

球面上の involution の拡張について

北大 神島芳宣

Introduction.

Z_{2q} を order $2q$ の cyclic group とする, 球面 S^{2n+1} 上に free な involution T が与えられた時, S^{2n+1} 上に free な Z_{2q} -action T' が存在して, Z_{2q} の subgroup Z_2 に制限した時の action, 即ち $T'|_{Z_2} = T^{q_2}$ が T に一致する時, 球面 S^{2n+1} 上の free involution T は free Z_{2q} -action に拡張するという. この note において 2 次のことを示す.

定理. 球面 S^{2n+1} ($n \geq 1$) 上に, free P.l. (resp. topological) involution T が与えられた時, T は free P.l. (resp. topological) Z_{2q} -action に拡張できる. ここに q は任意.

証明の方法は次の通りである. $H = PL, Top$ とする. $\varphi_{HE}(P^{2n+1})$ を $2n+1$ -standard projective space P^{2n+1} 上の ε -homotopy structures の set とする, ここで $\varepsilon = k$ or S (homotopy or

single homotopy). $2n+1$ -standard lens space $L^{2n+1}(2q)$ に対し, 同様に $\mathcal{P}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(2q))$ とおく. Projection $P: P^{2n+1} \longrightarrow L^{2n+1}(2q)$ により q -fold covering map

$$P! : \mathcal{P}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(2q)) \longrightarrow \mathcal{P}H^{\varepsilon}(P^{2n+1})$$

が induce される. Involution T が S^{2n+1} 上に与えられた時,

$S^{2n+1}/T \in \mathcal{P}H^{\varepsilon}(P^{2n+1})$ であるから, 定理は $\text{Im } P! \ni S^{2n+1}/T$ を示すことである. このために Wall 群において定義される transfer map を用いて, surgery exact sequence から, 上のことを示すことができる.

1. Definition of transfer

G を finite group, H を G の subgroup とする. X^{2n-1} ($n \geq 3$) を smooth or p.l. manifold with $\pi_1(X) = G$, ν を X の stable normal bundle とする. $[M, f] \in \mathcal{P}H^{\varepsilon}(X)$ と $\rightarrow$ fix する. F を $\mathbb{Z}_n$ の $f^*\nu$ の stable framing とする. この時, Wall [7] の realization theorem により, $\alpha \in L_{2n}^{\varepsilon}(G)$ に対し, triad $(W, 2W, 2+W)$ がある map $F: (W, 2W, 2+W) \longrightarrow (X \times I, X \times 0, X \times 1)$ が存在して F は $\mathbb{Z}_n$ の $f^*\nu$ の stable framing F を extend する $\mathbb{Z}_n$ の $F^*(\nu \times I)$ の stable framing $\bar{F}$ をもち, 次の性質をみたす

- (1) $(2W, \bar{F}|_{2W}) = (M, f)$.
- (2) $F|_{2+W}$ は ε -homotopy equivalence,
- (3) $\mathcal{O}(F, W) = \alpha \in L_{2n}^{\varepsilon}(G)$.

$\tilde{X}$ を X の universal cover とする. $X_1 = \tilde{X}/H$ とおく.

次の pull-back diagram を考える.

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{F_1} & X_1 \times I \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ W & \xrightarrow{F} & X \times I \end{array}$$

明らかに F_1 は $Z_{W_1} \oplus F_1^*(V_1 \times I)$ の stable framing $\bar{F}_1$ を持つ, ことに V_1 は X_1 の stable normal bundle.

$$Z_+(X) = \theta(F_1) \in L_{2n}^{\varepsilon}(H) \text{ とおく.}$$

これは, X を与える normal cobordism のとり方によらないことがわかる.

Lemma 1.1. $X \in L_{2n}^{\varepsilon}(G)$ に対し, $X = \theta(F, W)$, ここで $(F|_{\partial W}, j|_{\partial W}) = (M, +)$. また $X = \theta(G, V)$, ここで $(G|_{\partial V}, j|_{\partial V}) = (X, \text{id})$ とする. この時, $Z_{\text{id}}(X) = Z_+(X)$ (Z_+ の definition は, $+$ の choice によらない).

Lemma 1.2. $Z_{\text{id}} : L_{2n}^{\varepsilon}(G) \longrightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(H)$ は homomorphism である.

Proofs of Lemmas 1.1 and 1.2 は [2] をみよ.

従って, 2 transfer $Z : L_{2n}^{\varepsilon}(G) \longrightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(H)$ を,

$$Z = Z_+ \text{ とおくと, well defined な homomorphism}$$

である.

Proposition 1.3. transfer $Z : L_{2n}^{\varepsilon}(G) \longrightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(H)$ は homo-

morphism である。

Remark 1.4. inclusion $i: H \hookrightarrow G$ は, Wall 群の homomorphism $i_*: L_{2n}^{\varepsilon}(H) \rightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(G)$ を induce する. この時, transfer map $\tau: L_2$ の次の性質が成り立つ (Conner-Floyd, Differentiable Periodic maps, p.54 参照).

『 $C(G)$ を G の center とする. もし $H \subset C(G)$ ならば,

$$\tau \cdot i_* (x) = (G:H) x \quad ; \quad L_{2n}^{\varepsilon}(H) \rightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(G) \rightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(H) \quad \square$$

証明は [2] 参照.

trivial map $\pi: G \rightarrow 1$ に対し, $\pi_*: L_n^{\varepsilon}(G) \rightarrow L_n(1)$

は onto であるから, reduced Wall 群 $L_n^{\varepsilon}(\widehat{G}) = \text{Ker } \pi_*$ とおくと,

$$L_n^{\varepsilon}(G) = L_n^{\varepsilon}(\widehat{G}) \oplus L_n(1) \quad \text{である.}$$

この時, 定理の証明のために, 次のことを証明する.

Lemma 1.5. $\tau: L_0^{\varepsilon}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow L_0(\mathbb{Z}_2)$ は onto (module $L_0(1)$) である.

Proof. $L_0(\mathbb{Z}_2) \cong 8\mathbb{Z} \oplus 8\mathbb{Z}$ である. 同型対応は

$$x = \theta(F, W) \longmapsto (I(W), I(\widehat{W})).$$

ここで $F: W \rightarrow \mathbb{P}^{4k+3} \times I$ は normal map ($k \geq 1$). $I(W)$ (resp.

$I(\widehat{W})$) は W (resp. $\widehat{W}$) の index, $\widehat{W}$ は W の universal cover.

$\mathbb{Z}_2$ の generator を T とする. $x \in L_0(\mathbb{Z}_2)$ の Atiyah-Singer invariant

$\partial(T, x)$ は定義より

$$(1) \quad \partial(T, x) = \text{Sign}(T, \widehat{W}) = 2I(W) - I(\widehat{W}).$$

$\widehat{\partial \pm W}$ の Atiyah-Singer invariant $\delta(T, \widehat{\partial \pm W})$ に対し, 次の成り立つ

$$(2) \quad \delta(T, X) = \delta(T, \widehat{\partial - W}) - \delta(T, \widehat{\partial + W}).$$

上の同型対応を用いるから, 次の成り立つ.

$$(3) \quad \delta(T, -) : L_0(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 8\mathbb{Z} \text{ は isomorphism であり}$$

, $\text{Ker } \delta = L_0(1) (\cong (I, 2I))$ である.

次に 3-complex projective space CP^3 に対し, [6] から, homotopy complex projective space HCP^3 が存在し, 次の (4) をみたす.

homotopy equivalence $f_i : HCP^3 \longrightarrow CP^3$ に対し, f_i を $CP^2 \subset CP^3$ 上 transverse regular にしたものを f_i' とする. 従って

$$f_i' : f_i'^{-1}(CP^2) = N \longrightarrow CP^2 \text{ は, (restricted) normal}$$

map. この時,

$$(4) \quad \theta(f_i') = 8i' \text{ for each } i' \in \mathbb{Z}.$$

Fibration $P : L^7(2q) \longrightarrow CP^3$ により, f_i を induce しやると,

$$(5) \quad g_i : L_i^7 \longrightarrow L^7(2q)$$

ここに, L_i^7 は homotopy lens space, g_i は ε -equivalence であり, $L^5(2q)$ 上 transverse regular, $g_i^{-1}(L^5(2q)) = L_i^5$, $g_i : L_i^5 \longrightarrow L^5(2q)$ は (restricted) normal map である. $\theta(g_i) = 0$ in $L_1(\mathbb{Z}_{2q})$ であるから, g_i は ε -homotopy equivalence $g_i' : L_i^{5'} \longrightarrow L^5(2q)$ に normally cobordant である. 「normal cobordism extension property」(see [4, p 45]) により, $g_i' : L_i^{5'} \longrightarrow L^5(2q)$ の normal cobordism を $g_i : L_i^7 \longrightarrow L^7(2q)$ の normal cobordism に拡張できる. 従って, g_i は normally

cobordant な $\mathcal{K}_i : L_i^7 \rightarrow L^7(2q)$ が存在して, $\mathcal{K}_i^{-1}(L^5(2q)) = L_i^{5'}$, $\mathcal{K}_i|_{L_i^{5'}} = g_i$ である. $N(L^5(2q))$ を $L^5(2q)$ の $L^7(2q)$

における tubular neighborhood とする. この時, normal map

$\mathcal{K}_i : L_i^7 \rightarrow L^7(2q)$ に対し, $\mathcal{K}_i|_{L_i^{5'}} : L_i^{5'} \rightarrow L^5(2q)$ は ε -equivalence

より, $\mathcal{K}_i$ の surgery obstruction $\mathcal{O}(\mathcal{K}_i)$ は, restriction

$$\mathcal{K}_i : L_i^7 - \text{int } N(L_i^{5'}) \longrightarrow L^7(2q) - \text{int } N(L^5(2q)) =$$

D^6XS^1 rel. boundary. の surgery obstruction に等しい, ここで

$N(L_i^{5'})$ は $N(L^5(2q))$ の $\mathcal{K}_i$ による pull-back とする. 従って,

$$\mathcal{O}(\mathcal{K}_i) = \mathcal{O}(\mathcal{K}_i|_{L_i^7 - \text{int } N(L_i^{5'})}) \in L_7(\mathbb{Z}) \cong L_6(1) \cong \mathbb{Z}_2.$$

一方, $\mathcal{O}(\mathcal{K}_i) = \mathcal{O}(g_i) = 0$ であるから, $\mathcal{K}_i|_{L_i^7 - \text{int } N(L_i^{5'})}$ から,

normal cobordism rel. boundary. が存在して,

$$\mathcal{K}_i : E \longrightarrow D^6XS^1 \text{ は homotopy-equivalence rel. boundary.}$$

である.

$$M_i^7 = E \cup N(L_i^{5'}) \text{ とするとき, map}$$

$$K : M_i^7 \longrightarrow L^7(2q) \text{ を}$$

$$K|_E = \mathcal{K}_i, \quad K|_{N(L_i^{5'})} = \mathcal{K}_i \text{ とおくことにより定義すると, } K$$

は ε -equivalence である. g_i から $\mathcal{K}_i$ の normal cobordism と $\mathcal{K}_i|_{L_i^7 - \text{int } N(L_i^{5'})}$ から $\mathcal{K}_i'$ の normal cobordism (rel. boundary) を合わせることによ

て, $g_i : L_i^7 \rightarrow L^7(2q)$ から, $K : M_i^7 \rightarrow L^7(2q)$ への normal

cobordism が存在する. それを $F : V \rightarrow L^7(2q) \times I$ とすると

$$\mathcal{O}(F, V) \in L_8^{\varepsilon}(\mathbb{Z}_{2q}) \text{ である. transfer } \tau \text{ により}$$

$2(\theta(F, V)) = \theta(F, V) \in L_8(\mathbb{Z}_2)$ である. ここに

$$\widehat{V}_1 = \widehat{L}_1^7 \cup \widehat{M}_1^7 \text{ である.}$$

(4) より, $\widehat{L}_1^7$ は HCP^3 を fiber として

$$(6) \quad \delta(T, \widehat{L}_1^7) = \delta(-1, HCP^3) = 82'.$$

また, homotopy projective space Q^{4k+3} に対し, Atiyah-Singer invariant $\delta(T, \widehat{Q}^{4k+3})$ は, Browder-Livesay invariant $\delta(Q^{4k+3})$ に等しい (例えば, [1] を参照). Browder-Livesay invariant が desuspension invariant であることに注意すると, 上の $\widehat{M}_1^7$ の construction により q -fold cover $\widehat{M}_1^7$ は, desuspend する homotopy projective space である (注. $(T, \widehat{M}_1^7)$ は double suspension である.). 故に,

$$(7) \quad \delta(T, \widehat{M}_1^7) = 0.$$

故に (2), (6) と (7) から,

$$\begin{aligned} \delta(T, 2(\theta(F, V))) &= \delta(T, \theta(F, V)) \\ &= \delta(T, \widehat{L}_1^7) - \delta(T, \widehat{M}_1^7) \\ &= 82'. \end{aligned}$$

故に, (3) より, $2: L_0^E(\mathbb{Z}_{2q}) \rightarrow L_0(\mathbb{Z}_2)$ は onto (modulo $L_0(1)$) である. 証明終り.

2 Surgery exact sequence.

[7] より, 次の surgery exact sequence がある. ここに

$H = 0$, PL, Top, $n \geq 2$ とする.

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} L_{2n+2}(Z_2) & \xrightarrow{w} & \mathcal{P}H(p^{2n+1}) & \xrightarrow{\eta} & [p^{2n+1}, G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_{2n+1}(Z_2) \\ \uparrow \scriptstyle Z & & \uparrow \scriptstyle P! & & \uparrow \scriptstyle P^* & & \\ L_{2n+2}^\varepsilon(Z_{2q}) & \xrightarrow{w} & \mathcal{P}H^\varepsilon(L^{2n+1}(Z_q)) & \xrightarrow{\eta} & [L^{2n+1}(Z_q), G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_{2n+1}^\varepsilon(Z_{2q}) \end{array}$$

ここで、 P^* は projection $P: p^{2n+1} \rightarrow L^{2n+1}(Z_q)$ により induce されたものである。定義より (2.1) は, commutative diagram である。

Lemma 2.2. $H=PL$ or Top に対し, $P^*: [L^{2n+1}(Z_q), G/H] \longrightarrow [p^{2n+1}, G/H]$ は onto である。

Proof. 任意の integer s に対し, $L^{2n+1}(s)$ を standard lens space とする. fibration $p: p^{2n+1} \longrightarrow CP^n$ に対し,

$$P^*: [CP^n, G/H] \longrightarrow [L^{2n+1}(s), G/H] \text{ が onto である}$$

この事実 (Lemma 14A.2 [7], p186 参照) から出る。

Remark 2.3. $L_{2n+2}(1) \subset L_{2n+2}(Z_s)$ の $\mathcal{P}H^\varepsilon(L^{2n+1}(s))$ における w の作用は, $n \equiv 0(2)$, $n \equiv 1(2)$ に対し, それぞれ Kervaire manifold, Milnor manifold を $\mathcal{P}H^\varepsilon(L^{2n+1}(s))$ の element に adding することであるから, $H=PL$ or Top ならば, w の作用は trivial である。

Lens space $L^{4k+3}(Z_q)$ ($k \geq 1$) の normal map に対し, 次の成り立ち。

Lemma 2.4. natural projection $d: Z_{2q} \longrightarrow Z_2$ は, isomorphism $d: L_3^\varepsilon(Z_{2q}) \cong Z_2 \longrightarrow L_3(Z_2) \cong Z_2$ を induce

する。さしに, $H=0$, PL or Top に対し, 次の commutative diagram が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} [P^{4k+3}, G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_3(Z_2) \\ \uparrow P^* & & \uparrow d \\ [L^{4k+3}(Z_q), G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_3^E(Z_{2q}) \end{array}$$

Proof は [2] 参照.

3 定理の証明

S^{2n+1} 上に free involution T が与えられたとする. この時, 3つの cases に分けて証明する.

Case 1. $n=1$. [5] により S^3 上の free involution T は antipodal map に conjugate である. 従って T は, S^3 上の free Z_2 -action に拡張する.

Case 2. $n \equiv 0(2)$. S^{4k+1} ($k \geq 1$) 上に, free involution T が与えられたとする. Lemma 2.2 より $\eta(S^{4k+1}/T) \in \text{Imp}^*$ である.

$L_1^E(Z_{2q}) = 0$ であるから, $\varphi H^E(L^{4k+1}(Z_{q,1}))$ の element L^{4k+1} が存在

して $\eta(P!(L^{4k+1})) = \eta(S^{4k+1}/T)$ である.

$L_2(1) = L_2(Z_2) \cong Z_2$ であるから, Remark 2.3 より,

$$S^{4k+1}/T \cong P!(L^{4k+1}).$$

Case 3. $n \equiv 1(2)$. S^{4k+3} ($k \geq 1$) 上に free involution T が与えられたとする. Lemma 2.4 を使って, Case 2 と同様に, $\varphi H^E(L^{4k+3}(Z_{q,1}))$

の element L^{4k+3} が存在し、 $\eta(P!(L^{4k+3})) = \eta(S^{4k+3}/T)$

が成り立つ。従って、 2 $x \in L_0(Z_2)$ が存在し、

$$\omega(x, P!(L^{4k+3})) = S^{4k+3}/T \quad \text{である。}$$

Lemma 1.5 より $y \in L_0^\varepsilon(Z_{2q})$ が存在し、 $2(y) = x$ (modulo $L_0(1)$)

である。 $x - 2(y) = x_0$, $x_0 \in L_0(1)$ とおく、

$$\begin{aligned} S^{4k+3}/T &= \omega(2(y) + x_0, P!(L^{4k+3})) \\ &= \omega(2(y), \omega(x_0, P!(L^{4k+3}))) \\ &= \omega(2(y), P!(L^{4k+3})) \quad \text{by Remark 2.3.} \\ &= P! \omega(y, L^{4k+3}) \quad \text{by commutativity of (2.1).} \end{aligned}$$

$\omega(y, L^{4k+3}) = L_1^{4k+3} \in \mathcal{H}^\varepsilon(L^{4k+3}(Z_q))$ は homotopy lens space.

故に、 $S^{4k+3}/T = P!(L_1^{4k+3})$.

証明 終り)

Corollary 3.1. (川久保 [3]). $2n+1$ -topological (simple)

homotopy lens space $L_{\frac{2n+1}{2}}(Z_q)$ を triangulate できないものが存在する。ここに $n \geq 2$.

Proof. $H = PL, Top$ に対する $[P^{2n+1}, G/H]$ の計算に

より

$$\mathcal{H} PL(P^{2n+1}) \xrightarrow{\text{forget, max.}} \mathcal{H} Top(P^{2n+1}) \xrightarrow{\psi} Z_2 \rightarrow 0$$

なる exact sequence (see [5]) がある。 ψ は obstruction map. これより

り出る。

References

- [1] Hirzebruch-Jänich, *Involutions and Singularities*, Proc. Int. Colloq. on Algebraic Geometry, Bombay 1968.
- [2] Y. Kamishima, *Extension of involutions on spheres*, Preprint.
- [3] K. Kawakubo, *Proc. of the Second Conference 1971, Part I*, Springer.
- [4] López de Medinaceli, *Involutions on Manifolds*, Springer 1971.
- [5] G.R. Livesay, *Fixed point free involutions on the 3-spheres*, Ann. of Math. 72 603-611 (1960)
- [6] Montgomery-Yang, *Proc. of the Conference on Transformation Groups 1955-1962* (1969).
- [7] C.T.C. Wall, *Surgery on Manifolds* Academic Press. 1970.