

Kuramoto-Sivashinsky 方程式における 射影演算子法の有効性

九州大学応用力学研究所 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)[†]

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

概要

射影演算子法では、射影演算子によって、不規則な振る舞いをするカオス運動が組織的な運動とランダムな運動にうまく分解されることを前提としている。この前提が正しいかを Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式をモデル方程式として調べた。長波長モードの振る舞いに関してはこの前提がよく成り立ち、短波長モードに関してもそれほど悪くないことがわかった。

さらに、平均量などの統計量を評価するときにはマルコフ近似がよく使われるので、これの妥当性も同様に KS 方程式を使って調べた。長波長モードの場合にはマルコフ近似がよく成立するが、短波長モードの場合にはマルコフ近似は適当でないことがわかった。

1 はじめに

2004 年の九州大学応用力学研究所の研究集会報告集に「射影演算子によって組織的な運動とランダムな運動とが首尾よく分解できているかという根本的な問題は問わない。ここでは、この分解はうまくいっていると仮定して、射影演算子を用いた理論から導いた統計量を数値計算の結果と比較して、その理論の妥当性を検討するという立場である。」[1] と書いた。本報告では、この根本的な問題を KS 方程式をモデル方程式として議論する。

第2節で説明するように、射影演算子法[2]では、射影演算子を使って与えられた常微分方程式を一般化されたランジュバン方程式に変形する。この数式変形は厳密である。しかし、先に述べた前提である組織的な運動とランダムな運動への分解がうまくいっていないと、一般化されたランジュバン方程式に物理的な意味がなくなり、そのような方程式をもとにして議論を進めても実りある結果は期待できない。本報告では射影演算子によるカオス運動の分解が期待通りになっているかを

[†]okamura@riam.kyushu-u.ac.jp

以下の二つの時間相関関数を比較して調べる．つまり，カオス運動自身の時間相関と射影演算子によってカオス運動から組織的な運動が取り除かれた（ランダムな運動とされている）残りの運動の時間相関を比較する．そして，ランダムな運動の相関時間がカオス運動の相関時間よりはるかに短いならば，射影演算子によるカオス運動の分解が期待通りになっているといえる．

もう一つ調べたことはマルコフ近似の妥当性である．一般化されたランジュバン方程式には，(6)の右辺第1項のように記憶関数と呼ばれる関数 $\Gamma_n(t)$ を含んだ積分項がある．統計量，例えば，相関関数 $K_n(t)$ を(7)から具体的に評価しようとする，マルコフ近似のほかに有効な方法があまり見当たらないので，右辺第1項を評価するためにマルコフ近似（記憶関数 $\Gamma_n(t)$ のデルタ関数近似）を使わざるを得ない．[3]このマルコフ近似がどういう場合に妥当性をもっているかをKS方程式を使って調べる．

もし上記の二つの仮定（射影演算子による組織的な運動とランダムな運動への分解，マルコフ近似）の妥当性がKS方程式において認められたら，ナビエ・ストークス方程式でもこの二つ仮定の妥当性が期待でき，射影演算子法をナビエ・ストークス方程式に適用しようという一つの動機付けとなる．

2 一般化されたランジュバン方程式の導出

KS方程式

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0,$$

は比較的簡単な方程式であるにもかかわらず，その解は時間空間的に複雑な振る舞いを示すので，乱流の統計理論を検証するためのモデル方程式として好ましい．ここでは，一様乱流を対象とするので，周期 $2L$ の周期境界条件 $u(x, t) = u(x + 2L, t)$ のもとでKS方程式を扱う． N 次の高調波で打ち切ったFourier級数展開を

$$u(x, t) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-N}^N \hat{u}_n(t) e^{in\pi x/L}, \quad \hat{u}_n(t) = \int_{-L}^L u(x, t) e^{-in\pi x/L} dx,$$

とすると, (2) の Fourier 変換は

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = L_n \hat{u}_n(t) + N_n(t), \quad (1)$$

となる. ここで, 線形項の係数 L_n , 非線形項 $N_n(t)$ は

$$L_n = k_n^2 - k_n^4, \quad N_n(t) = -\frac{i\epsilon}{2\pi} \sum_{j=-N}^N k_j \hat{u}_{n-j}(t) \hat{u}_j(t), \quad k_n \equiv n\epsilon, \quad \epsilon \equiv \frac{\pi}{L},$$

である. 射影演算子 $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ を満たす演算子なので, さまざまな形が考えられるが, 一般化されたランジュバン方程式を導きたいので, 射影演算子 $\mathcal{P}$ として線形空間 $\hat{u}_j$ に射影する演算子

$$\mathcal{P}f(\hat{u}, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N \langle f(\hat{u}, t) \hat{u}_m^* \rangle I_{mn} \hat{u}_n,$$

$$\mathcal{Q} \equiv 1 - \mathcal{P}, \quad I_{mn} \equiv \left[\langle \hat{u} \hat{u}^\dagger \rangle^{-1} \right]_{mn}, \quad \hat{u}_n \equiv \hat{u}_n(0),$$

を選ぶ [2]. ここで, $*$ は複素共役, † は転置, 複素共役である.

射影演算子を使って, 非線形項 $N_n(t)$ を以下のように分解する.

$$N_n(t) = \sum_{j=-N}^N \Omega_{nj} \hat{u}_j(t) - \sum_{j=-N}^N \int_0^t \Gamma_{nj}(s) \hat{u}_j(t-s) ds + r_n(t), \quad (2)$$

$$\Omega_{nj} \equiv \sum_{l=-N}^N \langle N_n \hat{u}_l^* \rangle I_{lj}, \quad r_n(t) \equiv e^{\mathcal{Q}\Lambda t} \mathcal{Q} N_n.$$

$$\Gamma_{nj}(t) \equiv - \sum_{l=-N}^N \langle [\Lambda r_n(t)] \hat{u}_l^* \rangle I_{lj} = \sum_{l=-N}^N \langle r_n(t) r_l^* \rangle I_{lj}. \quad (3)$$

ここで, 時間発展演算子 Λ は

$$\Lambda \equiv \sum_{n=-N}^N [N_n + L_n \hat{u}_n] \frac{\partial}{\partial \hat{u}_n}, \quad N_n(t) = e^{\Lambda t} N_n,$$

である. (2) を導出するときに, 恒等式

$$e^{t\Lambda} = \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} \mathcal{P} \Lambda e^{s\mathcal{Q}\Lambda} ds + e^{t\mathcal{Q}\Lambda}, \quad (4)$$

を使っている．(2)を(1)に代入すると， $\hat{u}_n(t)$ の時間発展方程式は以下のような一般化されたランジュバン方程式

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = L_n \hat{u}_n(t) + \Omega_n \hat{u}_n(t) - \int_0^t \Gamma_n(s) \hat{u}_n(t-s) ds + r_n(t), \quad (5)$$

となる．ここで，一様乱流の仮定をしている． $\Omega_n = \Omega_{nn}$, $\Gamma_n(t) = \Gamma_{nn}(t)$ ．さらに定常性の仮定とKS方程式の対称性を使うと， $L_n + \Omega_n = 0$ となるので，(5)は

$$F_n(t) \equiv \frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = - \int_0^t \Gamma_n(s) \hat{u}_n(t-s) ds + r_n(t), \quad (6)$$

と簡単化される． $F_n(t)$ は不規則な振る舞いをするカオス運動である．(6)の右辺の第1項はカオス運動 $F_n(t)$ から射影演算子によって取り出された組織的な運動であると思われる項であり，記憶項と呼んでいる．第2項はカオス運動 $F_n(t)$ から，この組織的な運動を取り除いた残りの運動で，本質的にランダムな運動だけに関係すると思われる項である．ここで，(6)を導くときに，統計的一様性，定常性以外は仮定していないことに注意する．

(5)より， $\hat{u}_n(t)$ の時間相関関数 $K_n(t)$ に関する方程式

$$\frac{dK_n(t)}{dt} = - \int_0^t \Gamma_n(s) K_n(t-s) ds, \quad (7)$$

が得られる．ここで

$$K_n(t) = \langle \hat{u}_n(t) \hat{u}_n^* \rangle,$$

である．マルコフ近似とは，時間相関関数 $K_n(t)$ の相関時間に比べて， $\Gamma_n(t)$ の相関時間が無視できるくらい小さいとする近似である．つまり，

$$\int_0^t \Gamma_n(s) K_n(t-s) ds \approx K_n(t) \int_0^\infty \Gamma_n(s) ds, \quad (8)$$

のことである．したがって， $K_n(t)$ と $\Gamma_n(t)$ の相関時間を比べることによって，マルコフ近似の妥当性を評価することができる．

3 数値計算の結果

(6)の分解において，カオス運動 $F_n(t)$ から組織的な運動がうまく取り出せているかどうかを調べるために， $F_n(t)$ と $r_n(t)$ についてのそれぞれ

の相関関数 $\langle F_n(t)F_n^* \rangle$ と $\langle r_n(t)r_n^* \rangle$ を比較する． $F_n(t)$ から組織的な運動がうまく取り出せている場合には， $r_n(t)$ の相関時間は $F_n(t)$ の相関時間より，はるかに短いはずである．

ランダムな運動，組織的な運動という正確でない言葉使いについてコメントしておこう．ランダムな運動とは，本来，相関時間が有限となる運動のことである．そうするとカオス運動 $F_n(t)$ はもちろんランダムな運動である．そればかりでなく，「組織的」な運動 $\int_0^t \Gamma_n(s)\hat{u}_n(t-s)ds$ までもランダムな運動である．ただし，このランダムな運動の相関時間は長い．したがって，前提条件をより正確に表現すると「射影演算子によって，ランダムな運動 $F_n(t)$ から，相関時間の長いランダムな運動を取り除くことができ，その残りの運動が相関時間の短いランダムな運動 $r_n(t)$ となる」とすべきである．しかし，以下では相関時間の長いランダムな運動を「組織的な運動」と呼び，相関時間の短いランダムな運動を単に「ランダムな運動」と呼ぶ．

$\langle F_n(t)F_n^* \rangle$ はKS方程式の数値シミュレーションから求めることが可能である．一方， $\langle r_n(t)r_n^* \rangle$ は数値シミュレーションから直接求められないが，(3)の

$$\langle r_n(t)r_n^* \rangle = K_n \Gamma_n(t), \quad K_n = \langle \hat{u}_n \hat{u}_n^* \rangle,$$

という関係式を使うと $\Gamma_n(t)$ から評価できる．記憶関数 $\Gamma_n(t)$ の数値的評価は，(4)から導出できる関係式

$$\Gamma_n(t) = \Phi_n(t) - \int_0^t \Gamma_n(s)\phi_n(t-s)ds, \quad (9)$$

を使う．ここで，

$$\Phi_n(t) = \frac{\langle F_n(t)F_n^* \rangle}{K_n} - \frac{L_n^2 K_n(t)}{K_n}, \quad \phi_n(t) = \frac{L_n K_n(t)}{K_n} + \frac{\langle F_n(t)\hat{u}_n^* \rangle}{K_n},$$

である．(9)の $\Gamma_n(t)$ 以外の関数 $\Phi_n(t)$, $\phi_n(t)$ は $F_n(t)$ や $\hat{u}_n(t)$ の相関関数なので，数値シミュレーションから求められる．したがって， $\Phi_n(t)$, $\phi_n(t)$ が与えられているので，(9)より反復法によって， $\Gamma_n(t)$ を求めることができる．すると $\langle r_n(t)r_n^* \rangle$ を数値的に評価することが可能となる．

数値計算の条件を簡単に述べておこう．KS方程式を数値的に解くために，時間刻み0.1の4次のルンゲ・クッタ法と擬スペクトル法を用い

た．フーリエ変換の打ち切り次数は $N = 2^9$ ．周期は $2L = 500$ ．初期条件はすべてのモードの大きさを 10^{-5} とした．相関関数 $K_n(t)$ は

$$K_n(t) = \langle \hat{u}_n(t) \hat{u}_n \rangle = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \hat{u}_n(t + s) \hat{u}_n(s) ds$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \hat{u}_n(t + T_0 + 40i) \hat{u}_n(T_0 + 40i), \quad 0 \leq t \leq 40,$$

から計算した．ここで， $T_0 = 1000$ ， $T = 10^6$ とした．これは $M = (T - T_0)/40 \approx 3 \times 10^4$ のアンサンブル数に対応する．

まずはじめにエネルギースペクトルを図1に示しておく．次節以降に $n = 5$ と $n = 55$ のモードについての結果を示す． $n = 5$ は波数 $k = 0.06$ ， $n = 55$ は波数 $k = 0.69$ に対応している．それぞれ，長波長モード，短波長モードと呼ぶことにする．長波長モードの相関時間は長く，短波長モードの相関時間は短い． $n = 55$ の短波長モードはエネルギースペクトルのピークに対応しているので， $n = 55$ の短波長モードは揺らぎ成分（乱れ成分）に関わるモードである．

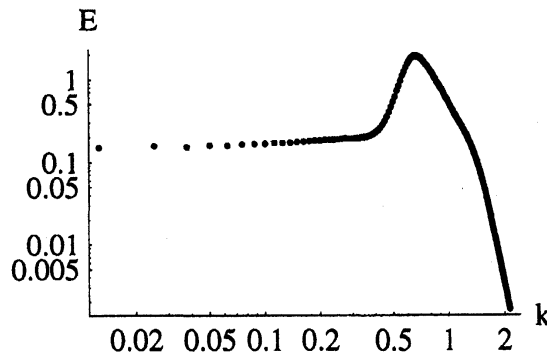


図 1: エネルギースペクトル．

3.1 組織的な運動とランダムな運動への分解

3.1.1 $n = 5$ （長波長モード）の場合

KS方程式(6)で，長波長モードの代表として $n = 5$ の場合を考察する．カオス運動の相関関数 $\langle F_5(t) F_5^* \rangle$ とランダムな運動の相関関数 $\langle r_5(t) r_5^* \rangle$ の結果を図2に示す． $F_5(t)$ はゆっくり変動する成分を含んでいるので，

その相関時間は長く、有限ではあるが、少なくとも 40 以上である．一方、 $r_5(t)$ の相関関数 $\langle r_n(t)r_n^* \rangle$ は $t > 15$ でほとんどゼロとなっていて、相関時間は短い．つまり、射影演算子によって、相関時間が 15 以上のゆっくり変動する成分がうまく取り除かれていることがわかる．

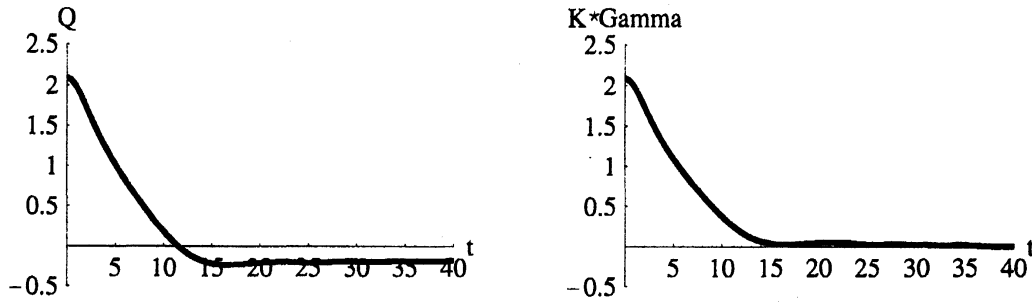


図 2: 左図は $F_5(t)$ に関する時間相関 $Q_5(t) = \langle F_5(t)F_5^* \rangle$ ，右図は $r_5(t)$ に関する時間相関 $K_5\Gamma_5(t) = \langle r_5(t)r_5^* \rangle$ ．

カオス運動 $F_5(t)$ ，射影演算子によって取り除かれた部分である組織的な運動 $\int_0^t \Gamma_5(s)\hat{u}_5(t-s)ds$ ，取り除かれた後の残り部分であるランダムな運動 $r_5(t)$ の時間変動を図 3 に示す．三つの運動は (6) の関係式で結ばれていることに注意する．図を見ただけでは，カオス運動 $F_5(t)$ とランダムな運動 $r_5(t)$ の違いはわからないが，中図は射影された組織的な運動の大きさが $F_5(t)$ と同程度（数分の 1）であることを示している．

3.1.2 $n = 55$ （短波長モード）の場合

次に，短波長モードの代表として $n = 55$ の場合を考察する．カオス運動の相関関数 $\langle F_{55}(t)F_{55}^* \rangle$ とランダムな運動の相関関数 $\langle r_{55}(t)r_{55}^* \rangle$ の結果を図 4 に示す． $\langle F_{55}(t)F_{55}^* \rangle$ の相関時間は長波長モードに比べるとはるかに短く，相関関数は $t > 25$ でほとんどゼロである． $n = 5$ の場合は，その相関関数は $t = 40$ でゼロにならなかったことと比較すると，カオス運動 $F_{55}(t)$ は $F_5(t)$ のようにゆっくり変動する成分をほとんど含んでいないことがわかる．一方， $r_{55}(t)$ の相関関数は $r_5(t)$ の相関関数と同じ程度で減衰し，両者とも $t > 15$ でほとんどゼロとなっている． $F_{55}(t)$ にはそもそも非常にゆっくり変動する成分が含まれていないので，射影演算子によって， $n = 5$ の場合のように非常にゆっくり変動する成分が

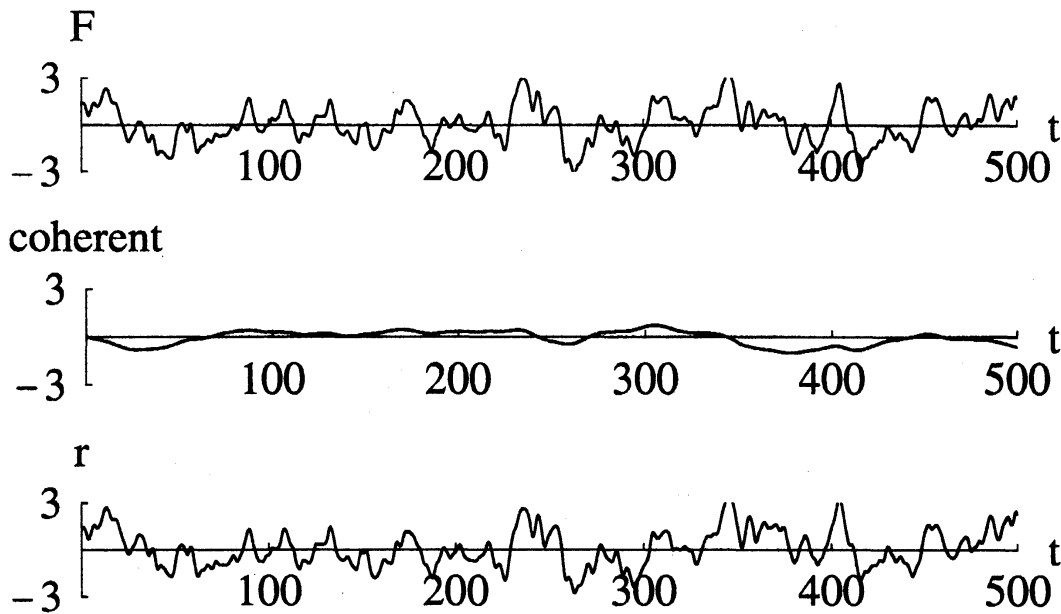


図 3: 上図は $F_5(t)$, 中図は $\int_0^t \Gamma_5(s) \hat{u}_5(t-s) ds$, 下図は $r_5(t)$ の時間変動.

うまいこと取り除かれることはない. しかし, 相関時間が10から25程度の組織的な運動は比較的取り除かれている. そのうちの相関時間が15から25程度の組織的な運動はほぼ取り除かれている.

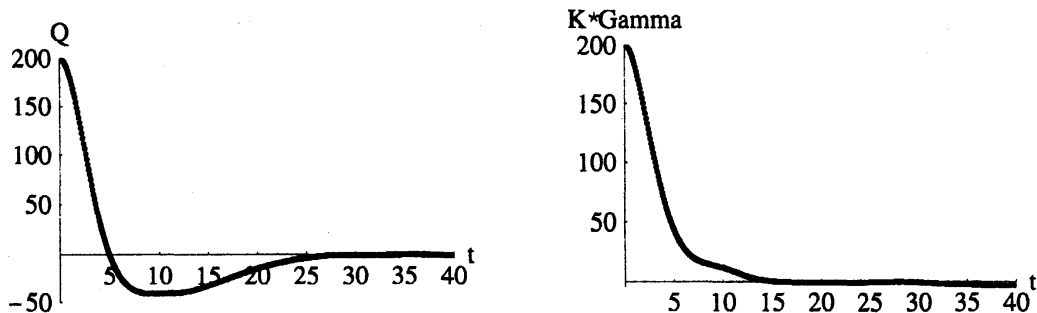


図 4: 左図は $F_{55}(t)$ に関する時間相関 $Q_{55}(t) = \langle F_{55}(t) F_{55}^* \rangle$, 右図は $r_{55}(t)$ に関する時間相関 $K_{55}\Gamma_{55}(t) = \langle r_{55}(t) r_{55}^* \rangle$.

カオス運動 $F_{55}(t)$, 射影演算子によって取り除かれた部分である組織的な運動 $\int_0^t \Gamma_{55}(s) \hat{u}_{55}(t-s) ds$, 取り除かれた後の残り部分であるランダムな運動 $r_{55}(t)$ の時間変動を図5に示す. 図を見ただけでは, カオス運動 $F_{55}(t)$ とランダムな運動 $r_{55}(t)$ の違いはわからないが, 中図は射影された組織的な運動がカオス運動 $F_{55}(t)$ と同程度の大きさであることを

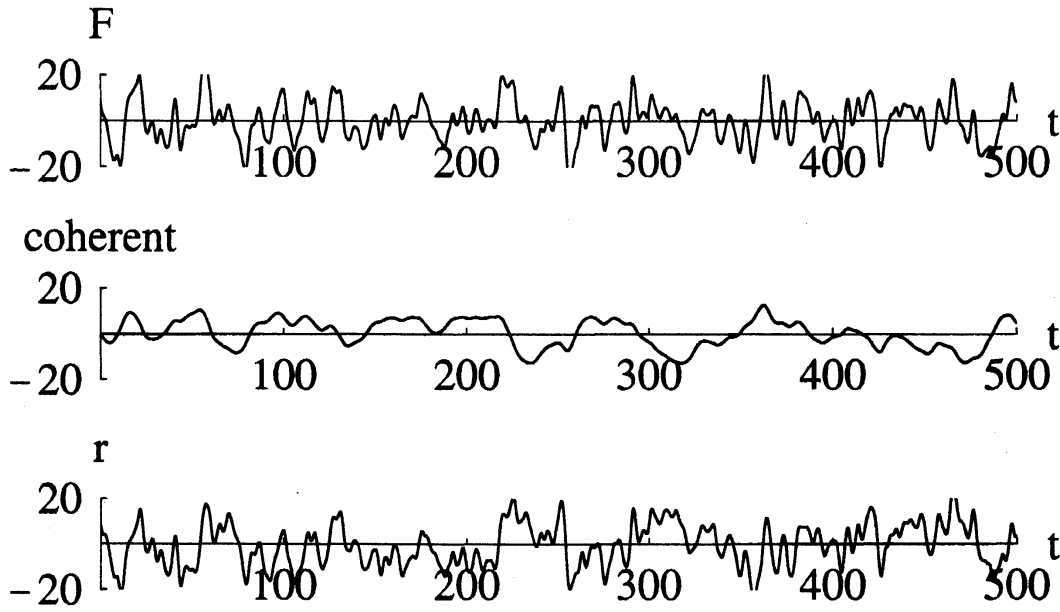


図 5: 上図は $F_{55}(t)$, 中図は $\int_0^t \Gamma_{55}(s) \hat{u}_{55}(t-s) ds$, 下図は $r_{55}(t)$ の時間変動.

示している.

3.2 マルコフ近似

マルコフ近似とは (8) より

$$\int_0^t \Gamma_n(s) K_n(t-s) ds \approx K_n(t) \int_0^\infty \Gamma_n(s) ds, \quad (10)$$

が成立することである. $\Gamma_n(t)$ が

$$\Gamma_n(t) = \delta(t) \int_0^\infty \Gamma_n(s) ds,$$

のようにデルタ関数で表現できれば, (10) は厳密に成り立つ. したがって, $\Gamma_n(t)$ の相関時間が $K_n(t)$ の相関時間よりはるかに小さいならば, マルコフ近似はよい近似となる. 以下に $n=5$ の長波長モードの場合と $n=55$ の短波長モードの場合の結果を示す.

初めに, $n=5$ の長波長モードを考察する. 規格化した相関関数 $K_5(t)$ と $\Gamma_5(t)$ の結果を図 6 に示す. $K_5(t)$ はゆっくり変動するモード $\hat{u}_5(t)$ の相関関数であるから, 相関時間は長く, 40 以上である. 一方, $\Gamma_5(t)$ の相

関時間は15程度で，図6からもわかるように， $\Gamma_5(t)$ のデルタ関数近似は妥当である．

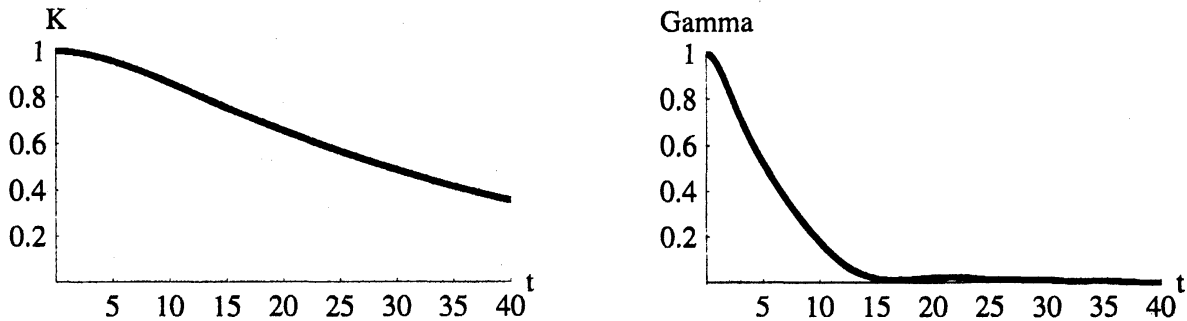


図 6: $n = 5$ (長波長モード)．左図は規格化した相関関数 $K_5(t)$ ，右図は規格化した記憶関数 $\Gamma_5(t)$ ．

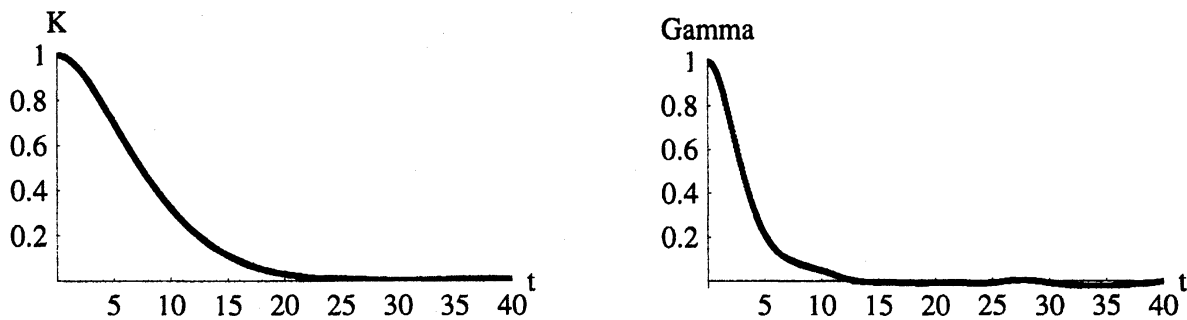


図 7: $n = 55$ (短波長モード)．左図は規格化した相関関数 $K_{55}(t)$ ，右図は規格化した記憶関数 $\Gamma_{55}(t)$ ．

次に， $n = 55$ の短波長モードを考察する．規格化した相関関数 $K_{55}(t)$ と $\Gamma_{55}(t)$ の結果を図7に示す． $K_{55}(t)$ は揺らぎに対応するモード $\hat{u}_{55}(t)$ の相関関数であるから，相関時間は短く，20程度である．一方， $\Gamma_{55}(t)$ の相関時間も15程度と $K_{55}(t)$ の相関時間と同程度である．図7からもわかるように， $\Gamma_{55}(t)$ のデルタ関数近似はよろしくない．

4 まとめ

射影演算子によって，不規則な振る舞いをするカオス運動が組織的な運動とランダムな運動に首尾よく分解されるかどうかをKS方程式を

モデル方程式として調べた． $n = 5$ の長波長モードの場合には，射影演算子によって相関時間が15以上のゆっくり変動する成分が完全に取り除かれていることがわかった． $n = 55$ の短波長モードの場合には， $n = 5$ の場合のように完全に取り除かれていることはないが，相関時間が10から25程度の組織的な運動は比較的取り除かれている．そのうちの相関時間が15から25程度の組織的な運動はほぼ取り除かれている．

マルコフ近似については， $n = 5$ の長波長モードの場合には適用可能であるが， $n = 55$ の短波長モードの場合には適用不可能であることがわかった．

段差の付いた境界条件の下での平均量の評価 [3] がうまくいった理由を考察してみよう．この場合には，乱れ成分の特徴的な波長が9程度であるのに対して，平均量の特徴的な長さは100程度の大きさとなっていて，平均量の特徴的な長さの方が乱れ成分の特徴的な波長に比べてはるかに大きい．波長が100の波数は $k = 2\pi/100 \approx 0.06$ である．これは上記の $n = 5$ の長波長モードの場合に対応する．つまり，射影演算子によって，不規則な振る舞いをするカオス運動が組織的な運動とランダムな運動に首尾よく分解されているし，マルコフ近似も成り立っている場合である．この状況は段差の付いた境界条件の場合でも同様であると思われる．したがって，射影演算子によって，精度よく平均量の評価ができたわけである．

以上のことから，平均量と乱れ成分のスケールの分離ができていれば，射影演算子法は有効な方法であることがわかる．NS乱流の場合には両者のスケールの分離は明確でないが，本報告の結果は乱流の平均量の評価に射影演算子法を試す動機付けとなっている．

参考文献

- [1] 岡村 誠：九大応力研研究集会報告 (2004) 16ME-S4, 9.
- [2] H. Mori and H. Fujisaka: Phys. Rev. E (2001) Vol. 63, 026302.
- [3] Y. Kitahara and M. Okamura: Phys. Rev. E (2004) Vol. 70, 056210.