

[文献]

K. KANEKO and T. KONISHI, J Phys. Soc. Japan **56** (1987) 2993.

K. KANEKO and T. KONISHI, in preparation

24. 一次元非線形クラインゴルドン 方程式のソリトンと第3積分

京大・工 石 森 勇 次

ハミルトン力学系のカオスを理解する上で、エネルギー以外の保存量がいくつ存在するかは重要な鍵である。少数自由度系では数値計算により視覚的に調べることができるが、波動系のような多自由度系では一般に困難である。本研究では、ソリトン解を手がかりに保存量特に第3積分の存在を調べる一つの方法を示した。

ハミルトン系としてラグランジアン

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 - \frac{1}{2} \phi_x^2 - U(\phi) \right], \quad (1)$$

で記述される一次元非線形クラインゴルドン方程式を考える。ソリトン解を持つポテンシャル $U(\phi)$ として代表的なものに

$$U(\phi) = 1 - \cos \phi : \text{サインゴルドン}, \quad (2)$$

$$U(\phi) = \text{sech}^2 R (1 - \cos \phi) + \frac{1}{4} \tanh^2 R (1 - \cos 2\phi),$$

$$0 \leq R < \infty : \text{ダブルサインゴルドン}, \quad (3)$$

$$U(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 : \text{ファイ4乗}, \quad (4)$$

がある。サインゴルドン方程式は可積分系としてよく知られた系であり無限個の保存量を持つ。非線形クラインゴルドン方程式は、ポテンシャル $U(\phi)$ の形によらず常に2つの保存量を持つ。第1番目は運動量

$$J_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_t \phi_x, \quad (5)$$

であり、第2番目はエネルギー

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 + \frac{1}{2} \phi_x^2 + U(\phi) \right], \quad (6)$$

である。第3番目の保存量 J_3 が存在するかどうかは一般にはわからない。しかし例えば次のような形

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{C_1}{8} \phi_{xt} \phi_{xx} - \frac{C_2}{64} \phi_t \phi_x \{ \phi_t^2 + \phi_x^2 + 6U(\phi) \} \right], \quad (7)$$

を仮定すると $U(\phi)$ が

$$\frac{d^2}{d\phi^2} U(\phi) + \frac{C_2}{C_1} U(\phi) = \text{const.}, \quad (8)$$

を満たせば J_3 は保存量となる。サインゴルドン方程式は勿論満たしている。この他双曲型サインゴルドン ($U(\phi) = \cosh \phi$) やリュービル方程式 ($U(\phi) = \exp \phi$) も J_3 が存在する。

まずダブルサインゴルドン方程式について考える。1ソリトン解は

$$\phi = q \left[\pi + 2 \tan^{-1} \frac{\sinh \xi}{\cosh R} \right], \quad (9)$$

$$\xi = \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad q = \pm 1,$$

で与えられる。 J_3 は次の形をしていると仮定する。

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{C_1}{8} \phi_{xt} \phi_{xx} - \frac{C_2}{64} \phi_t \phi_x \{ \phi_t^2 + \phi_x^2 + C_3 (1 - \cos \phi) + C_2 (1 - \cos 2\phi) \} \right]. \quad (10)$$

$C_1 \sim C_4$ は未知定数である。 C_1 及び C_2 は1ソリトン解に非相対論的近似が適用できる条件より

$$C_1 = \frac{16\tau^2}{8(3+\tau^2) - 3(1+\tau^4)M}, \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{128\tau^2}{-8(3-5\tau^2) + 3(1+4\tau^2-5\tau^4)M},$$

となる。ここで $\tau = \tanh R$ であり M はソリトンの静止質量

$$M = 4 \left(1 + \frac{2R}{\sinh 2R} \right), \quad (12)$$

である。 N ソリトン解として

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i, \quad \phi_i = q_i \left[\pi + 2 \tan^{-1} \frac{\sinh \xi_i}{\cosh R} \right], \quad (13)$$

$$\xi_i = x - x_i(t), \quad x_i < x_{i+1}, \quad q_i = \pm 1,$$

を仮定し(1)式に代入すると

$$\dot{x}_i^2 \sim e^{x_i - x_{i+1}} \sim O(\epsilon), \quad \epsilon \ll 1, \quad (14)$$

の条件下で戸田格子に対するラグランジアン

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} M \dot{x}_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} 32 q_i q_{i+1} \cosh^2 R e^{x_i - x_{i+1}} + O(\epsilon^2), \quad (15)$$

を得る。戸田格子は可積分系であり N 個の保存量を持つ。最初の3個は

$$I_1 = \sum_{i=1}^N M \dot{x}_i, \quad (16)$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} M \dot{x}_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} 32 q_i q_{i+1} \cosh^2 R e^{x_i - x_{i+1}}, \quad (17)$$

$$I_3 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{3} M \dot{x}_i^3 + \sum_{i=1}^{N-1} 32 q_i q_{i+1} \cosh^2 R (\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1}) e^{x_i - x_{i+1}}, \quad (18)$$

で与えられる。(13)式を(5)式及び(6)式に代入すると $J_1 = I_1 + O(\epsilon^{3/2})$, $J_2 = I_2 + O(\epsilon^2)$ となり両者は一致する, 第3積分(10)式の未知定数 C_3 及び C_4 は, J_3 と I_3 が矛盾しないように決定できる。結果は

$$C_3 = \frac{4\tau^2 [8(M-4)C_1 - (256/M) + C_2 \{8 + 3(1-\tau^2)M\}]}{C_2 [-8 + (1+3\tau^2)M]}, \quad (19)$$

$$C_4 = \frac{6\tau^4 [4(8-M)C_1 + (256/M) - C_2 \{8 + 3(1-\tau^2)M\}]}{C_2 [8(3-\tau^2) - 3(1-\tau^4)M]},$$

で与えられる。ダブルサインゴルドン方程式は $R=0$ 及び $R=\infty$ のときサインゴルドン方程式となるが, $C_1 \sim C_4$ はこの2つの極限でサインゴルドン方程式の定数と一致する。

以上のように, ダブルサインゴルドン方程式のソリトンは互いに離れていれば戸田格子方程式に従う可積分な粒子系と見なすことができ, 戸田格子の第3積分からダブルサインゴルドン方程式の第3積分に対する一つの候補者をあげることができた。残念ながらこの方法では ϵ^2 のオーダーを無視しているので4番目以上の保存量については議論できない。

この J_3 が本当に保存量であるかどうかを確かめるために, ソリトンの衝突実験を行った。

研究会報告

実験はエネルギーが厳密に保存される有限差分法を用いて行われた。図1は2つのソリトンを初速度 0.35 及び -0.25 で正面衝突させたときの J_3 の変化の最大値を示したものである。 J_3 は衝突の瞬間に最も大きく変動した。この変動は R の値がゼロ付近及び比較的大きな値のときにも見られたが、差分幅 Δt を小さくするにつれ減少し $\Delta t \rightarrow 0$ ではゼロになる傾向を示した。

一方中間的な R の値では Δt が小さくなくても有限の値にとどまっていた。即ち J_3 は完全な保存量ではない。更にソリトンと反ソリトンの衝突の方がソリトンとソリトンの衝突に比べて変動の幅が非常に大きい。ダブルサインゴールドン方程式のソリトンはトポロジカルに安定なソリトンであり、消滅するためにはソリトンと反ソリトンが出合わなければならない。従ってソリトンと反ソリトンが衝突するとき位相空間の軌道はソリトンあり場とソリトンなし場を隔てるセパトリクス近傍を通過するために軌道不安定を引きおこし、 J_3 は大きく変動すると考えられる。一方同種のソリトンしかないときには、場の配位はソリトンなし場になれず軌道も安定していると考えられる。図2～図5はそのことを示している。図2と図3は $R=2.4$ のときのソリトンとソリトンの衝突実験における時空パターン及び J_3 と軌道間距離

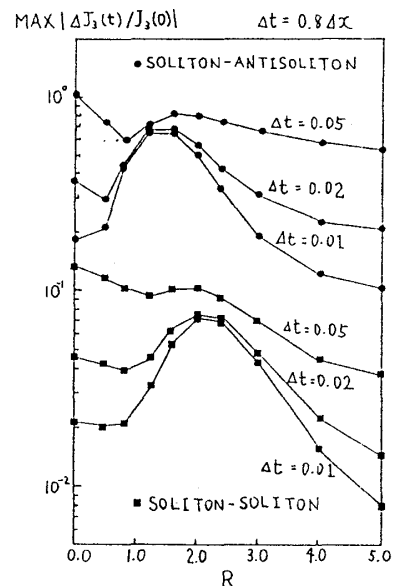


図 1

図2～図5はそのことを示している。図2と図3は $R=2.4$ のときのソリトンとソリトンの衝突実験における時空パターン及び J_3 と軌道間距離

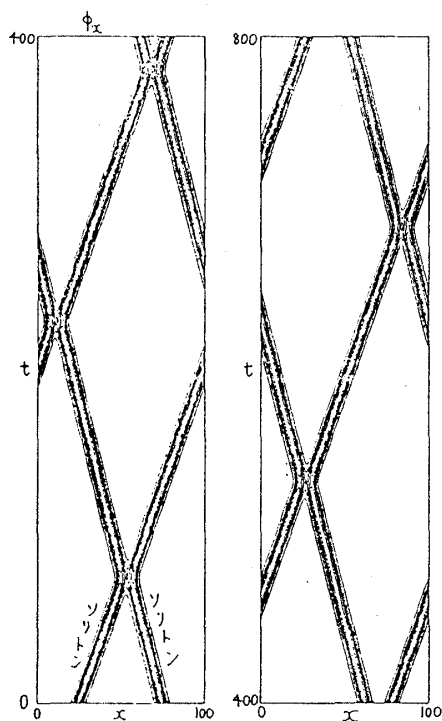


図 2

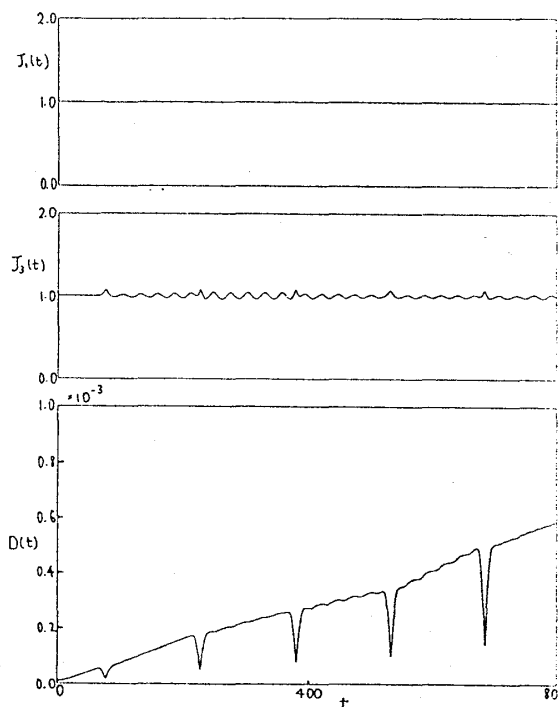


図 3

$$D(t) = \left[\frac{1}{L} \int_0^L \{ (\phi'_t - \phi_t)^2 + (\phi' - \phi)^2 \} dx \right]^{1/2},$$

ϕ' : ϕ と初期値がわずかに異なる解, (20)

L : 系の大きさ,

を示したもので、図4と図5は $R = 1.2$ のときのソリトンと反ソリトンの衝突実験における結

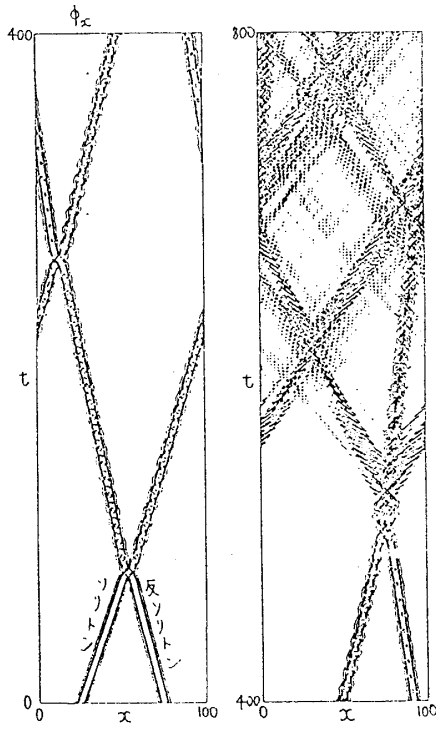


図4

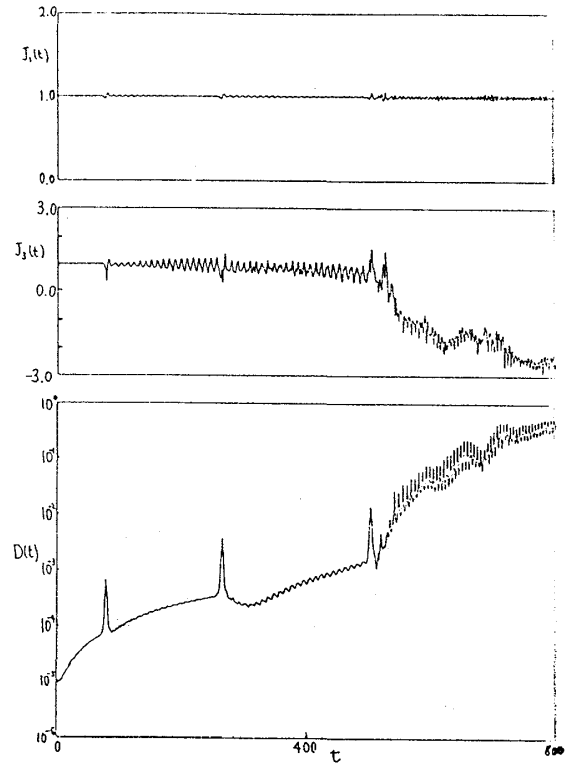


図5

果である。図6は $R = 5.0$ のときのソリトンと反ソリトンの衝突実験の結果であるが、 R がこの程度大きくなるとダブルサインゴールドン方程式は可積分系とみなせる。

ファイ4乗方程式についてもダブルサインゴールドン方程式と同様に J_3 を予想することができる。ファイ4乗方程式ではソリトンと反ソリトンの衝突実験しかできないが、結果は J_3 は大きく変動し軌道は不安定であった。

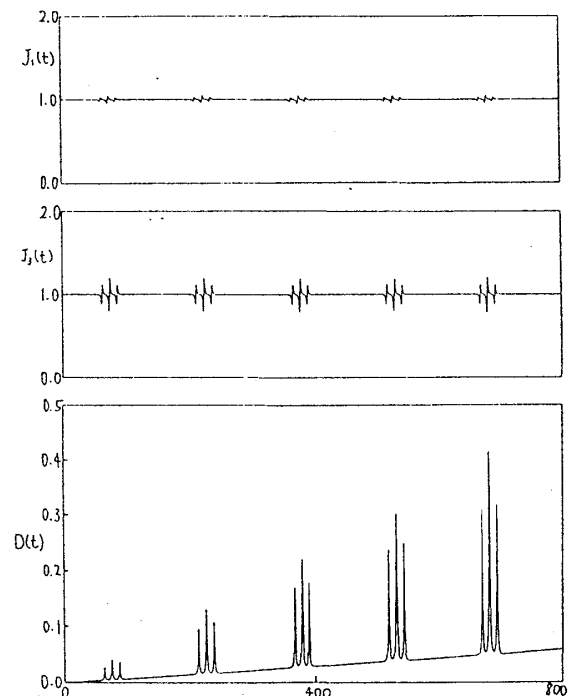


図6