

非一様媒質中におけるソリトンの分裂

大阪高専 小野 廣明

§1. 序 論

孤立波や非線型波列などの現実の浅水波は Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式により正確に記述できることが Zabusky および Goldman の実験¹⁾により明らかにされ、最近では K-dV 方程式に関連した波浪の理論的研究や実験が海洋工学などの応用分野で盛んに行われている^{2), 3)}

ここでは応用面からもちまた純理論的にみても重要と思われる媒質の非一様性の分散性波動に対する影響を考へる。底が空間的にゆっくり変化している場合、浅水波は、非分散性媒質に対して Tamimi および Asano⁴⁾が用いた Gardner-Morikawa タイプの座標の伸縮変換を利用して、つぎのようない変形 K-dV 方程式に変換されることを Kakutani⁶⁾により示した:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha(\eta) \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta(\eta) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \gamma(\eta) \eta = 0. \quad (1.1)$$

この種の方程式は、非一様な密度分布をもつプラズマ中の波動など、かなり広範囲な非一様な媒質中の波動をも支配していることがわかっている。⁴⁾ 方程式(1.1)は独立変数と従属変数の適当な変換により形式上、非一様性の影響を一項にまとめることが出来る:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \nu(t) u = 0, \quad (1.2)$$

ここで、 x, t はそれぞれ空間的、時間的の「分割」をもつ独立変数ではあるが、必ずしも時間、空間座標そのものではない。

$\nu(t)$ は媒質の非一様性を表わしていて媒質が一様ならば値は0で、このとき方程式(1.2)は KdV 方程式となる。

KdV 方程式には、よく知られているように定常解として soliton 解や cnoidal wave 解がある。方程式(1.2)を用いて底の凹凸などの媒質の非一様性による soliton の成長や減衰あるいは分裂などが記述できることがわかっている。⁵⁾

本論文では方程式(1.2)を基礎にして、soliton とはさほど重要と思われる cnoidal wave などの波列に対する非一様性の影響を調べる。まず(§2)、波列の非一様性によるゆっくりにした変調を記述する方程式を導き、それを用いて一様媒質中では線型変調に対して安定であった弱い cnoidal wave ⁶⁾ が非一様媒質中では不安定となりうることを示す(§3)。ついで(§4)

Asano-Taniuti-Yajima⁽¹⁹⁾により見出された、KdV方程式の近似的な定常解である振幅の包絡線に関して圧縮性のsoliton (ここでは、これをよく知られているE-solitonと区別するため、negative E-solitonと呼ぶ)^{*}に対する非一様の影響を調べ前出の古典的なsoliton同様に分裂する二点を示す。

§2. 変形した非線型 Schrödinger 方程式

序論で述べたように底に凹凸のある浅水波など種々の非一様媒質中における非線型波動は方程式(1.2)の型の方程式で記述されるので以下では媒質を特定せず一般に方程式(1.2)で支配される物理系を考えることにする。(媒質に対する $\psi(t)$ の具体形については文献(7,9)を参照したい。)

‘弱い非線型性’をもつ波列の‘弱い非一様性’による‘ゆくり’した変調を考えることにし、つぎのような独立変数の伸縮変換、送属変数の擾動展開として $\psi(t)$ の形についての仮定をする；

$$\xi = \varepsilon(x - \lambda_0 t), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad \lambda_0 = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0} \quad (2.1)$$

ただし ω_0, k_0 は注目する波列の、媒質が一様な場合の線形近似における振動数、波数である。とほ小さなパラメータ。

^{*} この解に著者の注意を向けて下さった阪大の角谷典孝先生に感謝致します。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \varepsilon^n u^{(n,m)}(\xi, \tau) e^{im(k_0 x - \omega_0 t)} \\ u^{(n,-m)} &= u^{(n,m)*} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ただし $*$ は複素共役。

$\nu(t)$ は知られている例ではすべて $\frac{d\tilde{\nu}(t)}{dt}$ の形をしているので、つぎの形を仮定する：

$$\nu(t) = e^2 \nu(\tau) = e^2 \frac{d\tilde{\nu}(\tau)}{d\tau}. \quad (2.3)$$

式(2.1)~(2.3)を方程式に代入して、同じ調和成分、同じ ε のべき乗の係数を等しいとみる、各 (n, m) の組について、つぎの式を得る：

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 u_{\xi}^{(n-1,m)} + u_{\tau}^{(n-2,m)} - im\omega_0 u^{(n,m)} + u_{\xi\xi\xi}^{(n-3,m)} + \\ & + 3imk_0 u_{\xi\xi}^{(n-2,m)} - 3m^2 k_0^2 u_{\xi}^{(n-1,m)} - im^3 k_0^3 u^{(n,m)} + \\ & + \sum_{\substack{m'+m''=m-1 \\ m'+m''=m}} u^{(m',m')} u_{\xi}^{(m'',m'')} + ik_0 \sum_{\substack{m'+m''=m \\ m'+m''=m}} m'' u^{(m',m')} u^{(m'',m'')} + \\ & + \nu(\tau) u^{(n-2,m)} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし $u^{(l,m)}$ は l が負のときは 0 とする。

(2.4)式を順次解いて $u^{(1,1)}$ に対する変形した非線形 Schrödinger 方程式を得る：

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial u^{(1,1)}}{\partial \tau} - 3k_0 \frac{\partial^2 u^{(1,1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{6k_0} |u^{(1,1)}|^2 u^{(1,1)} + i \nu(\tau) u^{(1,1)} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

この方程式は媒質が一様なときは最後の項が落ちて既に知られている非線型 Schrödinger 方程式に帰着する。ところで、非線型 Schrödinger 方程式は、つぎのような特解をもつことが知られている。

(1) 弱 cnoidal wave 解

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)} &= a_0 e^{i\alpha_0 \tau}, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{6k_0} a_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ただし、 a_0, α_0 は実定数。

式(2.6)を代入した式(2.2)は K-dV 方程式の cnoidal wave 解に対応していることがわかっていく。

(2) negative E-soliton 解

$$u^{(1)} = \sqrt{A_0^2 - u_0^2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_0^2}{36k_0}} \left(\xi - \sqrt{A_0^2 - u_0^2} \tau \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{i}{6k_0} \sqrt{A_0^2 - u_0^2} \left(\xi - \sqrt{A_0^2 - u_0^2} \tau \right) \left\{ 1 - \frac{A_0^2}{A_0^2 - u_0^2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_0^2}{36k_0}} \left(\xi - \sqrt{A_0^2 - u_0^2} \tau \right)} \right\} \right],$$

ただし、 A_0, u_0 は実定数で $A_0^2 \geq u_0^2$ 。 (2.7)

続く2つの節では、媒質の非一様性の影響を、一様媒質における代表的な波列(1),(2)についてみる。

33. 弱い cnoidal wave の変調

$\nu(\tau)$ の存在は、一様媒質中では一定であった式(2.6)の振幅 a_0 と位相 α_0 を変化させると考えられるから $a(\tau), \alpha(\tau)$ を τ の実関数として、

$$u(\tau) = a(\tau) e^{i \int_{\tau_0}^{\tau} \alpha(\tau) d\tau} \quad (3.1)$$

と仮定して、方程式(2.5)に代入する。ただし τ_0 は適当な境界点とする。このとき、

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = -\nu(\tau)a(\tau), \quad \alpha(\tau) = \frac{1}{2k_0} a^2(\tau), \quad (3.2)$$

を得る。この式を解いて、

$$\left. \begin{aligned} a(\tau) &= a(\tau_0) e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \nu(\tau) d\tau}, \\ \alpha(\tau) &= \alpha^2(\tau_0) e^{-2 \int_{\tau_0}^{\tau} \nu(\tau) d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

したがって $\nu(\tau) < 0$ ならば、そこで弱い cnoidal wave は、大きく振幅、位相を変える。一様媒質中では線型変調になり、安定であった弱い cnoidal wave は、この意味で非一様媒質中において不安定となりうることを示した。

34. negative E-soliton の分裂

方程式(2.5)を厳密に解くことは難しいので一様媒質に対

する Asano-Taniuti-Yajima の方法¹⁹⁾ に従って近似的に解くことにする。そのために、つぎの式で定義される実関数 $A(\xi, \tau)$ $\Omega(\xi, \tau)$:

$$u^{(1,1)} = A \exp(i \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\Omega}{3k_0} d\xi), \quad (4.1)$$

を用いて方程式 (2.5) を書きかえると:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (A^2 \Omega) + 2\nu(\tau) A^2 &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{\partial A^2}{\partial \xi} - 18k_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

を得る。この連立方程式系は Asano および Ono により論じられた方程式系⁴⁾ に属するので弱い非線型性、分散性として非線型の仮定のもとに方程式 (1.1) の形に帰着させることが出来る。

すなわち、伸縮変換:

$$\left. \begin{aligned} X &= \delta \frac{1}{2} \left(\xi - \int_{-\infty}^{\tau} A_0(\tau) d\tau \right), \\ \tau &= \delta \frac{3}{2} \tau, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

と擾動展開:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 + \delta A_1 + \delta^2 A_2 + \dots, \\ \Omega &= \delta \Omega_1 + \delta^2 \Omega_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

により

$$\frac{\partial A_1}{\partial \eta} + 3A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{9k_0^2}{2A_0^3} \frac{\partial^3 A_1}{\partial X^3} + \frac{1}{2} \nu(\eta) A_1 = 0, \quad (4.5)$$

を得る。ただし、 $\nu < \pm$ において δ は小さなパラメータであり、 $\nu(\tau)$ に対しては式(2.3)と同じ理由から $\nu(\tau) = \delta \frac{3}{2} \nu(\eta)$ と仮定した。また 0 オータの式より A_0 は $\nu(\eta)$ からつぎのようになる： $A(\eta) = \exp\{\int \nu(\eta) d\eta\}$ 。

方程式(4.5)はさらにつぎのように書きかえられる：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + \nu(\tau) U = 0, \quad (4.6)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} T &= -\frac{9k_0^2}{2} \frac{d\eta}{A_0^3(\eta)}, \\ U &= -6A_0^3 A_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

方程式(4.6)は正に方程式(1.2)の形をしており、媒質が一樣である場合、soliton 解をもつ。この解は、式(4.7)に注意すれば、negative E-soliton (2.7) の近く解となっていることは容易に示される。かくして negative E-soliton の非一樣媒質中での振舞いは、古典的な soliton と同じ方程式(1.2)あるいは(4.6)により記述されることかわかる。したがって negative E-soliton も古典的な soliton 同様、非

材料質中において成長、減衰、あるいは分裂などの興味ある振舞いを見出すことが期待される。

引用文献

- 1) N.J. Zabusky and C.J. Galvin: J. Fluid Mech. 47 811 (1971).
- 2) 土屋義人, 安田孝志: 第20回海岸工学講演会論文集 397 (1973).
- 3) N. Shuto: Coastal Engineering in Japan 16 (1974).
- 4) N. Asano and H. Ono: J. Phys. Soc. Japan 31 1830 (1971).
- 5) N. Asano and T. Taniuti: J. Phys. Soc. Japan 27 1059 (1969).
- 6) T. Kakutani: J. Phys. Soc. Japan 30 272 (1971).
- 7) H. Ono: J. Phys. Soc. Japan 32 332 (1972).
- 8) H. Hasimoto and H. Ono: J. Phys. Soc. Japan 33 805 (1972).
- 9) H. Ono: to be published in Memoirs of Osaka Tech. College (1974).
- 10) N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima: J. Math. Phys. 10 2020 (1969).