^\mu \equiv \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \left(\Gamma^\sigma{}_{\alpha\tau} \partial_\beta \Gamma^\tau{}_{\gamma\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\tau} \Gamma^\tau{}_{\beta\eta} \Gamma^\eta{}_{\gamma\sigma} \right) \quad (3)$$

で定義されるチャーン・サイモン・トポロジカル・カレントである. ここで, $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv g^{\alpha\lambda}(\partial_\gamma g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\gamma} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma})/2$ はクリストッフエル・シンボルを表し, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ はレビ・チビタ・テンソル密度 ($\varepsilon^{0123} \equiv 1$) を表す. (2) 式の第1項はアインシュタイン方程式を導くアインシュタイン・ヒルベルト作用であり, 第2項はチャーン・サイモン項と呼ばれている. 作用 (2) 式のメトリック $g_{\mu\nu}$ に関しての変分を取ると, 重力場の方程式

$$G^{\mu\nu} + lC^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu} \quad (4)$$

の左辺が得られる. ここで, $G^{\mu\nu}$ はアインシュタイン・テンソル, $T^{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルであり, $C^{\mu\nu}$ はコットン・テンソルと呼ばれ,

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[(\nabla_\sigma \vartheta) (\varepsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha R^\nu{}_\beta + \varepsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} \nabla_\alpha R^\mu{}_\beta) + (\nabla_\sigma \nabla_\tau \vartheta) ({}^*R^{\tau\mu\sigma\nu} + {}^*R^{\tau\nu\sigma\mu}) \right] \quad (5)$$

で与えられる. この理論においては, 「一般座標変換不変性」という基本原理, つまり, 微小な座標変換 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu(x)$ の下での作用の不変性 (微分同相不変性) を改めて課す必要がある. そのことは,

$$0 = \nabla_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{8\sqrt{-g}} v^\nu {}^*R^\sigma{}_\tau{}^{\mu\lambda} R^\tau{}_{\sigma\mu\lambda} \quad (6)$$

という条件を導く. したがって, Jackiw-Pi モデルでは (4) 式と (6) 式が基礎方程式となる.

上の理論では, ϑ は外的な関数として与えられている. これに対して, ϑ を動的なスカラー場として理論の中に組み込んだ拡張モデルも最近考えられている. その作用は,

$$I = I_{\text{JP model}} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \vartheta) (\partial_\nu \vartheta) \right] \quad (7)$$

で与えられる。\$\vartheta\$ がこのように動的なスカラー場として扱われる場合、上述の微分同相不変性は自動的に満たされる [7]。ゆえに、(6) 式のような制限式は必要ない。その代わりに \$\vartheta\$ の変分から得られる場の方程式

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \vartheta = -\frac{l}{64\pi} {}^* R^\tau{}_\sigma{}^{\mu\nu} R^\sigma{}_{\tau\mu\nu} \quad (8)$$

が(6)式に取って代わる。つまり、(4)式と(8)式が拡張モデルの基礎方程式となる。なお、スカラー場の運動エネルギーが無視できる状況では、拡張モデルは Jackiw-Pi モデルに帰着する。

3 回転するブラックホールの解と宇宙物理学的な帰結

第1章で述べたように一般相対論におけるシュワルツシルト解(無回転のブラックホール解)は、CS 重力理論においても解となる。そこで我々は、Jackiw-Pi モデルにおいてシュワルツシルト解の摂動を考えることで、回転するブラックホールの解を近似的に求めた [8]。具体的には、摂動のパラメータとしてブラックホールの回転速度に対応する量を用い、遅く回転するブラックホールを考えた。外的なスカラー関数を \$\vartheta = z = r \cos \theta\$ と仮定すると、回転するブラックホールを表すメトリックの解は、極座標の下で

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - 2r^2 \omega(r) dt d\phi \end{aligned} \quad (9)$$

と求まる。ここで、\$M\$ はブラックホールの質量を表し、\$\omega\$ は

$$\omega = C_1 \frac{r - 2M}{r^3} + \frac{C_2}{r^3} [r^2 - 2Mr - 4M^2 + 4M(r - 2M) \ln(r - 2M)] \quad (10)$$

で与えられる [8, 9]。\$C_1\$ および \$C_2\$ は解のパラメータで、ブラックホールの回転速度に係る量である。したがって、これらの量は今の議論では小さいものと見なされる。我々は、(9)式で与えられるブラックホール時空の宇宙物理学的な帰結を調べる目的で、この時空におけるテスト粒子の運動を調べた [9]。その結果、赤道面における円運動の回転速度は次のようになることが分かった。

$$v = r \frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{M}{r}} + \left[r\omega(r) + \frac{r^2}{2} \omega'(r) \right] \simeq \pm \sqrt{\frac{M}{r}} + \frac{C_2}{2} \quad (11)$$

ここで最後の表式は、\$r\$ が十分に大きいところで評価したものである。第1項はニュートン重力における表式と同じものである。一方で、第2項はCS 重力下でのブラックホール

の回転を調べることで初めて現れた項である。興味深いことに、この項により回転速度は遠方で一定となる。これは銀河の回転曲線の性質と全く同じ性質のものである。ゆえに、CS 重力の下ではダークマターの導入無しに銀河の回転曲線の性質を得ることができる。

4 チャーン・サイモン重力下での流体の運動

CS 重力下における流体の方程式は、(4) 式から両辺の共変微分を取ることによって得られる。拡張モデルにおいては、

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T_m{}^{\mu\nu} &= -\frac{l}{8\pi} \nabla_\nu C^{\mu\nu} - \nabla_\nu T_\vartheta{}^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \nabla^\mu (\tilde{v}^\lambda \tilde{v}_\lambda) - \tilde{v}^\lambda \nabla_\lambda \tilde{v}^\mu\end{aligned}\quad (12)$$

となる。ここで、 $\tilde{v}_\mu \equiv \nabla_\mu \vartheta$ とし、関係式 [7]

$$\nabla_\nu C^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \tilde{v}^\mu {}^* R^\sigma{}_\tau{}^{\nu\lambda} R^\tau{}_{\sigma\nu\lambda} \quad (13)$$

を用いた。いま、流体として完全流体を仮定する。このとき、エネルギー運動量テンソル $T_m{}^{\mu\nu}$ は、

$$T_m{}^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (14)$$

で与えられる。ここで ρ はエネルギー密度、 p は圧力、 u^μ は流体粒子の 4 元速度場であり $u^\mu u_\mu = -1$ が満たされる。(12) 式は 2 つの成分、つまり u^μ に平行な成分と垂直な成分に分けることができる。それぞれの式は、

$$\nabla_\mu (s u^\mu) = -\tilde{S}, \quad (15)$$

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu + P^{\mu\nu} \nabla_\nu (\ln h) = \tilde{V}^\mu, \quad (16)$$

となる。ここで $P^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ は u^μ に垂直な面への射影テンソルである。また、バロトロピックな流体 ($p = p(\rho)$) を仮定することで新しい変数 s と h を次のように導入した。

$$s \equiv \exp \left(\int^\rho \frac{d\rho}{\rho + p} \right), \quad (17)$$

$$h \equiv \exp \left(\int^p \frac{dp}{\rho + p} \right). \quad (18)$$

s と h はそれぞれ比エントロピーと比エンタルピーに対応する [11]. さらに $\tilde{S}$ と $\tilde{V}$ は

$$\tilde{S} \equiv \frac{s}{\rho+p} u_\mu \left[\frac{1}{2} \nabla^\mu (\tilde{v}^\lambda \tilde{v}_\lambda) - \tilde{v}^\lambda \nabla_\lambda \tilde{v}^\mu \right], \quad (19)$$

$$\tilde{V}^\mu \equiv \frac{1}{\rho+p} P^\mu{}_\nu \left[\frac{1}{2} \nabla^\nu (\tilde{v}^\lambda \tilde{v}_\lambda) - \tilde{v}^\lambda \nabla_\lambda \tilde{v}^\nu \right], \quad (20)$$

で定義される. (15) 式は連続の方程式に対応し, (16) は流体の運動方程式を与える.

渦の時間発展についても議論するために, いま 4 元渦度ベクトル ω^μ を次のように定義する [11].

$$\omega^\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} u_\nu \nabla_\sigma u_\lambda. \quad (21)$$

このとき, 非相対論的な状況 $u^\mu \simeq (1, v_f^i)$ に対して空間成分は, 通常の 3 次元的な渦度を与える. つまり $\omega^i \propto (\nabla \times \mathbf{v}_f)^i$ となる. さらに興味深いことに, 時間成分はヘリシティ密度 $\mathbf{v}_f \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_f)$ を与える. したがって, (21) 式を用いることにより, 渦度とヘリシティを相対論的な枠組の中で統一的に議論することが可能となる. なお, この点はこれまでの文献では指摘されてこなかった内容である. 渦度の時間発展の方程式は, (16) 式をさらに微分することによって得られ

$$\nabla_\nu \left(\frac{h\omega^\mu}{s} \right) \frac{u^\nu}{h} - \frac{h\omega^\nu}{s} \nabla_\nu \left(\frac{u^\mu}{h} \right) = \frac{1}{s^2} \tilde{S} \omega^\mu + \frac{1}{s} \left[\tilde{V}_\nu \omega^\nu u^\mu + {}^* \tilde{W}^{\mu\nu} u_\nu \right] \quad (22)$$

となる. ここで,

$${}^* \tilde{W}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \nabla_\sigma \tilde{V}_\lambda \quad (23)$$

である. ゆえに CS 重力下での渦度の時間発展方程式は (22) 式で与えられることになる.

次に流体の運動をラグランジュ的記述の観点から取り扱う [11]. この目的のためにラグランジュ座標

$$x^\mu = (\tau, x^i) = (\tau, \mathbf{x}) \quad (24)$$

を導入する. ここで τ は固有時間を表し, x^i は流線に沿って一定とする. このとき, 流体の 4 元速度場は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \delta^{0\mu} = (1, 0, 0, 0) \quad (25)$$

となる. ラグランジュ座標を導入することは, 4 元速度場をこの式のように取ることと等価であり, (25) 式をラグランジュ条件と呼ぶ [11]. ラグランジュ条件を用いると, (15) 式は

$$\partial_0 (\sqrt{-g} s) = -\sqrt{-g} \tilde{S} \quad (26)$$

となり、その時間積分として

$$s(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{g(\tau_0, \mathbf{x})}{g(\tau, \mathbf{x})}} s(\tau_0, \mathbf{x}) - \frac{1}{\sqrt{-g(\tau, \mathbf{x})}} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \sqrt{-g} \tilde{S} \quad (27)$$

が得られる。特に圧力 p が無視できるときには、この式は、

$$\rho(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{g(\tau_0, \mathbf{x})}{g(\tau, \mathbf{x})}} \rho(\tau_0, \mathbf{x}) - \frac{1}{\sqrt{-g(\tau, \mathbf{x})}} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \sqrt{-g} \tilde{S} \quad (28)$$

となる。これらの式より、もし $\tilde{S} = 0$ ならば、 $\sqrt{-g}s$ もしくは $\sqrt{-g}\rho$ がラグランジュ座標の下で保存されることが分かる。しかし $\tilde{S} \neq 0$ の場合には、もはやこれらの量は保存しない。この場合、 $\tilde{S}$ はエントロピー源もしくはエネルギー源となる。ゆえに、CS 重力においてはエネルギー密度などの生成が起こる可能性がある。

次に渦度の方程式 (22) 式を議論する。ラグランジュ条件の下で、(22) 式の空間成分は、

$$\partial_0 \left(\frac{h\omega^i}{s} \right) = \frac{h}{s^2} \tilde{S} \omega^i + \frac{h}{s} {}^* \tilde{W}^{i\nu} u_\nu \quad (29)$$

となる。これを時間積分すると、

$$h(\tau, \mathbf{x}) \omega^i(\tau, \mathbf{x}) = \frac{s(\tau, \mathbf{x})}{s(\tau_0, \mathbf{x})} h(\tau_0, \mathbf{x}) \omega^i(\tau_0, \mathbf{x}) + s(\tau, \mathbf{x}) \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left(\frac{h}{s^2} \tilde{S} \omega^i + \frac{h}{s} {}^* \tilde{W}^{i\nu} u_\nu \right) \quad (30)$$

が得られる。特に圧力 p が無視できるときには、(22) 式から直接

$$\omega^\mu(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\rho(\tau, \mathbf{x})}{\rho(\tau_0, \mathbf{x})} \omega^\mu(\tau_0, \mathbf{x}) + \rho(\tau, \mathbf{x}) \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left[\frac{1}{\rho^2} \tilde{S} \omega^\mu + \frac{1}{\rho} (\tilde{V}_\nu \omega^\nu u^\mu + {}^* \tilde{W}^{\mu\nu} u_\nu) \right] \quad (31)$$

が得られる。(30) 式より、 $\tilde{S} = 0$ かつ $\tilde{V}^\mu = 0$ となる場合には、 $h s \omega^i$ が保存されるということが分かる。さらに、 $\tilde{S} \neq 0$ もしくは $\tilde{V}^\mu \neq 0$ のときにはもはや循環が保存しないということも分かる。この場合には、たとえ渦度が初期時刻に至るところでゼロであったとしても、 $\tilde{S}$ や ${}^* \tilde{W}^{i\nu}$ が渦の源となり、渦度がある時刻で生成され得ることになる。

最後に、宇宙物理学的な意義について議論する。ここでは具体的ないくつかの時空について考える。まずシュワルツシルト時空とロバートソン・ウォーカー時空を取りあげる。前者は無回転のブラックホールに伴う時空を表し、後者は膨張宇宙の時空を表す。それぞれは、一般相対論におけるアインシュタイン方程式の解であり、同時に CS 重力における

場の方程式 ((4) 式および (8) 式) の解となる¹. これらの時空に対しては, $\vartheta = \text{const}$ となり, $\tilde{S} = 0$ 及び $\tilde{V}^\mu = 0$ が得られる. つまり, (27) 式及び (30) 式において湧き出しを表す項は全て消えることになる. ゆえに, シュワルツシルト時空やロバートソン・ウォーカー時空では, ラグランジュ座標において $\sqrt{-g}s$ と $h\omega^i/s$ が保存されることになる. (圧力が無視できる状況では, $\sqrt{-g}\rho$ と ω^μ/ρ が保存される.) 対照的に, 回転するブラックホールの時空では異なった事が期待される. 回転するブラックホールに対する宇宙物理学的な厳密解は未だ得られていないが, 一般相対論におけるカー解と同様にその厳密解に対しては, ブラックホールの近傍で $*R^\tau{}_\sigma{}^{\mu\nu}R^\sigma{}_{\tau\mu\nu} \neq 0$ となることが期待される [9]. このとき, (27) 式及び (30) 式において湧き出し項が現れる. ゆえに, 回転するブラックホールの時空ではエネルギー密度及び渦度の湧き出しがブラックホール近傍で生じる可能性がある. 宇宙物理学的には, このような機構は第1節で述べた特異なタイプの宇宙ジェットに対してその謎を解く可能性を秘めていると考えられる.

5 まとめ

我々は, 宇宙の未解決問題にアプローチする目的で, 超弦理論などの量子重力の候補理論から導かれるチャーン・サイモン (CS) 重力理論という理論に着目した. そして, 渦巻銀河の回転運動の問題との関連性において CS 重力理論における回転するブラックホールの解を近似的に求めた. 我々は, その解の物理的な帰結を調べることで, CS 重力理論においては, ダークマターを導入すること無しに銀河の平らな回転曲線の性質を説明することができるということを明らかにした. このことはダークマターの問題が CS 重力理論と密接に関連している可能性があるということを示唆している. さらに, 我々は CS 重力理論において流体の運動に関する一般的な性質をラグランジュ的記述を用いることで明らかにした. その結果, 無回転のブラックホールや一様等方な膨張宇宙を表す球対称時空では通常の流体力学と同様にエネルギーや循環が保存されるものの, 非球対称な時空, つまり回転するブラックホールの近傍などではこれらの量が保存されないという可能性を指摘した. 後者の帰結は, 特異なタイプの宇宙ジェットの謎を説明するために非常に有用な機構であると考えられる.

¹証明) これらの時空に対しては, $*R^\tau{}_\sigma{}^{\mu\nu}R^\sigma{}_{\tau\mu\nu} = 0$ となるので, スカラー場の方程式 (8) 式は $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\vartheta = 0$ となる. ここで, シュワルツシルト時空に対しては無限遠で $\vartheta \rightarrow 0$ とし, ロバートソン・ウォーカー時空に対しては一様性を仮定すると, $\vartheta = \text{const}$ という解が得られる. これに対して, (4) 式は通常のアインシュタイン方程式に帰着する. したがって, これらのメトリックは CS 重力における場の方程式を満たすことになる.

参考文献

- [1] C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Supplement* **148**, 1 (2003).
- [2] R. Sancisi and T. S. van Albada, *IAU Symp.* **117**, 67 (1987).
- [3] 小山 勝二, 嶺重 慎 編, 「ブラックホールと高エネルギー現象 (シリーズ現代の天文学 第8巻)」 (日本評論社, 2007 年), 第3章.
- [4] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Ann. Phys.* **140**, 372 (1982).
- [5] See e.g. T. L. Smith et al., *Phys. Rev. D* **77**, 024015 (2008); Adak & Dereli, arXiv:0807.1832.
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **77**, 123541 (2008).
- [7] R. Jackiw and S.-Y. Pi, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003).
- [8] K. Konno, T. Matsuyama, and S. Tanda, *Phys. Rev. D* **76**, 024009 (2007).
- [9] K. Konno, T. Matsuyama, Y. Asano, and S. Tanda, *Phys. Rev. D* **78**, 024037 (2008).
- [10] K. Konno, T. Matsuyama, and S. Tanda, submitted to *Phys. Rev. D*.
- [11] H. Asada and M. Kasai, *Phys. Rev. D* **59**, 123515 (1999); H. Asada, *Phys. Rev. D* **62**, 127301 (2000).