

漸化式を用いる変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ の数値計算法の誤差解析

中部大学経営情報学部 吉田年雄 (Toshio Yoshida)

1. はじめに

m を適当に選ばれた正の整数とし, α を小さな任意定数とする.

$$G_{\nu+m+1}(x)=0, G_{\nu+m}(x)=\alpha \quad (1)$$

を出発値として, $I_\nu(x)$ が満足する漸化式

$$G_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}G_\nu(x)+G_{\nu+1}(x) \quad (2)$$

を繰り返し使うことにより, $G_{\nu+m-1}(x), G_{\nu+m-2}(x), \dots, G_\nu(x)$ を順次, 計算する. それを用いれば, ある $N(<m)$ に対して, $n=0, 1, \dots, N$ についての $I_{\nu+n}(x)$ の近似式が次式で与えられる.

$$I_{\nu+n}(x) \approx e^x G_{\nu+n}(x) / \sum_{k=0}^m \varepsilon_k G_{\nu+k}(x) \quad (3)$$

ただし,

$$\varepsilon_k = 2 \left(\frac{x}{2} \right)^{-\nu} \frac{(\nu+k)\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu+k)}{k!\Gamma(2\nu+1)} \quad (4)$$

である. この $I_\nu(x)$ の計算法の誤差解析については, $0 \leq \nu < 1$ の場合に対して, 既に二宮¹⁾によって行われている. 二宮による誤差解析における式変

形は、かなり面倒な手続きを必要とするが、本稿で提案している方法では、式変形を比較的容易に行うことができる。

2. 誤差解析

n を正整数とする。関数 $I_{v+n}(x)$ および $\bar{K}_{v+n}(x) = (-1)^n K_{v+n}(x)$ は共に同じ漸化式(2)を満足する。逆に式(2)の一般解は

$$G_{v+n}(x) = \xi G_{v+n}(x) + \eta \bar{K}_{v+n}(x) \quad (5)$$

によって表わされる。ここで ξ および η は任意定数である。これらの任意定数は式(1)によって決定される。式(1)から次式が得られる。

$$G_{v+m+1}(x) = \xi I_{v+m+1}(x) + \eta \bar{K}_{v+m+1}(x) = 0 \quad (6)$$

式(5)と(6)から η を消去すると次式を得る。

$$G_{v+n}(x) = \xi \left(I_{v+n}(x) - \frac{I_{v+m+1}(x) \bar{K}_{v+n}(x)}{\bar{K}_{v+m+1}(x)} \right) \quad (7)$$

上式と次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_{v+k}(x) = e^x \quad (8)$$

より

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon_k \left(\frac{G_{v+k}(x)}{\xi} + \frac{I_{v+m+1}(x) \bar{K}_{v+k}(x)}{\bar{K}_{v+m+1}(x)} \right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k I_{v+k}(x) = e^x \quad (9)$$

が得られる。式(7)と(9)から ξ を消去すると次式が求められる。

$$I_{v+n}(x) = \frac{e^x G_{v+i}(x)}{\sum_{k=0}^m \varepsilon_k G_{v+k}(x)} (1 - \Phi_{v,m}(x)) + \frac{I_{v+m+1}(x) \bar{K}_{v+n}(x)}{\bar{K}_{v+m+1}(x)} \quad (10)$$

ここで、

$$\Phi_{v,m}(x) = e^{-x} \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon_k \frac{I_{v+m+1}(x) \bar{K}_{v+k}(x)}{\bar{K}_{v+m+1}(x)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k I_{v+k}(x) \right) \quad (11)$$

である。式(10)は、 $I_{v+n}(x)$ とその近似式との基本的な関係式である。

したがって、式(1)を出発値として、漸化式(2)を繰り返し適用することより得られた $G_{v+m-1}(x), G_{v+m-2}(x), \dots, G_v(x)$ を用いて、式(3)により、10進 p 桁の精度で $I_{v+n}(x)$ が計算できるためには、

$$|\Phi_{v,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \quad (12)$$

および

$$|\Theta_{v,m,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \quad (13)$$

が成り立てばよい。ここで、

$$\Theta_{v,m,n}(x) = \frac{I_{v+m+1}(x) \bar{K}_{v+n}(x)}{I_{v+n}(x) \bar{K}_{v+m+1}(x)} \quad (14)$$

である。 $I_{v+n}(x)$ の近似式(3)の相対精度 $E_{v,m,n}(x)$ は、式(10)より、

$$E_{v,m,n}(x) = \frac{\Phi_{v,m}(x) - \Theta_{v,m,n}(x)}{1 - \Phi_{v,m}(x)} \quad (15)$$

と表される。

n が m に比べて十分に小さいときには、

$$|\Phi_{v,m}(x)| \gg |\Theta_{v,m,n}(x)| \quad (16)$$

であるので、そのときには、 $\Phi_{v,m}(x)$ が重要となる。

3. $\Phi_{v,m}(x)$ の変形

式(11)で表わされる $\Phi_{v,m}(x)$ を変形しよう。

$$\Phi_{v,m}(x) = e^{-x} \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon_k \frac{I_{v+m+1}(x) \bar{K}_{v+k}(x)}{\bar{K}_{v+m+1}(x)} + e^x - \sum_{k=0}^m \varepsilon_k I_{v+k}(x) \right)$$

$$= \frac{e^x K_{\nu+m+1}(x) - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^m \varepsilon_k \bar{R}_{m-k, \nu+k+1}(x)}{e^x K_{\nu+m+1}(x)} \quad (17)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{m-k, \nu+k+1}(x) &= x(I_{\nu+k}(x)K_{\nu+m+1}(x) + (-1)^{m+k+2}I_{\nu+m+1}(x)K_{\nu+k}(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{[(m-k)/2]} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+k+2n} \frac{(m-k-n)!\Gamma(\nu+m-n+1)}{n!(m-k-2n)!\Gamma(\nu+k+n+1)} \end{aligned} \quad (18)$$

は変形Lommel多項式²⁾である.

式(17)の右辺の分子の第1項 $e^x K_{\nu+m+1}(x)$ は, $e^x I_{\nu}(x)$ のベキ級数展開 (付録参照)

$$e^x I_{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k!\Gamma(2\nu+k+1)} (2x)^k \quad (19)$$

を用いると, 次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} e^x K_{\nu+m+1}(x) &= \frac{\pi e^x}{2} \frac{I_{-\nu-m-1}(x) - I_{\nu+m+1}(x)}{\sin(\nu+m+1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+k} \frac{\Gamma(2\nu+2m-k+2)\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!\Gamma(2\nu+2m-2k+2)} \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}(2x)^{m+1}}{2\sin\nu\pi} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\nu+m+k+3/2)(2x)^{-\nu+k}}{(2m+k+2)!\Gamma(-2\nu+k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+k+3/2)(2x)^{\nu+k}}{k!\Gamma(2\nu+2m+k+3)} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

また, 式(17)の右辺の分子第2項は, 次のように書き換えられる³⁾.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} \sum_{k=0}^m \varepsilon_k \bar{R}_{m-k, \nu+k+1}(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon_k \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{i=0}^{[(m-k)/2]} \frac{(m-k-i)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!(m-k-2i)!\Gamma(\nu+k+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \\ &\quad (x \text{ の同じベキでまとめると}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1} \sum_{l=0}^m \left(\frac{x}{2}\right)^l \frac{1}{(m-l)!} \sum_{i=0}^{[l/2]} \varepsilon_{l-2i} \frac{(m-l+i-1)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{i!\Gamma(\nu+l-i+1)} \end{aligned} \quad (21)$$

(ε_{l-2i} を具体的に書き入れると)

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(2v+1)} \sum_{l=0}^m \left(\frac{x}{2}\right)^l \frac{1}{(m-l)!} \sum_{i=0}^{[l/2]} \frac{(v+l-2i)\Gamma(2v+l-2i)(m-l+i)\Gamma(v+m-i+1)}{i!\Gamma(l-2i+1)\Gamma(v+l-i+1)} \quad (22)$$

($\sum_{i=0}^{[l/2]} \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}$ 無限級数にできるので)

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(2v+1)} \sum_{l=0}^m \left(\frac{x}{2}\right)^l \frac{1}{(m-l)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(v+l-2i)\Gamma(2v+l-2i)(m-l+i)\Gamma(v+m-i+1)}{i!\Gamma(l-2i+1)\Gamma(v+l-i+1)}. \quad (23)$$

上式を Pochhammer の記号

$$(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+i-1) = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$(\alpha)_0 = 1 \quad (24)$$

で表示するため, 公式

$$a-2i = a(1-a/2)_i / (-a/2)_i$$

$$\Gamma(a+i) = \Gamma(a)(a)_i$$

$$\Gamma(a-i) = (-1)^i \Gamma(a) / (1-a)_i$$

$$\Gamma(a-2i) = \Gamma(a) / \{2^{2i} (1/2 - a/2)_i (1-a/2)_i\} \quad (25)$$

を使って, 一般化された超幾何級数の形に書き換えると次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \sum_{k=0}^m \varepsilon_k \bar{R}_{m-k, v+k+1}(x) \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \frac{\Gamma(v+1)\Gamma(v+m+1)}{\Gamma(2v+1)} \sum_{l=0}^m \left(\frac{x}{2}\right)^l \frac{(v+l)\Gamma(2v+l)}{l!\Gamma(v+l+1)} \\ & \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{v+l}{2}\right)_i (m-l+1)_i \left(-\frac{l}{2}\right)_i \left(\frac{1}{2}-\frac{l}{2}\right)_i (-v-l)_i}{i! \left(-\frac{v+l}{2}\right)_i \left(\frac{1}{2}-\frac{2v+l}{2}\right)_i \left(1-\frac{2v+l}{2}\right)_i (-v-m)_i} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで, 一般化された超幾何級数の和に関する定理⁴⁾

$${}_5F_4\left(a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d; \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d; 1\right) \\ = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)} \quad (27)$$

を用いれば、次式が得られる。

$$\frac{1}{x} \sum_{k=0}^m \varepsilon_k \bar{R}_{m-k, v+k+1}(x) \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1+k} \frac{\Gamma(2v+2m-k+2)\Gamma(v+m-k+1)}{k!\Gamma(2v+2m-2k+2)} \quad (28)$$

このように、式の簡単化にとって、定理(27)が大きな手助けとなっている。

文献4)では、この式の簡単化（級数の和を単項で表すこと）をさらに一般的に試みる方法について述べている。式(20)と(28)を式(17)に代入すると、次式を得る。

$$\Phi_{v,m}(x) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1+k} \frac{\Gamma(2v+2m-k+2)\Gamma(v+m-k+1)}{k!\Gamma(2v+2m-2k+2)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1+k} \frac{\Gamma(2v+2m-k+2)\Gamma(v+m-k+1)}{k!\Gamma(2v+2m-2k+2)} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}(2x)^{m+1}}{2\sin v\pi} \right. \\ \left. \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-v+m+k+3/2)(2x)^{-v+k}}{(2m+k+2)!\Gamma(-2v+k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v+m+k+3/2)(2x)^{v+k}}{k!\Gamma(2v+2m+k+3)} \right\} \right] \\ \left/ \left\{ e^x K_{v+m+1}(x) \right\} \right. \quad (29)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{2m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1+k} \frac{\Gamma(2v+2m-k+2)\Gamma(v+m-k+1)}{k!\Gamma(2v+2m-2k+2)} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}(2x)^{m+1}}{2\sin v\pi} \right. \\ \left. \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-v+m+k+3/2)(2x)^{-v+k}}{(2m+k+2)!\Gamma(-2v+k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v+m+k+3/2)(2x)^{v+k}}{k!\Gamma(2v+2m+k+3)} \right\} \right] \\ \left/ \left\{ e^x K_{v+m+1}(x) \right\} \right. \quad (30)$$

ここで、式(29)において、第1の部分($k=0, 1, \dots, 2m+1$)の一部と第2の部

分($k=0,1,\dots,m$)は相殺していることに注意しよう。この相殺により、 $\Phi_{v,m}(x)$ が小さくなり、式(12)を満たすことができるようになるのである。上式において、 $v \ll m$ ならば、[]の第1の部分の $k=m+1$ の項が主要項である。したがって、 $\Phi_{v,m}(x)$ に対する有用な評価式として、次式が得られる。

$$\Phi_{v,m}(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \frac{\Gamma(2v+m+1)\Gamma(v+1)}{(m+1)!\Gamma(2v+1)e^x K_{v+m+1}(x)} \quad (31)$$

式(30)および(31)は、二宮¹⁾の結果と一致する。二宮は、式(17)の右辺の分子の第2項が式(28)の右辺の形になることを予想し、面倒な式変形を経て、数学帰納法により証明した。本稿での導出は、上述のように直接的であるが、それでも式変形には多少の手間がかかる。

参 考 文 献

- 1) 二宮市三：漸化式によるBessel関数の計算，電子計算機のための数値計算法II，pp.103-121，培風館，東京(1965)。
- 2) 森口繁一，宇田川金桂久，一松信：数学公式III，p.225，岩波書店，東京(1968)。
- 3) 吉田年雄：一般化された超幾何級数の和の定理の応用，情報科学リサーチジャーナル，Vol.2,pp57-60,中部大学情報科学研究所(1995)。
- 4) Slater,L.J.: *Generalized Hypergeometric Functions*, pp.48-57,Cambridge University Press(1966)。

付 録

$$\begin{aligned}
& e^x I_\nu(x) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} x^l \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(\nu+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \\
& \quad (x \text{ の同じベキでまとめると, } k \leftarrow l+2i) \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i! (k-2i)! \Gamma(\nu+i+1)} x^{k-2i} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i! \Gamma(k-2i+1)! \Gamma(\nu+i+1) 2^{2i}} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(k-2i+1)! \Gamma(\nu+i+1) 2^{2i}} \\
& \quad (\text{Pochhammer の記号を用いて表わすと}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-k/2)_i (1/2 - k/2)_i}{i! (\nu+1)_i}
\end{aligned}$$

上式に Gauss の公式

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$$

を用いれば次式が得られる.

$$\begin{aligned}
e^x I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(\nu+k/2+1/2) \Gamma(\nu+k/2+1)} x^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k! \Gamma(2\nu+k+1)} (2x)^k
\end{aligned}$$