

有界可換 BCK-代数における, BCK-代数としてのイ デアルと演算 $\wedge, \vee$ に関する束としてのイデアルの関係 について

熊澤 昌明

箕面自由学園高等学校

1 はじめに

BCK-代数は、井関清志先生によって普遍代数の研究に導入された。

井関先生は 1960 年代より、数学を学ぶ市民サークルである「数学基礎論の会」(この会は、初め土曜サークルと呼ばれていた。その後他の研究者から神戸スクールと論文の中で呼ばれている。)を指導された。「数学基礎論の会」のメンバーは主に命題論理について研究をした。彼らは、その研究成果を日本学士院に多数発表し続けた。その中で、1966 年に今井泰之と井関清志の両先生は、次の論文 [2] の中で BCK-代数を定義した。 “On axiom system of propositional calculi XIV”.

BCK-代数とは、次の 2 つの概念の一般化を意図して定義したものである。その 2 つの概念とは、1 つは演算として集合差のみを持つ集合算であり、もう 1 つは含意のみを持つある種の命題計算である。

なお、B、C、K という文字は次の 3 つの推論規則を意味しており、それぞれ

$$(B) \quad CC_{pq}CC_{qr}C_{pr} \quad ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$$

$$(C) \quad C_pCC_{pqq} \quad (p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q))$$

$$(K) \quad C_pC_{qp} \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$$

である。

ここで、BCK-代数の定義をあらためて述べておく。

定義 (Imai, Iséki [2], Iséki, Tanaka [5])

定数 0 と演算 $*$ を持つ代数 $X = \langle X; *, 0 \rangle$ が BCK-代数であるとは、 X の任意の元 x, y, z に対して、次の (I) ~ (VI) の条件を満たすものとする。

$$(I) \quad (x * y) * (x * z) \leq z * y,$$

$$(II) \quad x * (x * y) \leq y,$$

$$(III) \quad x \leq x,$$

$$(IV) \quad 0 \leq x,$$

$$(V) \quad x \leq y, y \leq x \text{ ならば } x = y,$$

$$(VI) \quad x \leq y \text{ である時, その時に限り } x * y = 0.$$

1974 年に、井関先生は論文 [3] において、本格的に BCK-代数の研究を始めた。その後、多くの数学者によって BCK-代数の研究は深められている。

2 BCK-代数と束

ここでは、特別な BCK-代数がある種の束となっていることを述べたい。

1975 年に、田中昭太郎先生は論文 [6] において、BCK-代数に次の条件 (VII) を加えた代数と同値な代数を研究した。

$$(VII) \quad x \wedge y = y \wedge x \text{ ただし } x \wedge y = y * (y * x).$$

この代数は可換 BCK-代数と呼ばれている。田中先生は、可換 BCK-代数 $X = \langle X; *, 0 \rangle$ が演算 $\wedge$ に関して下半束となっていることを示した。つまり、可換 BCK-代数 $X = \langle X; \wedge, 0 \rangle$ において、 X の任意の元 x, y に関して $x \wedge y$ が下限となっていることを示した。

井関先生の論文 [3] には、有界 BCK-代数が定義されている。BCK-代数 X が有界であるとは、 X の中に最大元 1 の存在を仮定するものである。すなわち任意の元 $x \in X$ に対して、常に $x \leq 1$ が成り立っている。この仮定のもと、単項演算を $Nx = 1 * x$ で定義する。

1978 年には、井関、田中両先生は論文 [5] において、有界可換 BCK-代数 $X = \langle X; *, 0 \rangle = \langle X; \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ は、演算 $\wedge, \vee$ に関して束であることを示した。ただし、 $x \wedge y = y * (y * x)$, $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$ であり、任意の x, y に関して $x \wedge y$ が下限となり、 $x \vee y$ が上限となっている。

さらに、演算 N に関して、次のド・モルガンの法則の類似 $Nx \vee Ny = N(x \wedge y)$, $Nx \wedge Ny = N(x \vee y)$ と 2 重否定の原理 $NNx = x$ が成り立つことを示している。

1979 年、T. トラチェック氏は論文 [7] において、有界可換 BCK-代数 X は束の分配法則を満たすことを示した。すなわち、任意の 3 元 $x, y, z \in X$ に対して、次の等式が成り立つ。

$$z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y), z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$$

最小元 0 、最大元 1 を持って、2 重否定の原理を満たし、ド・モルガンの法則をも満たす分配束をド・モルガン代数と呼んでいるが、有界可換 BCK-代数はド・モルガン代数となっている。

3 BCK-代数のイデアルと束のイデアル

この節において、次の問題を考える。

問題 BCK-代数におけるイデアルは束のイデアルと一致しているのか？

まず、井関先生の論文 [4] より BCK-代数におけるイデアルの定義を与える。

定義.1 (BCK-代数のイデアル)

BCK-代数 X の空でない部分集合 A が BCK-代数のイデアルであるとは、次の (1), (2) を満たすものとする。

- (1) $0 \in A$,
- (2) $y * x \in A, x \in A$ ならば $y \in A$ 。

次に、束におけるイデアルの定義を述べる。

定義.2 (束のイデアル; Birkhoff [1])

束 L の空集合でない部分集合 I が束のイデアルであるのは、次の①, ②を満たすものとする。

- ① $a \in I, x \in L, x \leq a$ ならば $x \in I$,
- ② $a \in I, b \in I$ ならば $a \vee b \in I$ 。

2 節で述べたことだが、改めて確認する。有界可換 BCK-代数はド・モルガン代数であるので、分配束である。そこで、ここでは有界可換 BCK-代数における井関のイデアルが、束の意味でもイデアルとなっていることを示す。

定理

$X = \langle X; *, 0 \rangle$ が有界可換 BCK-代数ならば演算 $*$ に関する井関のイデアル I は、演算 $\wedge, \vee$ に関する束のイデアルでもある。

証明

$X = \langle X; *, 0 \rangle$ を有界可換 BCK-代数とし、 I を X の井関のイデアルとする。 X が有界可換 BCK-代数であれば 2 節で述べたように $X = \langle X; \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ は分配束である。目標は、井関のイデアル I が分配束 X のイデアルでもあることを示せばよい。

すなわち、次の①,②の条件を満たすことを示せばよい。

① $x \in I, z \in X, z \leq x$ ならば $z \in I$,

② $x \in I, y \in I$ ならば $x \vee y \in I$ 。

まず、①を示す。

$x \in I, z \in X$ のとき、 $z \leq x$ とする。

上の仮定より、 $x \in X$ かつ $z * x = 0 \in I$ なので、 I が X の井関のイデアルであることから、 $z \in I$ である。これにより①は示された。

次に②を示す。

まず、有界可換 BCK-代数 X において、これは後の補題で示すが、任意の 2 元 $x, y \in X$ に対して、等式 $\{(x \vee y) * y\} * x = 0$ が成立する。

ここで、 $x, y \in I$ とする。 $\{(x \vee y) * y\} * x = 0$ かつ $x \in I$ であり、 I は井関のイデアルであるので $(x \vee y) * y \in I$ となる。さらに同様に、 $(x \vee y) * y \in I$ かつ $y \in I$ より $x \vee y \in I$ である。これにより②は示された。

よって、定理の証明はできた。

次に、残された補題を示す。

補題

X を有界可換 BCK-代数とすると、 X の任意の 2 元 x, y に対し、次の等式

$$\{(x \vee y) * y\} * x = 0$$

が成り立つ。

証明

有界可換 BCK-代数 X において、任意の 2 元 x, y に対して、次の等式が成り立つ。

$$\textcircled{a} \quad NNx = x$$

$$\textcircled{b} \quad x * y = Ny * Nx$$

この①,②を用いると、次が得られる。

$$\begin{aligned} (x \vee y) * y &= N(Nx \wedge Ny) * y \\ &= Ny * NN(Nx \wedge Ny) \\ &= Ny * (Nx \wedge Ny) \\ &= Ny * \{Ny * (Ny * Nx)\} \\ &= Ny * \{Ny * (x * y)\} \\ &\leq x * y \end{aligned}$$

よって、任意の 2 元 $x, y \in X$ に対して、 $\{(x \vee y) * y\} * x = 0$ が成り立つ。

謝辞

鳴門教育大学、成川公昭教授には、ご専門の分野でないにもかかわらず、内容をお聞きいただき、有意義なご助言を頂きました。これに感謝をし、ここにお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] Birkhoff, G., *Lattice Theory (Third edition)*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1967)
- [2] Imai, Y. and Iséki, K., On axiom system of propositional calculi XIV, Proc. Japan Acad. 42, (1966), 19-21
- [3] Iséki, K., Some Properties of BCK-algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ., vol.2, (1974), 193-201
- [4] Iséki, K., On Ideals in BCK-algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ. vol.3, (1975), 1-12
- [5] Iséki, K. and Tanaka, S., An Introduction of the theory of BCK-algebras, Math. Japonica, 23, (1978), no.1, 1-26
- [6] Tanaka, S., A new class of algebra, Math. Ssm. Notes Kobe Univ., vol.3, (1975), 37-43
- [7] Traczyk, T., On the variety of bounded commutative BCK-algebras, Math. Japonica, 24, (1979), no.3, 283-292