

二項型多項式列に付随するシューア型函数と
普遍包絡環の中心元の固有値*

伊藤稔 (MINORU ITOH)

鹿児島大学理学部数理情報科学科**
itoh@sci.kagoshima-u.ac.jp

Abstract. We introduce Schur type functions associated with polynomial sequences of binomial type. Using these functions, we can describe the eigenvalues of some central elements of the universal enveloping algebras of classical Lie algebras.

序論. 二項型の多項式列に付随したシューア型函数を導入し、その性質について調べた結果を報告する。これには普遍包絡環の中心元の固有値の記述という応用もある。

通常のシューア函数は

$$\det(x_j^{\lambda_i+N-i})/\det(x_j^{N-i})$$

という行列式の商として定義されるが、本稿では各成分の冪を二項型多項式列 $\{p_i(x)\}_{i \geq 0}$ で置き換えた次のような函数を考える:

$$\det(p_{\lambda_i+N-i}(x_j))/\det(p_{N-i}(x_j)).$$

このような一般化でも多くの興味深い展開式が成立する。

この一般化は [OO] など扱われている shifted Schur function を本質的に含む。実際、 $p_i(x)$ として階乗冪（下降冪）を考えてさらに $x_i = y_i + N - i$ と変数変換したものが

2000 *Mathematics Subject Classification.* 05A40, 05E05, 17B35, 15A15, 15A72.

This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

Received October 19, 2006.

*Schur type functions associated with polynomial sequences of binomial type and eigenvalues of central elements of universal enveloping algebras

**Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Kagoshima University

shifted Schur function である. この shifted Schur function はカペリ元など一般線型リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表示するのに役立つ (8.1 節). そこで本稿では直交リー環, シンプレクティック リー環に対して同様の役割を果たすシューア型の函数を考えたい. 結論を言えば, これは中心差分と相性の良い一種の階乗幂に付随するシューア型函数として得られる (8.2 節). このような具体例を含む自然な一般論として二項型多項式列に付随するシューア型函数を提案したい.

通常のシューア型函数の定義における幂の部分进行他の多項式列に拡張するという試みは既にいろいろ行われている ([Ma2] など, さらに一般化も考えられている). よく知られた例としては, 次のような多項式列への拡張がある [Ma1].

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k).$$

ここで a_k は適当な数列である. この一般化は通常の階乗幂の場合 (つまり本質的に shifted Schur function) を含む. しかしこの一般化では直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元は取り扱いにくい. 本稿ではいろいろな展開式が成り立ち, しかも面白い例を含む別方向の一般化を考えたい.

1. 二項型の多項式列. まず二項型の多項式列について復習する.

1.1. 定義を復習しよう. 二項展開

$$(x + y)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

と同じ展開式を持つ多項式はいろいろ知られている. 例えば上昇幂や下降幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1), \quad x^{\underline{n}} = x(x-1) \cdots (x-n+1)$$

などの階乗幂についても二項展開と同じ次の等式が成立する:

$$(x + y)^{\overline{n}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}, \quad (x + y)^{\underline{n}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}.$$

このような多項式列を二項型と呼ぶ. つまり

$$p_n(x + y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y)$$

という関係式を満たすとき多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ は二項型であるという (ただし $p_n(x)$ は n 次式とする). 多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ が二項型であれば, $p_n(0) = \delta_{n,0}$ となることはすぐわかる (すなわち $n \geq 1$ のとき $p_n(x)$ の定数項はゼロになる).

通常の上昇冪, 下降冪の列 $\{x^n\}, \{x^{\bar{n}}\}, \{x^{\underline{n}}\}$ は二項型多項式列の典型例である.

1.2. このような二項型の多項式列に対して, デルタ作用素という作用素が自然に対応する. 例えば通常の上昇冪に対して微分 $D = \frac{d}{dx}$ という作用素を適用すると, $Dx^n = nx^{n-1}$ という関係が成り立つ. 上昇冪, 下降冪に対してもそれぞれ後退差分 $\Delta^-: f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$, 前進差分 $\Delta^+: f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$ を適用するとやはり同様の関係式が成り立つ:

$$\Delta^- x^{\bar{n}} = nx^{\bar{n}-1}, \quad \Delta^+ x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n}-1}.$$

これに注意して, 一般の二項型の多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ に対して

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$$

を満たす線型作用素 $Q = Q_x: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ を考える ($\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ は $\mathbb{C}[x]$ の基底だからこの線型作用素は一意に決まる). この Q は次の性質を満たす:

- (1) n 次式を $n-1$ 次式に移す (定数関数は 0 に移す).
- (2) 平行移動作用素 $E^a: f(x) \mapsto f(x+a)$ と可換である.

一般にこの二つの性質を満たす線型作用素をデルタ作用素という. (1) では n 次式をちょうど $n-1$ 次式に移すことを要求していることに注意する.

二項型の多項式列に対しデルタ作用素がひとつ自然に決まるわけだが, 実は逆も成り立つ. つまり任意のデルタ作用素 Q に対し

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x), \quad p_n(0) = \delta_{n,0}$$

という条件を満たす多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ が一意的に定まり, これもやはり二項型になる. このように二項型の多項式列とデルタ作用素は自然に 1 対 1 に対応する ([MR]):

すべての二項型の多項式列の集合 $\xleftrightarrow[1:1]{}$ すべてのデルタ作用素の集合.

注意. (1) 任意のデルタ作用素は次のように表される (ただし $a_i \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$ とする):

$$Q = a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + \cdots.$$

よってデルタ作用素は自然に $\mathbb{C}((x^{-1})) = \{\sum_{-\infty < k \leq n} c_k x^k \mid n \in \mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{C}\}$ という形式的
冪級数環への作用素と見なせる（すぐ後で二項型の多項式列をこの枠組みに拡張する）。

(2) デルタ作用素 Q を $Q = f(D)$ というように微分 D の冪級数で表したとき、これに付
随する二項型の多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ の母関数は次のように表される:

$$e^x \bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} t^k.$$

ただし $\bar{f}(t)$ は冪級数 $f(t)$ の合成に関する逆元である。つまり次をみたす冪級数である:

$$f(\bar{f}(t)) = \bar{f}(f(t)) = t.$$

1.3. 二項型の多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ に対して、良い性質を持った別の多項式列が自然に定
まる。 $n \geq 0$ のとき $p_{n+1}(x)$ の定数項は 0 であるから、 x で割ると n 次の多項式を得る:

$$p_n^*(x) = x^{-1} p_{n+1}(x).$$

この多項式 $p_n^*(x)$ は $p_n(x)$ とよく似た次のような性質を持つ:

命題 1.1. 次の関係式が成立する (Q は $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ に付随するデルタ作用素とする):

$$Qp_n^*(x) = np_{n-1}^*(x),$$

$$p_n^*(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k^*(x) p_{n-k}(y).$$

これらの関係式に注意して p_n, p_n^* を $n < 0$ に拡張することができる (ただしこれらは
 $\mathbb{C}((x^{-1}))$ の元となる)。すなわち次が成立する:

命題 1.2. $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ を二項型多項式列とする。これを拡張した級数列 $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$,
 $\{p_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で次を満たすものが一意に決まる ($p_n(x), p_n^*(x)$ の次数は n とする):

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x), \quad Qp_n^*(x) = np_{n-1}^*(x), \quad p_{n+1}(x) = xp_n^*(x),$$

$$p_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

$$p_n^*(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k^*(x) p_{n-k}(y).$$

$p_n^*(x)$ は $p_n(x)$ の単なる裏方的存在ではなく、両者のあいだにはある種の双対性が見られる。 $p_n^*(x)$ が $p_n(x)$ と対等な立場で活躍する様子は第2節以降でもしばしば見られる。

1.4. 第2節以降では二項型の多項式列、デルタ作用素は正規化して取り扱う。つまり次のように D の係数を1とした「正規」なデルタ作用素のみを考える：

$$Q = D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + \cdots.$$

言い換えると Q は平行移動演算子 E^a と可換で、さらに

$$Q: x^n + \text{低次の項} \mapsto nx^{n-1} + \text{低次の項}$$

をみたす線型作用素である。これに付随する $p_n(x)$, $p_n^*(x)$ はモニックな多項式になる。逆にモニックな二項型の多項式列に付随するデルタ作用素は自動的に正規化される。

この正規化は $x \mapsto cx$ という変数変換で得られるものであり、本質的な制限ではない。

1.5. 基本的な例を幾つか見ておこう。

例. (1) まず $Q = D = \frac{d}{dx}$ (つまり単なる微分) というもっとも単純な例を考えてみる。この場合は D に付随する多項式 $p_n^D(x)$, $p_n^{*D}(x)$ はどちらも単なる冪となる： $p_n^D(x) = p_n^{*D}(x) = x^n$ 。よって $p_n^D(x)$ と $p_n^{*D}(x)$ の展開式はどちらも通常の二項展開と一致する。

(2) 次に $Q = \Delta^+$ (前進差分) の場合を考えてみよう。これに付随する多項式列 $p_n^{\Delta^+}(x)$ と $p_n^{*\Delta^+}(x)$ は $p_n^{\Delta^+}(x) = x^n$, $p_n^{*\Delta^+}(x) = (x-1)^n$ と表すことができる。ただし x^n は下降冪と呼ばれる次のような多項式である：

$$x^n = \begin{cases} x(x-1)\cdots(x-n+1), & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

指数が負のときには $x^{-n} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ と定める ($n > 0$)。

(3) $Q = \Delta^-$ (後退差分) のときは、 $p_n^{\Delta^-}(x)$ と $p_n^{*\Delta^-}(x)$ は $p_n^{\Delta^-}(x) = x^{\bar{n}}$, $p_n^{*\Delta^-}(x) = (x+1)^{\bar{n}}$ と表される。ただし $x^{\bar{n}}$ は上昇冪であり、次のように定める：

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+1)\cdots(x+n-1), & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

指数が負のときには $x^{-n} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$ と定める ($n > 0$).

(4) 最後に Q が中心差分 Δ^0 のときを考える. すなわち

$$Qf(x) = \Delta^0 f(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$$

という場合である. この場合には上昇幂と下降幂が合体したような次の多項式を考える:

$$x^{\overline{n}} = \begin{cases} (x + \frac{n-1}{2})(x + \frac{n-3}{2})\cdots(x - \frac{n-1}{2}), & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

指数が負の場合には $x^{\overline{n}} = (x^{\overline{n}})^{-1} = ((x + \frac{n-1}{2})(x + \frac{n-3}{2})\cdots(x - \frac{n-1}{2}))^{-1}$ と定める ($n > 0$). これを用いて $p_n^{\Delta^0}(x)$ と $p_n^{*\Delta^0}(x)$ は $p_n^{\Delta^0}(x) = x \cdot x^{\overline{n-1}}$, $p_n^{*\Delta^0}(x) = x^{\overline{n}}$ と表される. 本稿の目的の一つである直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元の固有値は, この $p_n^{\Delta^0}(x)$ と $p_n^{*\Delta^0}(x)$ に付随するシューア型多項式で表される (8.2 節).

他にもラゲール多項式 (のひとつ) やアーベル多項式など二項型多項式列の例はいろいろ知られている ([MR], [S]).

2. シューア型関数の定義. 本稿の主題である「二項型多項式列に付随するシューア型関数」を定義しよう. 以下, 正規なデルタ作用素 Q とこれに付随するモニックな多項式 ($n < 0$ に対しては級数) の列 $p_n(x) = p_n^Q(x)$ および $p_n^*(x) = p_n^{*Q}(x)$ を固定して考える.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して次のような行列式を考える:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\lambda(x_1, \dots, x_N) &= \tilde{s}_\lambda^Q(x_1, \dots, x_N) = \det \begin{pmatrix} p_{\lambda_1+N-1}(x_1) & \cdots & p_{\lambda_1+N-1}(x_N) \\ p_{\lambda_2+N-2}(x_1) & \cdots & p_{\lambda_2+N-2}(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{\lambda_N+0}(x_1) & \cdots & p_{\lambda_N+0}(x_N) \end{pmatrix}, \\ \tilde{s}_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) &= \tilde{s}_\lambda^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = \det \begin{pmatrix} p_{\lambda_1+N-1}^*(x_1) & \cdots & p_{\lambda_1+N-1}^*(x_N) \\ p_{\lambda_2+N-2}^*(x_1) & \cdots & p_{\lambda_2+N-2}^*(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{\lambda_N+0}^*(x_1) & \cdots & p_{\lambda_N+0}^*(x_N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\lambda = \emptyset = (0, \dots, 0)$ のときはこれらはどちらも行の基本変形で Vandermonde 行列式に変形できる. つまり差積 $\Delta(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$ に一致する:

$$\tilde{s}_\emptyset(x_1, \dots, x_N) = \tilde{s}_\emptyset^*(x_1, \dots, x_N) = \Delta(x_1, \dots, x_N).$$

これに注意して次の函数を考える:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda^Q(x_1, \dots, x_N) = \tilde{s}_\lambda(x_1, \dots, x_N) / \tilde{s}_\emptyset(x_1, \dots, x_N),$$

$$s_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = \tilde{s}_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) / \tilde{s}_\emptyset^*(x_1, \dots, x_N).$$

$Q = D$ の場合, これらは通常のシューア函数に一致する. また一般にもこれらが対称式であり, その最高次は通常のシューア函数に一致すること, さらに λ が深さが N 以下のすべての分割を動くときに対称多項式の空間の基底になることなどは簡単にわかる.

以下 λ が分割の場合, つまり $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ の場合には, しばしば分割 λ をヤング図形と同一視する. また次の略記法も用いる:

$$(a_1^{m_1}, \dots, a_n^{m_n}) = (\overbrace{a_1, \dots, a_1}^{m_1 \text{ 個}}, \dots, \overbrace{a_n, \dots, a_n}^{m_n \text{ 個}}, 0, \dots, 0).$$

s_λ, s_λ^* の特別な場合として基本対称式, 完全斉次対称式の一般化も考えよう:

$$e_k(x_1, \dots, x_N) = e_k^Q(x_1, \dots, x_N) = s_{(1^k)}(x_1, \dots, x_N),$$

$$e_k^*(x_1, \dots, x_N) = e_k^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = s_{(1^k)}^*(x_1, \dots, x_N),$$

$$h_k(x_1, \dots, x_N) = h_k^Q(x_1, \dots, x_N) = s_{(k)}(x_1, \dots, x_N),$$

$$h_k^*(x_1, \dots, x_N) = h_k^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = s_{(k)}^*(x_1, \dots, x_N).$$

e_k と e_k^* は $0 \leq k \leq N$ の場合にしか定義できないが, h_k と h_k^* は任意の整数 k に対し定義可能である. これらは一般に通常の基本対称式, 完全斉次対称式とは最高次しか一致しないが, 特定の k については次の関係が成立する:

命題 2.1. 次の等式が成立する (すなわち e_N と h_{-N}^* は Q によらない) :

$$e_N(x_1, \dots, x_N) = x_1 \cdots x_N, \quad h_{-N}^*(x_1, \dots, x_N) = (-1)^{N-1} \frac{1}{x_1 \cdots x_N}.$$

これはより一般的な次の等式からわかる:

命題 2.2. 次の関係式が成立する:

$$s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}(x_1, \dots, x_N) = s_{(\lambda_1-1, \dots, \lambda_N-1)}^*(x_1, \dots, x_N) \times x_1 \cdots x_N.$$

s_λ と s_λ^* の間には次の関係も成立する:

命題 2.3. $\lambda_i \geq 0$ のとき, 次が成立する:

$$s_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N, 0).$$

注意. 一般に λ_i に負の整数も許したとき s_λ や s_λ^* は $\mathbb{C}((x_1^{-1}))((x_2^{-1})) \cdots ((x_N^{-1}))$ という形式的冪級数のなす体の元と見なせる. これから様々な展開式を扱うが, いずれも同様の形式的冪級数環における等式と見なせる.

3. シューア型函数の展開. 前節で定めたシューア型函数について次の展開式が成立する. これは通常のシューア函数に関する展開式 ([Ma1] の第 I 章第 3 節の Ex.10) の一般化であり, 定義から直接的な計算で証明できる.

定理 3.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1 + u, \dots, x_N + u) &= \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu}(u) s_\mu(x_1, \dots, x_N), \\ s_\lambda^*(x_1 + u, \dots, x_N + u) &= \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu}(u) s_\mu^*(x_1, \dots, x_N), \\ s_\lambda^*(x_1 + u, \dots, x_N + u) &= \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu}^*(u) s_\mu(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

ただし $d_{\lambda\mu}(u)$, $d_{\lambda\mu}^*(u)$ は次のように定める:

$$\begin{aligned} d_{\lambda\mu}(u) &= \det \left(\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} p_{\lambda_i - \mu_j - i + j}(u) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \\ d_{\lambda\mu}^*(u) &= \det \left(\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} p_{\lambda_i - \mu_j - i + j}^*(u) \right)_{1 \leq i, j \leq N}. \end{aligned}$$

次のように $d_{\lambda\mu}(u)$ を少し修正したものも考えよう (ただし $p_{(k)}(u) = \frac{1}{k!} p_k(u)$ とする):

$$\tilde{d}_{\lambda\mu}(u) = \frac{\prod_j (\mu_j + N - j)!}{\prod_i (\lambda_i + N - i)!} d_{\lambda\mu}(u) = \det (p_{(\lambda_i - \mu_j - i + j)}(u))_{1 \leq i, j \leq N}.$$

$d_{\lambda\mu}(u)$ は N に依存するが, この修正した係数 $\tilde{d}_{\lambda\mu}(u)$ は N によらず λ, μ のヤング図形としての形だけによって決まる. またこの係数について次のような一種の双対性が成立する:

定理 3.2. 次の関係式が成立する:

$$\tilde{d}_{\lambda\mu}(u) = (-1)^{|\lambda|-|\mu|} \tilde{d}_{\lambda'\mu'}(-u).$$

ただし λ', μ' はそれぞれ λ, μ の転置を意味する.

u の符号が変化するところが面白い. この定理 3.2 はシューア型関数の母関数の等式 (定理 6.1) から導かれる. またこれは本質的に次の定理と同値である:

定理 3.3. 二つの数列 $\{c_k\}_{k \geq 0}$ と $\{c'_k\}_{k \geq 0}$ の間に $\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k c'_{n-k} = \delta_{n,0}$ という関係があるとする. このとき次の等式が成立する:

$$\det (c_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq \text{depth } \lambda} = \det (c'_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq \text{depth } \lambda'}.$$

これは skew Schur function を基本対称式または完全斉次対称式で表す式 (Jacobi-Trudi formula) から導くこともできる.

4. 基本対称式, 完全斉次対称式の展開式. 前節と同様の展開式を e_k, h_k などに対して考えると, また面白い側面が現れる. 簡単のため次のような記号を用意する:

$$h_k(x_1, \dots, x_N; u) = h_k(x_1 + u, \dots, x_N + u),$$

$$e_k(x_1, \dots, x_N; u) = e_k(x_1 - u, \dots, x_N - u),$$

$$h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) = h_k^*(x_1 + u, \dots, x_N + u),$$

$$e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) = e_k^*(x_1 - u, \dots, x_N - u).$$

定理 4.1. $k \geq 0$ のとき次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} e_k(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{-N+k-1}{k-l} e_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{-N+k-1}{k-l} e_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u), \\ e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{-N+k-1}{k-l} e_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u). \end{aligned}$$

定理 4.2. $k \geq 0$ のとき次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} h_k(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{k-l} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u), \\ h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{k-l} h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{k-l} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u). \end{aligned}$$

これらの展開式を見ているとなんとなく次の式にも等号が成り立ちそうな気がするが、実際にはこれは一般にはうまくいかない:

$$\begin{aligned} e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &\neq \sum_{l \geq 0} \binom{-N+k-1}{k-l} e_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u), \\ h_k(x_1, \dots, x_N; u) &\neq \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{k-l} h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u). \end{aligned}$$

e と h のあいだの「 u の符号」「 N の符号」「成り立たない式」の違いが面白い。

定理 4.2 は $k \in \mathbb{Z}$ の場合に一般化すると次のような二種類の展開式になる:

定理 4.3. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} h_k(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{N+l-1} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u), \\ h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{N+l-1} h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{N+l-1} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u). \end{aligned}$$

定理 4.4. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} h_k(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{l} h_{k-l}(x_1, \dots, x_N) p_l(u), \\ h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{l} h_{k-l}^*(x_1, \dots, x_N) p_l(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{l} h_{k-l}(x_1, \dots, x_N) p_l^*(u). \end{aligned}$$

以上の展開式からデルタ作用素 Q の作用に関する次の等式もわかる:

系 4.5. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} Q_u h_k(x_1, \dots, x_N; u) &= (N + k - 1) h_{k-1}(x_1, \dots, x_N; u), \\ Q_u h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= (N + k - 1) h_{k-1}^*(x_1, \dots, x_N; u), \\ Q_u e_k(x_1, \dots, x_N; u) &= (-N + k - 1) e_{k-1}(x_1, \dots, x_N; u), \\ Q_u e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= (-N + k - 1) e_{k-1}^*(x_1, \dots, x_N; u). \end{aligned}$$

以上の展開式の幾つかは前節の一般的な展開式からの帰結であるが、直接証明する方が早い。ほとんどのものは定義から簡単に導けるが、定理 4.1 は少しわかりにくい。これはまず $k = N$ の場合を示して、そこに Q_u を繰り返し適用することで得られる。

5. 基本対称式, 完全斉次対称式の母関数. 命題 2.1 に注意すると, 前節の展開式の特別な場合として次の等式が得られる:

定理 5.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} (u - x_1) \cdots (u - x_N) &= \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l(x_1, \dots, x_N) p_{N-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{N-l}^*(u). \end{aligned}$$

定理 5.2. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u + x_1) \cdots (u + x_N)} &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l(x_1, \dots, x_N) p_{-N-l}^*(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{-N-l}(u). \end{aligned}$$

定理 5.3. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u + x_1) \cdots (u + x_N)} &= (-)^{N-1} \sum_{l \geq 0} (-)^l h_{-N-l}(x_1, \dots, x_N) p_l^*(u) \\ &= (-)^{N-1} \sum_{l \geq 0} (-)^l h_{-N-l}^*(x_1, \dots, x_N) p_l(u). \end{aligned}$$

これらの等式の左辺は e_k, e_k^*, h_k, h_k^* の母関数と見なせる. このように $p_n(x)$ や $p_n^*(x)$ を用いた母関数を考えると, 母関数自体は二項型多項式列によらない.

注意. 定理 5.1 は実は $\{p_n(u)\}$ が二項型でなくても成立する. すなわち $p_n(u)$ がモニックな n 次多項式でありさえすれば

$$(u - x_1) \cdots (u - x_N) = \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l(x_1, \dots, x_N) p_{N-l}(u)$$

が成立する (e_l は $p_n(u)$ を使って第 2 節で行ったのと同じように定める). また定理 5.2, 定理 5.3 も $p_n(x), p_n^*(x)$ がモニックな n 次式で次を満たしてさえいれば成立する:

$$\frac{1}{x+y} = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k(x) p_{-1-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k^*(x) p_{-1-k}(y).$$

6. シューア型関数の母関数. 前節の母関数の等式は次のように一般化 (多変数化) できる (以下しばしば $s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ などと略記する):

定理 6.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq N} \prod_{1 \leq j \leq M} (y_j - x_i) &= \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda(x) s_{\lambda^\dagger}(y) \\ &= \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda^*(x) s_{\lambda^\dagger}^*(y). \end{aligned}$$

λ は $\text{depth}(\lambda) \leq N, \text{depth}(\lambda') \leq M$ をみたすヤング図形全体を動く. また $\lambda^\dagger$ は次のように定める:

$$\lambda^\dagger = (M - \lambda_N, M - \lambda_{N-1}, \dots, M - \lambda_1)'.$$

定理 6.2. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{1}{y_j + x_i} &= \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda^*(x) s_{\lambda^\dagger}(y) \\ &= \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda(x) s_{\lambda^\dagger}^*(y). \end{aligned}$$

λ は $\text{depth}(\lambda) \leq N$ をみたすヤング図形全体を動く. また $\lambda^\dagger$ は次のように定める:

$$\lambda^\dagger = (-N - \lambda_N, -N - \lambda_{N-1}, \dots, -N - \lambda_1).$$

注意. (1) 定理 6.1 から係数 $d_{\lambda\mu}(u)$ に関する次のような一種の双対性がわかる:

$$(-)^{|\lambda|}d_{\lambda\mu}(u) = (-)^{|\mu|}d_{\mu^\dagger\lambda^\dagger}(-u).$$

係数 $\tilde{d}_{\lambda\mu}(u)$ の関係式である定理 3.2 はこれからすぐに導ける.

(2) 前節と同様に定理 6.1 は $\{p_n(u)\}$ が二項型でなくても成立する. すなわち $p_n(u)$ がモニックな n 次多項式でありさえすればよい. また定理 6.2 も $p_n(x)$, $p_n^*(x)$ がモニックな n 次式であって, さらに次を満たしてさえいれば成立する:

$$\frac{1}{x+y} = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k(x) p_{-1-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k^*(x) p_{-1-k}(y).$$

(3) 定理 6.2 は次のように言い換えることもできる:

$$\det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} \tilde{s}_\lambda(x) \tilde{s}_{\lambda^\dagger}(y).$$

これはコーシー行列式と通常のシュア函数に関する次の等式の一般化と見なせる:

$$\det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{1 \leq i, j \leq N} (1 - x_i y_j)} = \sum_{\lambda \geq \emptyset} \tilde{s}_\lambda^D(x) \tilde{s}_\lambda^D(y).$$

7. 普遍包絡環の中心元. 本稿で扱ったシュア型函数は, 古典リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表すのに役立つ. まず今節ではカペリ型の中心元の定義を復習して, 次の第 8 節で実際にその固有値を見る.

7.1. まず一般線型リー環 $\mathfrak{gl}_N$ の普遍包絡環の有名な中心元であるカペリ元を復習しよう. 以下, リー環 $\mathfrak{gl}_N$ を普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ に埋め込んで議論する. リー環 $\mathfrak{gl}_N$ の標準的な基底 E_{ij} を成分とする行列 $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ を考える. これを普遍包絡環の元を成分とする行列と見なして, 次の行列式を考える. これを「カペリ元」と呼ぶ ([Ca1], [HU], [U1]):

$$C^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \det(E - u1 + \text{diag } \mathfrak{h}_N).$$

ただし 1 は単位行列である. また $\mathfrak{h}_N$ は $\mathfrak{h}_N = (N-1, N-2, \dots, 0)$ という長さ N の数列である. さらに $\det$ は「列行列式 (column-determinant)」と呼ばれる非可換行列式である. つまり任意の (成分が非可換かも知れない) N 次の正方行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し,

$$\det Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)1} Z_{\sigma(2)2} \cdots Z_{\sigma(N)N}$$

とおく. このカペリ元 $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元となることが知られている:
カペリ元は次のような小行列式の和に一般化できる:

$$C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \det(E_I - u \mathbf{1} + \text{diag } \mathfrak{h}_k).$$

ただし $I = (i_1, \dots, i_k)$ という数列および行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し, Z_I で $(Z_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq k}$ という小行列を表す. この元を「 k 次のカペリ元」と呼ぶ.

さらに次のようなパーマネントによる類似も考えられる ($[N]$):

$$D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} \frac{1}{I!} \text{per}(E_I + u \mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \text{diag } \mathfrak{h}_k).$$

ここで per は「列パーマネント (column-permanent)」を表す. すなわち N 次の正方行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し次のように定める:

$$\text{per } Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} Z_{\sigma(1)1} \cdots Z_{\sigma(N)N}.$$

また $I! = m_1! \cdots m_N!$ とおく. ただし $m_1, \dots, m_N$ は $I = (i_1, \dots, i_k)$ の重複度である:

$$I = (i_1, \dots, i_k) = (\overbrace{1, \dots, 1}^{m_1}, \overbrace{2, \dots, 2}^{m_2}, \dots, \overbrace{N, \dots, N}^{m_N}).$$

I には一般に重複があるから, $Z_I = (Z_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq k}$ は必ずしも Z の小行列とは限らない.

この $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ もやはり普遍包絡環の中心元 (実際には中心の生成系) となる:

定理 7.1. 任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し, $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元になる.

シューアの補題より, これらの中心元は $\mathfrak{gl}_N$ の既約表現においてスカラー作用素として作用するが, その値 (固有値) は次の三角分解に注意すると簡単に計算できる:

$$\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ を満たす E_{ij} が生成する $\mathfrak{gl}_N$ の部分環である. よって行列 E の下三角成分, 対角成分, 上三角成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する.

例えば $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の固有値を考えよう. 三角分解に注意して最高ウェイトベクトルへの作用を考えると, 行列式の定義に現れる $N!$ 個の項のうち作用がゼロにならないのは単

純に対角成分を掛け合わせた 1 項のみであり, その値は簡単に求めることができる. 同様にして行列式, 列パーマネントの定義に注意すると $C_k^{gl_N}(u)$ と $D_k^{gl_N}(u)$ の固有値も具体的に書き下すことができる. しかしその結果はそれほど単純な形をしているわけではない. 第 8 節で見るように, 実はこれがちょうど下降幂に付随するシューア型函数 (本質的に shifted Schur function と同じもの) でうまく表せるのである.

7.2. 次に直交リ一環の普遍包絡環におけるカペリ元の類似を復習する.

$S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の対称行列として, S で決まる双線型形式を不変にする一次変換全体として直交群を実現する:

$$O(S) = \{g \in GL_N \mid {}^t g S g = S\}.$$

対応するリ一環は次のように表される:

$$\mathfrak{o}(S) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid {}^t Z S + S Z = 0\}.$$

この直交リ一環 $\mathfrak{o}(S) \subset U(\mathfrak{o}(S))$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)} = E_{ij} - S^{-1} E_{ji} S$ を取り, これを成分とする $F^{\mathfrak{o}(S)} = (F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)})_{1 \leq i, j \leq N}$ という行列を考える.

特に $S = S_0 = (\delta_{i, N+1-j})$ の場合, 直交リ一環は次のように実現される:

$$\mathfrak{o}(S_0) = \{Z = (Z_{ij}) \in \mathfrak{gl}_N \mid Z_{ij} + Z_{N+1-j, N+1-i} = 0\}.$$

これを直交リ一環の「split 実現」と呼ぶ. この場合には三角分解が次のように取れる:

$$\mathfrak{o}(S_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ を満たす $F_{ij}^{\mathfrak{o}(S_0)}$ が生成する $\mathfrak{o}(S_0)$ の部分環である. つまり行列 $F^{\mathfrak{o}(S_0)}$ の下三角成分, 対角成分, 上三角成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する. よって もし一般線型リ一環の場合のように「 $F^{\mathfrak{o}(S_0)}$ の行列式」という形で表される普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元があれば, その固有値は簡単に計算できるはずである. 実際に次の中心元が和地によって与えられた ($[W]$):

定理 7.2 (和地). 任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し, 次の元は普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元になる:

$$C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u) = \det(F^{\mathfrak{o}(S_0)} - u \mathbf{1} + \text{diag } \tilde{\mathfrak{h}}_N).$$

ここで $\tilde{\mathfrak{h}}_N$ は次のような長さ N の数列である:

$$\tilde{\mathfrak{h}}_N = \begin{cases} (\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \dots, 0, 0, \dots, -\frac{N}{2} + 1), & N: \text{偶数}, \\ (\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{N}{2} + 1), & N: \text{奇数}. \end{cases}$$

さらにこれは小行列式の和に一般化できる:

定理 7.3 (和地). 次の元は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元となる:

$$C_k^{\mathfrak{o}_N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \det(\tilde{F}_I^{\mathfrak{o}(S_0)} - u \mathbf{1} + \text{diag}(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2} - 2, \dots, -\frac{k}{2})).$$

ここで $\tilde{F}^{\mathfrak{o}(S_0)}$ は次のような行列である:

$$\tilde{F}^{\mathfrak{o}(S_0)} = \begin{cases} F^{\mathfrak{o}(S_0)} + \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1), & N: \text{偶数}, \\ F^{\mathfrak{o}(S_0)} + \text{diag}(0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1), & N: \text{奇数}. \end{cases}$$

7.3. シンプレクティック リー環の普遍包絡環でも類似の中心元が構成できる. ただしこれは行列式ではなくパーマメントで表される.

$J \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の交代行列 (よって N は偶数) として, この J で決まる双線型形式を不変にする一次変換全体としてシンプレクティック群を実現する:

$$\text{Sp}(J) = \{g \in \text{GL}_N \mid {}^t g J g = J\}.$$

対応するリー環は次のように表される:

$$\mathfrak{sp}(J) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid {}^t Z J + J Z = 0\}.$$

この $\mathfrak{sp}(J) \subset U(\mathfrak{sp}(J))$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)} = E_{ij} - J^{-1} E_{ji} J$ を取り, これを成分とする $F^{\mathfrak{sp}(J)} = (F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)})_{1 \leq i, j \leq N}$ という行列を考える.

以下, シンプレクティック リー環を split 実現した場合を考えよう. つまり

$$J = J_0 = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & \\ & \ddots & & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

の場合である. この場合の実現 $\mathfrak{sp}(J_0)$ では三角分解が次のように綺麗な形で取れる:

$$\mathfrak{sp}(J_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ を満たす $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ が生成する $\mathfrak{sp}(J_0)$ の部分環である. よって行列 $F^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ の下三角成分, 対角成分, 上三角成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する. この場合には列パーマメントを用いて普遍包絡環の中心元 (実際には中心の生成系) を構成することができる:

定理 7.4 ([15]). 任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し, 次の元は $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の中心元となる:

$$D_k^{\mathfrak{sp}N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} \frac{1}{k!} \text{per}(\tilde{F}_I^{\mathfrak{sp}(J_0)} + u \mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \text{diag}(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2} - 2, \dots, -\frac{k}{2})).$$

ここで $\tilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ は次の行列を意味する:

$$\tilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)} = F^{\mathfrak{sp}(J_0)} - \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1).$$

次節で見るように, 以上の中心元の固有値は本稿で扱ったシューア型関数で記述できる.

8. 具体例と普遍包絡環の中心元の固有値. 今節では Q が様々な差分の場合を考察する. 前進差分の場合は本質的に shifted Schur function の場合と同じであり, 前節で見た一般線型リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表すのに役立つ. また中心差分の場合は直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表すのに活用できる.

8.1. Q が前進差分 Δ^+ の場合を考える. この場合は $p_n^{\Delta^+}(x)$ および $p_n^{*\Delta^+}(x)$ は第 1 節で見たように $p_n^{\Delta^+}(x) = x^n$, そして $p_n^{*\Delta^+}(x) = (x-1)^n$ と表される. これらに付随する基本対称式 $e_k^{\Delta^+}$, 完全斉次対称式 $h_k^{\Delta^+}$ は次のように具体的に書き表すことができる ($e_k^{*\Delta^+}$, $h_k^{*\Delta^+}$ も変数を 1 だけシフトすることで得られる):

命題 8.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} e_k^{\Delta^+}(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} - N + k - 1 + i_1)(x_{i_2} - N + k - 2 + i_2) \cdots (x_{i_k} - N + i_k), \\ h_k^{\Delta^+}(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} - N - k + 1 + i_1)(x_{i_2} - N - k + 2 + i_2) \cdots (x_{i_k} - N + i_k). \end{aligned}$$

この対称式を使って前節で定義した一般線型リー環の普遍包絡環の中心元 $C_k^{\mathfrak{gl}N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}N}(u)$ の固有値を記述することができる:

定理 8.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ で決まる $\mathfrak{gl}_N$ の表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = e_k^{\Delta^+}(l_1, \dots, l_N; u), \quad \pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = h_k^{\Delta^+}(l_1, \dots, l_N; u).$$

ただし $l_i = \lambda_i + N - i$ とする.

詳細は省略するが, shifted Schur function (つまり本質的にこの下降冪に付随するシューア型函数) を用いてさらに $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の一般化である quantum immanant の固有値を表示することもできる ([OO]).

8.2. 次に $Q = \Delta^0$ (中心差分) の場合を考えてみよう. このとき $p_n^{\Delta^0}(x)$ と $p_n^{*\Delta^0}(x)$ は $p_n^{\Delta^0}(x) = x \cdot x^{\frac{n-1}{2}}$, $p_n^{*\Delta^0}(x) = x^{\frac{n}{2}}$ と表される. さらに $e_k^{\Delta^0}$ と $h_k^{*\Delta^0}$ は次のように表される:

命題 8.3. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} e_k^{\Delta^0}(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} - \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 1 + i_1)(x_{i_2} - \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 2 + i_2) \cdots (x_{i_k} - \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + i_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} + \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 1 - i_1)(x_{i_2} + \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 2 - i_2) \cdots (x_{i_k} + \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - i_k), \\ h_k^{*\Delta^0}(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} - \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + i_1)(x_{i_2} - \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 1 + i_2) \cdots (x_{i_k} - \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 1 + i_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} + \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - i_1)(x_{i_2} + \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 1 - i_2) \cdots (x_{i_k} + \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 1 - i_k). \end{aligned}$$

これらを使って直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環のカペリ型中心元の固有値を表すことができる.

まず直交リー環の普遍包絡環の中心元 $C_k^{\mathfrak{o}_N}(u)$ について次が成立する.

定理 8.4. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{[n]})$ で決まる $\mathfrak{o}_N$ の表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{o}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{o}_N}(C_k^{\mathfrak{o}_N}(u)) = e_k^{\Delta^0}(l_1, \dots, l_N; u).$$

ただし $l_1, \dots, l_N$ は次のように定義する. まず $1 \leq i \leq n$ に対し, $l_i = \lambda_i + n - i$ とする. そして N が偶数のときは $l_{n+1} = -l_n, \dots, l_N = -l_1$ と定める. N が奇数のときには $l_{n^\dagger} = 0$, $l_{n^\dagger+1} = -l_{n^\dagger-1}, \dots, l_N = -l_1$ と定める (ただし $n^\dagger = \frac{N+1}{2}$ とする).

シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元 $D_k^{\mathfrak{sp}_N}(u)$ についても次が成立する:

定理 8.5. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ で決まる $\mathfrak{sp}_N$ の表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{sp}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{sp}_N}(D_k^{\mathfrak{sp}_N}(u)) = h_k^{*\Delta^0}(l_1, \dots, l_N; u).$$

ただし $1 \leq i \leq n$ に対し $l_i = \lambda_i + n + 1 - i$ として, さらに $l_{n+1} = -l_n, \dots, l_N = -l_1$ と定める.

以上の結果を見ると h よりも h^* の方が重要な役割を果たしているように見える. 一般線型リー環の結果も, パラメータ u を 1 だけずらすことで h^* で表示し直すことができる.

詳細は省略するが, [I3] で与えられた直交リー環の普遍包絡環のパーマネント型中心元およびシンプレクティックリー環の普遍包絡環の行列式型中心元の固有値も部分的には本稿のシューア型函数を用いて表示できる. これらの普遍包絡環において quantum immanant の類似を研究する手がかりになれば面白い (が, 現時点ではまだ何もわからない).

カペリ型の中心元を扱うときには階乗冪を利用した母函数や前進差分, 中心差分などを考えることが有効であるが, それらは第 4 節, 第 5 節の結果と対応している.

REFERENCES

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I1] M. Itoh, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), 463–489.
- [I2] ———, *Capelli identities for the dual pair (O_M, Sp_N)* , Math. Z. **246** (2004), 125–154.
- [I3] ———, *Capelli identities for the reductive dual pairs*, Adv. Math. **194** (2005), 345–397.
- [I4] ———, *Two determinants in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, J. Algebra **314** (2007), 479–506.
- [I5] ———, *Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras*, preprint (2006).
- [IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), 333–359.

- [Ma1] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials (second edition)*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [Ma2] ———, *Schur functions: themes and variations*, in *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg **498** 1992, pp. 5–39.
- [M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.
- [MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.
- [MNO] A. Molev, M. Nazarov, and G. Ol’shanskiĭ, *Yangians and classical Lie algebras*, Uspekhi Mat. Nauk **51** (1996), 27–104; Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.
- [MR] R. Mullin and G.-C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory III: Theory of Binomial Enumeration*, Graph Theory and Its Applications, edited by Bernard Harris, Academic Press, New York, 1970, pp. 167–213.
- [N] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda, and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.
- [OO] A. Okounkov and G. Olshanski, *Shifted Schur functions*, Algebra i Analiz **9** (1997), 79–147 (Russian); English transl.: St. Petersburg Math. J. **9** (1998), 239–300.
- [S] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sūgaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants,” AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu.
- [U2] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).
- [U3] ———, *Application of Koszul complex to Wronski relations for $U(\mathfrak{gl}_n)$* , Comment. Math. Helv. **78** (2003), 663–680.
- [W] A. Wachi, *Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras*, Lett. Math. Phys. **77** (2006), 155–168.