

Deformations and unfoldings of complex analytic singular foliations

北大理(教養) 諏訪 立雄 (Tatsuo Suwa)

特異点を持つ葉層構造の変形理論は, Kodaira - Spencer [7] に始まり, 葉層構造の特性類の問題とも関連し, Heitsch [6], Duchamp - Kalka [2], Girbau - Haefliger - Sundararaman [3], Girbau - Nicolau [4] 等により研究されている。特異点のある場合については最近 X. Gomez - Mont, G. Pourcin, H.-J. Reiffen 等により研究され, またこの場合には筆者等による開折 (unfolding) の理論がある。最近これらの人々と直接会う機会があり, 変形理論と開折理論の間の関係が明らかになり, できたので, ここに特に formal の mechanism に重点を置いて記した。

以下 X は n -次元 (連結) 複素多様体, $\mathcal{O}_X$ は構造層とする。さらに, TX, T^*X はそれぞれ正則接ベクトル束, 正則余接ベクトル束とし, $J_X^{1,0} = \mathcal{O}_X(\otimes TX \otimes \otimes T^*X)$, $\Theta_X = J_X^{1,0}$, $\Omega_X^0 = \mathcal{O}_X(\wedge T^*X)$ とおく。

1. $J_X^{p,q}$ の部分層の変形理論.

この節の内容は Gomez-Mont [5] に于く.

(1.1) 定義 $F \in J_X^{p,q}$ の連接部分層とすると, F の変形 (deformation) は次のものからなる:

(I) X の変形 $f: X \rightarrow S$, かつ X, S は解析空間, f は smooth な正則写像で, S のある点 0 に対し, $f^{-1}(0) = X$ となるもの. X が compact なときは, f は proper とする.

以下 f の相対ベクトル束を Tf とする.

(II) $J_f^{p,q} = \mathcal{O}_X (\otimes Tf \oplus \otimes T^*f)$ の連接部分層で, $J_f^{p,q}/f^*$ が S -flat かつ $f|_X = F$ となるもの.

特に $S = A$, $\mathcal{O}_A = \mathbb{C}\{t\}/(t^2)$ のときの変形を一次 (無限小) 変形という. 次に一次変形と同値類の集合を求めよう. X の十分小さい Stein 座標近傍による被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ をとる.

$f: X \rightarrow A$, $f \in J_f^{p,q}$ は F の一次変形とすると, 必ず f より Kodaira-Spencer の cocycle $\theta = \{\theta^{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \oplus)$ が定まる. かつ, $\mathcal{O}_X$ は U_λ 上 $\mathcal{O}_{U_\lambda} \oplus t\mathcal{O}_{U_\lambda} \pmod{t^2}$ に同型で, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上では $f^\lambda + tg^\lambda \in \mathcal{O}_{U_\lambda} \oplus t\mathcal{O}_{U_\lambda}$ と $f^\mu + tg^\mu \in \mathcal{O}_{U_\mu} \oplus t\mathcal{O}_{U_\mu}$ 上 $f^\mu + tg^\mu = (I + t\theta^{\lambda\mu})(f^\lambda + tg^\lambda) \pmod{t^2}$ のとき同視して得られ, $J_f^{p,q}$ は U_λ 上 $J_{U_\lambda}^{p,q} \oplus tJ_{U_\lambda}^{p,q}$ に同型で, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上では $v^\lambda + tw^\lambda \in J_{U_\lambda}^{p,q} \oplus tJ_{U_\lambda}^{p,q}$ と $v^\mu + tw^\mu \in J_{U_\mu}^{p,q} \oplus tJ_{U_\mu}^{p,q}$ 上 $v^\mu + tw^\mu = (I + t\theta^{\lambda\mu})(v^\lambda + tw^\lambda) \pmod{t^2}$ のとき同視して得られ,

$J_{U_\mu}^{p,q} \oplus t J_{U_\mu}^{p,q}$ は $v^\mu + t w^\mu = (I + t L_{\theta^{\lambda\mu}})(v^\lambda + t w^\lambda)$ のとき同一複体である。 $\therefore L_{\theta^{\lambda\mu}}$ は $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{g}$ $\theta^{\lambda\mu}$ による

Lie 微分である。 $-\lambda$, γ は $U_\lambda \oplus F_{U_\lambda} \oplus t F_{U_\lambda}$ に同型で, 射 $\gamma \rightarrow J_+^{p,q}$ は $U_\lambda \oplus I + t \gamma_\lambda : F_{U_\lambda} \oplus t F_{U_\lambda} \rightarrow J_{U_\lambda}^{p,q} \oplus t J_{U_\lambda}^{p,q}$, $\gamma_\lambda \in \Gamma(U_\lambda, \text{Hom}_0(F, J_x^{p,q}))$ である。 $J_x^{p,q}$ から $J_x^{p,q}/F$ への射影 π を用いて, $\bar{\gamma}_\lambda = \pi \gamma_\lambda$ とおくと, 0-cochain $\gamma = \{\bar{\gamma}_\lambda\} \in C^0(\mathcal{U}, \text{Hom}(F, J_x^{p,q}/F))$ が定まり, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ は

$$(1.2) \quad \bar{\gamma}_\lambda - \bar{\gamma}_\mu = \pi L_{\theta^{\lambda\mu}}$$

が成り立つ。従って 2 次の複体

$$(1.3) \quad 0 \rightarrow \oplus_x \xrightarrow{D} \text{Hom}(F, J_x^{p,q}/F) \rightarrow 0,$$

$$Dv = \pi L_v, \quad v \in \oplus_x, \quad \text{を考えたとき, 上の hyper-cohomology 群 } H_D^p(X, F) \text{ は 2 重複体}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C^0(\mathcal{U}, \oplus_x) & \xrightarrow{D} & C^0(\mathcal{U}, \text{Hom}(F, J_x^{p,q}/F)) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\ 0 & \rightarrow & C^1(\mathcal{U}, \oplus_x) & \xrightarrow{D} & C^1(\mathcal{U}, \text{Hom}(F, J_x^{p,q}/F)) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

の 1 重体の cohomology 群として表わせるので, (1.2) より $(0, \gamma)$ は $H_D^1(X, F)$ の元を定め, $\gamma \neq 0$ であるためには γ が一次変形として自明であることが必要十分と

なることは容易に確かめられる。結局, F の一次変形の同値類全体の集合は $H_D^1(X, F)$ で与えられる。次の定理は

Donady [1] の方法をを用いて証明される。

(1.3) 定理 (Gomez-Mont [5]). X が compact なとき, $J_X^{p,1}$ の連接部分層 F の普遍変形 (Kuranishi 族) が存在する。この変形の parameter 空間の接空間は $H_D^1(X, F)$ に一致する。

2. 特異葉層構造 (ゲージ理論の立場より).

一般に $\mathcal{S}$ が連接 $\mathcal{O}_X$ -加群のとき,

$$\text{Sing}(\mathcal{S}) = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \text{ は } \mathcal{O}_{X,x} \text{-自由でない}\}$$

とあるとき, $\mathcal{S}$ の階数は局所自由層 $\mathcal{S}|_{X - \text{Sing}(\mathcal{S})}$ の階数と定める。

E が $(H)_X$ の連接部分層のとき, $(H)_E = (H)_X/E$, $S(E) = \text{Sing}((H)_E) \supset \text{Sing}(E)$ とある。

(2.1) 定義. X 上の (特異) 葉層構造とは, $(H)_X$ の連接部分層 E で, 積分可能条件

$$[E_x, E_x] \subset E_x, \quad \forall x \in X$$

を満たすものとする。

E が reduced であるとは, E が $(H)_X$ の中で full, つまり, X の任意の開集合 U に対し,

$$\Gamma(U, \Theta_X) \cap \Gamma(U - S(E), E) = \Gamma(U, E)$$

とあること (このときは, 積分可能条件は

$$[E_x, E_x] \subset E_x, \quad \forall x \in X - S(E)$$

でよい).

以下, E を X 上の葉層構造とする.

(2.2) 定義. E の変形はつぎの 3 つからなる.

(I) X の変形 $f: X \rightarrow S$,

(II) E の, Θ_X の部分層としての変形 $\varepsilon \subset \Theta_f (= \mathcal{O}_X(Tf))$

で, 積分可能条件

$$[\varepsilon, \varepsilon] \subset \varepsilon$$

をみたすもの.

E の積分可能条件を用いて, (1.3) の複体は次のように高次
に拡張できる:

$$(2.3) \quad 0 \rightarrow \Theta_X \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(E, \Theta_E) \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(\wedge^2 E, \Theta_E) \xrightarrow{D} \cdots,$$

ここで, $D: \mathcal{H}om(\wedge^i E, \Theta_E) \rightarrow \mathcal{H}om(\wedge^{i+1} E, \Theta_E)$ は

$$\begin{aligned} (D\eta)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} [v_i, \eta(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_{p+1})] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \eta([v_i, v_j] \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_{p+1}) \end{aligned}$$

により定義される. 複体 (2.3) の hypercohomology 群も

$H_D^p(X, E)$ と表わすと, 1 節と同様にして, E の n -次変形の

同値類全体の集合は $\mathbb{H}_D^1(X, E)$ であることが分る

(積分可能条件も自動的にくりこまれる)。

(2.4) 定理 (Gomez-Mont [5], Pourcin [8])。 X が

compact のとき, X 上の特異葉層構造 E の普遍変形が存在する。この変形の parameter 空間の接空間は $\mathbb{H}_D^1(X, E)$ に一致する。

さて容易に分るように, 複体 (2.3) は次の複体の完全列に拡張できる:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (2.5) \quad 0 & \rightarrow & \bigoplus_x \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(E, \bigoplus_E) & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}om(\wedge^2 E, \bigoplus_E) & \xrightarrow{D} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \bigoplus_E \xrightarrow{d} \mathcal{H}om(E, \bigoplus_E) & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}om(\wedge^2 E, \bigoplus_E) & \xrightarrow{d} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

第2行の D -複体の cohomology 層を $\mathcal{H}_D^p(E)$ で表し,
 第3行の d -複体の $\mathcal{H}_d^p(E)$ で表す。特異点のない場合,
 $\mathcal{H}_D^0(E)$ は Kodaira-Spencer [7] の Γ -ゲージ場の層,
 $\mathcal{H}_d^0(E)$ は Heitsch [6] の Γ -ゲージ場の層と一致する。

一般には次の完全列の可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & \oplus_x & \rightarrow & \oplus_E & \rightarrow & 0 \\
 (2.6) & & & \parallel & & \hookrightarrow & & \hookrightarrow & & \\
 & 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & \mathcal{H}_D^0(E) & \rightarrow & \mathcal{H}_d^0(E) & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

(2.5), (2.6) より次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & H^1(X, E) & & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
 0 \rightarrow & H^1(X, \mathcal{H}_D^0(E)) & \rightarrow & H_D^1(X, E) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}_D^1(E)) & \rightarrow H^2(X, \mathcal{H}_D^0(E)) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & \downarrow \\
 0 \rightarrow & H^1(X, \mathcal{H}_d^0(E)) & \rightarrow & H_d^1(X, E) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}_d^1(E)) & \rightarrow H^2(X, \mathcal{H}_d^0(E)) \\
 & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & & H^2(X, E) & & &
 \end{array}$$

各行各列は完全である。前に述べたように、 $H_D^1(X, E)$ は E の一次変形の同値類の集合を表す。一方 $H_d^1(X, E)$ は E の transverse structure の一次変形の同値類の集合で、 $H^1(X, E)$ は E の transverse structure をかえり一次変形の同値類を表す。特異点のない場合は $\mathcal{H}_D^1(E) = \mathcal{H}_d^1(E) = 0$ であるので、 $H_D^1(X, E) = H^1(X, \mathcal{H}_D^0(E))$, $H_d^1(X, E) = H^1(X, \mathcal{H}_d^0(E))$ となり、これは、よく知られた [7] または [6] で考えられた cohomology 群である。

3. 特異葉層構造 (一形式の立場より).

F を $\Omega_X (= \Omega'_X)$ の連接部分層のとき、 $\Omega_F = \Omega_X / F$,

$S(F) = \text{Sing}(\Omega_F) (\supset \text{Sing}(F))$ とおく.

(3.1) 定義. X 上の (特異) 葉層構造とは, Ω_X の連接部分層 F で, 積分可能条件

$$dF_x \subset (\Omega_X \wedge F)_x, \quad \forall x \in X - S(F)$$

を満たすものをいふ.

さらに F が reduced であるとは, F が Ω_X の中で full であることをいふ.

(3.2) Remark. $E \subset \bigoplus_x \Omega_x$ を (2.1) 定義の意味の葉層構造とし,

$$F = E^a = \{ \omega \in \Omega_X \mid \forall v \in E, \langle \omega, v \rangle = 0 \}$$

(E an annihilator)

とみると, F は (3.1) 定義の意味で reduced な葉層構造となる. また F が (3.1) の意味の葉層構造のとき,

$$E = F^a = \{ v \in \bigoplus_x \Omega_x \mid \forall \omega \in F, \langle \omega, v \rangle = 0 \}$$

とみると, E は (2.1) の意味の reduced な葉層構造となる.

以下 F を X 上の葉層構造とする

(3.3) 定義. F の変形は次のものからなる:

(I) X の変形 $f: X \rightarrow Y$,

(II) F の, Ω_X の部分層としての変形 $F' \subset \Omega_{X'} (= \Omega_X(T^*f))$

で, 積分可能条件

$$d_x \mathcal{F}_x \subset (\Omega_F \wedge \mathcal{F})_x, \quad x \in X - S(\mathcal{F})$$

をみたすもの. $\square = \mathcal{F}$, $\square$ の d_x は $\mathcal{F}$ の $\mathbb{R}$ - λ 方向の
微分を表し, $S(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\Omega_F / \mathcal{F})$ とおく.

F の一次変形の同値類の集合を $D(F)$ とすると, $D(F)$ は
(1.3) の複体

$$(3.4) \quad 0 \rightarrow \mathbb{H}_X \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(F, \Omega_F) \rightarrow 0$$

の hypercohomology 群 $H_D^i(X, F)$ の $\square$ により, 積分可
能条件をみたす $\square$ の集合となる.

(3.5) 定理 (Reiffen [9]) X が compact なとき, X
上の特異葉層構造 F の普通変形が存在する.

さて, $E = F^a$ とおくと, 複体 (3.4) は次の複体の完全列に
拡張できる.

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{H}_X & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}om(F, \Omega_F) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{H}_E & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}om(F, \Omega_F) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

第2行の D -複体の cohomology 層を $\mathcal{H}_D^p(F)$ で表し, 第

3行の d -複体の $\mathcal{H}_d^p(F)$ で表すと, (2.6) と同様の図式を得, (3.6) を考慮すると, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^1(X, E) & & & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
 0 \rightarrow & H^1(X, \mathcal{H}_D^0(F)) & \rightarrow & H_D^1(X, F) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}_D^1(F)) & \rightarrow H^2(X, \mathcal{H}_D^0(F)) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & \downarrow \\
 0 \rightarrow & H^1(X, \mathcal{H}_d^0(F)) & \rightarrow & H_d^1(X, F) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}_d^1(F)) & \rightarrow H^2(X, \mathcal{H}_d^0(F)) \\
 & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & H^2(X, E) & & & &
 \end{array}$$

各行各列は完全である. $H^1(X, E) \rightarrow H_D^1(X, F)$ の像は $D(F)$ に含まれ, $D(F)$ の $H_D^1(X, F) \rightarrow H_d^1(X, F)$ による像は F の transversal structure の一次変形と同値類の集合となる.

4. 特異葉層構造の開折理論

$F \subset \Omega_X$ を X 上の特異葉層構造とし, この節では F は, 階数 q の局所自由層とする.

(4.1) 定義. F の開折 (unfolding) は次のものをいう:

- (I) X の変形 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$,
 (II) $\mathcal{X}$ 上の階数 q の局所自由な葉層構造 $\mathcal{F} \subset \Omega_{\mathcal{X}}$,

$$\alpha(\mathcal{F})|_X = F \text{ とあるもの. } \quad \square = \square$$

$$\alpha: \Omega_{\mathcal{X}} \rightarrow \Omega_f$$

は標準的全射 (従って $\alpha(\mathcal{F})$ は (3.3) の意味で F の変形

となる)。

変形 α と β と同様に, $S=A$, $\mathcal{O}_A = \mathbb{C}\{t\}/(t^2)$ の α と β の開折を一次 (無限小) 開折という。次に一次開折の同値類の集合を求めよ。 X の十分小さい Stein 座標近傍による被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ をとり, $f: X \rightarrow A$, $\gamma \in \Omega_X$ を一次開折とし, 第1節におけるように, $\theta = \{\theta^m\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{H})$ を Kodaira-Spencer の cocycle とする。 (4.1)(II) より完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega_X|_X & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_X \rightarrow 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \gamma|_X & \simeq & F \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

を得る。 β を標準的全射 $\gamma \rightarrow \gamma|_X$ とすると, γ の元 $\tilde{\omega}$ に対し, $\beta(\tilde{\omega})$ は $\tilde{\omega}$ の X 上の解析的制限で, $\alpha\beta(\tilde{\omega})$ は $\tilde{\omega}$ の X 上の微分形式としての制限を与える。 $\Gamma(U_\lambda, F)$ の任意の元 ω に対し, $\Gamma(U_\lambda, \gamma)$ の元 $\tilde{\omega}$ が $\alpha\beta(\tilde{\omega}) = \omega$ となるものが存在するか,

$$(4.2) \quad \tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)}t + \ell dt \pmod{t^2, tdt},$$

$\omega^{(1)} \in \Gamma(U_\lambda, \Omega_X)$, $\ell \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$ と表わすことができ, α を $\gamma|_X$ に制限したものは同型写像であるため, ℓ は ω により

unique に定まる (ω'' は mod F で unique に定まる),

$\varphi^1 \in \omega$ に θ に対応させた写像とすると, 0-cocycle

$$\varphi = \{\varphi^1\} \in C^0(U, F^*), \quad F^* = \text{Hom}_0(F, \mathcal{O})$$

が定まる. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ は

$$(4.3) \quad \langle \omega, \theta^{\lambda\mu} \rangle = \varphi^\mu(\omega) - \varphi^\lambda(\omega), \quad \omega \in \Gamma(U_\lambda \cap U_\mu, F)$$

が成り立つ. 完全列

$$(4.4) \quad 0 \rightarrow F \rightarrow \Omega_X \xrightarrow{\pi} \Omega_F \rightarrow 0$$

において, $\text{Hom}(\Omega_X, \mathcal{O}) = \oplus_X$ に注意すると, 複体

$$(4.5) \quad 0 \rightarrow \oplus_X \rightarrow F^* \rightarrow 0 \quad (v \mapsto \langle \cdot, v \rangle)$$

を得る. このより 2重複体

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C^0(U, \oplus_X) & \rightarrow & C^0(U, F^*) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C^1(U, \oplus_X) & \rightarrow & C^1(U, F^*) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

を得るが, (4.3) より (θ, φ) は複体 (4.4) の 1-次 hypercohomology 群の元である, このが 0 であるためには, 7 回一次開折として自明であることが必要十分であることが分る. 一λ, (4.4) を局所自由層による Ω_F の resolution とみると, (4.5) の hypercohomology 群は $\text{Ext}_0^p(\Omega_F, \mathcal{O})$ に一致することが分る. 又より, F の一次開折の同値類の集合 $\in U(F)$ と

すると, $U(F)$ は $\text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ のうち種分可能条件を満たすものの集合となる.

γ が F の一次開折 α とし, (4.1) で述べたように, $\alpha(\gamma)$ は F の一次変形である α で, γ に対してのように定まる対 (θ, φ) の同値類に対し, $\alpha(\gamma)$ から第1, 3節で述べたように定まる対 (θ, η) と対応させることにより写像

$$(4.6) \quad \begin{array}{ccc} U(F) & \longrightarrow & D(F) \\ \wedge & & \wedge \\ \text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O}) & & H_0^1(X, F) \end{array}$$

を得る. $\eta = \{\eta^\lambda\} \in C^0(U, \text{Hom}(F, \Omega_F))$ は具体的に以下のように与えられる. $\omega \in \Gamma(U_\lambda, F)$ に対して $\tilde{\omega} \in \Gamma(U_\lambda, F)$ をとり (4.2) のように表わすと η^λ は $\omega = \pi(\omega^{(1)})$ と対応させるもの α である (π は (4.4) の標準的射影).

5. 余次元1の局所葉層構造

この節では標記の場合に (4.6) の写像を分析してみる. γ を $\mathbb{C}^n$ の原点 0 での芽で考えることとし, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}^n, 0}$, $\Omega = \Omega_{\mathbb{C}^n, 0}$ とおく. 余次元1の局所葉層構造は Ω の階数1の部分 $\mathcal{O}$ -加群 $F = (\omega)$ が種分可能条件 $d\omega \wedge \omega = 0$ を満たす生成元 ω をもつものと定義される. $S(F)$ は ω の零点集合に他ならない. 以下 F は reduced と

仮定する。これは $\text{codim } \mathcal{S}(F) \geq 2$ と同値である。 $\Omega_F = \Omega/F$ と置き、 $\pi \in (4.4)$ と同様、標準的全射 $\Omega \rightarrow \Omega_F$ とする。 (3.4) の複体において、 $F \simeq \mathcal{O}$ だから $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(F, \Omega_F) \simeq \Omega_F$ 従って

$$L(\omega) = \{ L_v(\omega) \mid v \in \mathbb{H} \}$$

と置く

$$\mathcal{H}_D^1(F) = \Omega_F / \pi L(\omega) \simeq \Omega / L(\omega) + F$$

となる。 — (4.5) の複体において $F^* \simeq \mathcal{O}$ だから、

$$J(\omega) = \{ \langle \omega, v \rangle \mid v \in \mathbb{H} \} \quad (\omega \text{ a Jacobian ideal})$$

と置く

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathcal{O} / J(\omega)$$

となる。今 $\gamma = (\tilde{\omega}) \in F$ の一次変形とし、

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)} t \pmod{t^2},$$

$\omega^{(1)} \in \Omega$ と表わしておくとし、 γ の定める $\mathcal{H}_D^1(F)$ の元は $\omega^{(1)}$ の $\Omega / L(\omega) + F$ における類である。種分可能条件は

$$(5.1) \quad d\omega^{(1)} \wedge \omega + d\omega \wedge \omega^{(1)} = 0$$

と与えられる。また $\gamma = (\tilde{\omega})$ が F の一次開折のとき

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)} t + h dt \pmod{t^2, t dt},$$

$\omega^{(1)} \in \Omega$, $h \in \mathcal{O}$ と表わしておくとし γ の定める $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ の元は h の $\mathcal{O} / J(\omega)$ における類である。種分可能条件は

$$(5.2) \begin{cases} d\omega^{(1)} \wedge \omega + d\omega \wedge \omega^{(1)} = 0, \\ h d\omega + (\omega^{(1)} - dh) \wedge \omega = 0. \end{cases}$$

7.5 とおきかえれば, 1 番目の式は 2 番目から容易に導き出せる.

次の補題は種分可能条件 $d\omega \wedge \omega = 0$ より従う

(5.3) 補題. ④ の任意の元 v に対し

$$\begin{cases} d(L_v \omega) \wedge \omega + d\omega \wedge L_v \omega = 0, \\ \langle \omega, v \rangle d\omega + (L_v \omega - d\langle \omega, v \rangle) \wedge \omega = 0. \end{cases}$$

== 7.5, 7.6 に次のような代数的対象を考える:

$$\Omega'(\omega) = \{ \theta \in \Omega \mid d\theta \wedge \omega + d\omega \wedge \theta = 0 \},$$

$$\Omega(\omega) = \{ \theta \in \Omega \mid \exists h \in \mathcal{O}, h d\omega + (\theta - dh) \wedge \omega = 0 \},$$

$$I(\omega) = \{ h \in \mathcal{O} \mid \exists \eta \in \Omega, h d\omega = \eta \wedge \omega \},$$

$$K(\omega) = \{ h \in \mathcal{O} \mid h d\omega = dh \wedge \omega \} \quad (\omega \text{ 分可能因子}).$$

$\Omega'(\omega)$ は $\mathbb{C}$ -ベクトル空間の構造を持ち, $\Omega(\omega)$ はその部分空間である. (5.3) 補題より, $L(\omega) + F \subset \Omega(\omega)$ である. $I(\omega)$ は $\mathcal{O}$ の ideal であり $K(\omega)$ は $I(\omega)$ の部分ベクトル空間である.

(5.3) より $J(\omega)$ は $I(\omega)$ の部分 ideal であることが分る. 形式空間と関数空間は一次種分可能条件 $h d\omega + (\theta - dh) \wedge \omega = 0$ により次のように結びつく.

(5.4) 命題.

$$\Omega(\omega) / L(\omega) + F \simeq I(\omega) / J(\omega) + K(\omega).$$

以上より, $D(F)$ と $U(F)$ の間には次のような関係がある:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}'_D(F) \simeq \Omega/L(\omega) + F & & \\ \cup & \cup & \\ D(F) \simeq \Omega'(\omega)/L(\omega) + F \supset \Omega(\omega)/L(\omega) + F & \xrightarrow{\quad \mathcal{O}/J(\omega) \quad} & E'_*(\Omega_F, \mathcal{O}) \\ & \cup & \cup \\ & \simeq I(\omega)/J(\omega) + K(\omega) \leftarrow I(\omega)/J(\omega) \simeq U(F). \end{array}$$

従、次の完全列がある。

$$(5.5) \quad 0 \rightarrow K(\omega)/J(\omega) \cap K(\omega) \rightarrow U(F) \rightarrow D(F)$$

これより, ω が $(J(\omega))$ に含まれない) 素因子をとると, F の開折で, 変形としては自明でも, 開折としては自明でないものもあり得る ((5.7) 参照)。

(5.6) Remarks. 1°. 葉層構造の開折理論においては普通の morphism の他に RL-morphism が自然に定義された ([12]). 普通の morphism は関数の開折理論における right morphism の枠内で, RL-morphism は right-left morphism の枠内である ([13]).

2°. $U_{RL}(F)$ を F の一次開折の RL-同値類の集合とすると,

$$U_{RL}(F) = I(\omega)/J(\omega) + K(\omega)$$

となり, (5.5) の写像 $U(F) \rightarrow D(F)$ の像は $U_{RL}(F)$ (と同型) となる。また F の開折が変形として自明であるためには RL-自明な開折となることが必要十分となる。

3°. 普通の morphism, RL-morphism に対し, 普遍性定理が

なりたつ $([0], [1])$.

(5.7) 例. (J.-F. Mattei) $F \in$

$$\omega = (y^2 + x^3) dx - xy dy$$

で生成される $\mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ 上の葉層構造とする.

$$\tilde{\omega} = (y^2 + x^3) dx - xy dy + x^3 dt$$

とすると, $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ となり $\tilde{F} = (\tilde{\omega})$ は F の開折である. ところが F の変形と考えると dt 項がなくなるので, 必ずしも明白であるか, $x^3 \in K(\omega)$, $x^3 \notin J(\omega)$ なる開折としてはいかならない (RL-明白ではない).

References

- [1] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier 16 (1966) 1-95.
- [2] T. Duchamp and M. Kalka, Deformation theory for holomorphic foliations, J. Diff. Geom. 14 (1979) 317-337.
- [3] J. Girbau, A. Haefliger and D. Sundararaman, On deformations of transversely holomorphic foliations, J. für die reine und ang. Math. 345 (1983) 122-147.
- [4] J. Girbau and M. Nicolau, Deformations of holomorphic foliations and transversely holomorphic foliations, preprint.

- [5] X. Gomez-Mont, The transverse dynamics of a holomorphic flow, preprint.
- [6] J. Heitsch, A cohomology for foliated manifolds, *Comment. Math. Helvetici* 50 (1975) 197-218.
- [7] K. Kodaira and D. C. Spencer, Multifoliate structures, *Ann. of Math.* 74 (1961) 52-100.
- [8] G. Paurcin, Deformations of singular holomorphic foliations on reduced compact $\mathbb{C}$ -analytic spaces, preprint.
- [9] H.-J. Reiffen, The variety of moduli of foliations on a compact complex space, preprint.
- [10] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, *Invent. math.* 65 (1981) 29-48.
- [11] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, *Japan. J. Math.* 9 (1983) 181-206.
- [12] T. Suwa, The versality theorem for RL-morphisms of foliation unfoldings, *Advanced Studies in Pure Math.* 8, *Complex Analytic Singularities*, ed. by T. Suwa and P. Wagreich, Kinokuniya and North-Holland 1986, 599-631.
- [13] T. Suwa, A factorization theorem for unfoldings of analytic functions, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*