

4

2. 数式処理によるソリトン方程式の解法

広 大 工 広 田 良 吾 (Ryogo Hirota)

非線形偏微分方程式

$$\mathcal{L}(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (1)$$

の解を求めるために REDUCE がどのように使われているかを簡単に述べる。

議論を出来るだけ分かりやすくするために、ソリトン方程式として典型的な例である KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

について述べるが、方法は他の方程式にも適用可能である。

(0) 2項演算子 D_x を導入する

$$D_x^n f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n f(x) g(x') \Big|_{x'=x} \quad (3)$$

ここで n は自然数.

この定義は次の定義と等しい

$$\text{If } n > 0, \quad D_x^n f \cdot g = D_x^{n-1} f_x \cdot g - D_x^{n-1} f \cdot g_x.$$

$$n = 0, \quad D_x^n f \cdot g = f g.$$

だから REDUCE の言語で書くと.

FOR ALL N, X, F, G LET $D(X, N, F, G) =$

IF $N > 0$ THEN $D(X, N-1, DF(F, X), G)$

$- D(X, N-1, F, DF(G, X))$ ELSE $F * G$;

となる。

2変数 x, t を含む場合には

$$D_x^m D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}$$

となるが、同様に (2) REDUCE 言語で表現出来る。

(I) 従属変数 u の変換を行... (2)式を置き換える。

$$(A型) 変換 \quad u(x,t) = G(x,t)/F(x,t) \quad (4)$$

$$\text{公式} \quad e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial x}} \left(\frac{G(x)}{F(x)} \right) = \frac{e^{\epsilon D_x} G(x) \cdot F(x)}{\cosh(\epsilon D_x) F(x) \cdot F(x)} \quad (5)$$

$\epsilon \in \mathbb{C}$ で展開して

$$\epsilon: \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{G}{F} = \frac{D_x G \cdot F}{F^2}$$

$$\epsilon^2: \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{G}{F} = \frac{D_x^2 G \cdot F}{F^2} - \frac{G}{F} \frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2}$$

$$\epsilon^3: \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{G}{F} = \frac{D_x^3 G \cdot F}{F^2} - 3 \left(\frac{D_x G \cdot F}{F^2} \right) \frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2}$$

... ϵ^4 得る。

(5)式 $\epsilon \in \mathbb{C}$ で展開して、 ϵ の各 order を集める事は REDUCE の最も得意とする所で COEFF(Y(ϵ), ϵ , C) で ϵ^n の係数が Cn に格納される。^{T: から} $u = G/F$ の高次微分を求めるのは非常に簡単である。

(B型) 変換 $U(x, t) = 2 [\log f(x, t)]_{xx} \quad (6)$

公式

$$2 \cosh(\epsilon \frac{\partial}{\partial x}) [\log f] = \log [\cosh(\epsilon D_x) f \cdot f] \quad (7)$$

$\epsilon \in^2$ 展開

$$\epsilon^2: 2(\log f)_{xx} = \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}$$

$$\epsilon^4: 2(\log f)_{xxxx} = \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3 \left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right)^2$$

ϵ 得 3.

A型変換 $U(x, t) = G(x, t) / F(x, t)$ の公式 Σ (2) 式に適用

得 3 と

$$\frac{D_t G \cdot F}{F^2} + \left(\frac{G}{F} \frac{D_x G \cdot F}{F^2} + \frac{D_x^3 G \cdot F}{F^3} - 3 \left(\frac{D_x G \cdot F}{F^2} \right) \frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2} \right) = 0$$

と 4 3 の τ Decouple して、次の双一次方程式を得る

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t + D_x^3) G \cdot F = -3 \lambda D_x G \cdot F \\ D_x^2 F \cdot F - 2 F G = \lambda F^2, \quad \lambda: \text{const} \end{array} \right. \quad (8)$$

B型変換 $U(x, t) = 2(\log f)_{xx}$ の公式を (2) 式に使うために、ポラニシヤル $W(x, t)$ を導入する:

$$U(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \quad (9)$$

$W(x, t)$ を使えば (2) 式は

$$\frac{\partial}{\partial x} (W_t + 3W_x^2 + W_{xxx}) = 0 \quad (10)$$

となる。

そこで $W = 2(\log f)_x$ と変換すると 公式より

$$W_t = 2(\log f)_{xt} = \frac{D_x D_t f \cdot f}{f^2}, \quad W_x = \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}$$

が得られ (10) 式に代入すると、(10) 式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f}{f^2} = 0$$

となるので、次の双一次形式を得る

$$[D_x (D_t + D_x^3) - \lambda] f \cdot f = 0, \quad \lambda = \text{const.} \quad (11)$$

一見簡単にみえる (2) 式をわざわざ変換して (8) 式や (11) 式 of 双一次形式にするのは REDUCE が有理関数の演算を苦手とするからである。ソリトン方程式の解は有理関数で表わされるものが多いので、解を有理関数と仮定して、方程

式に代入し、分母を揃って書き直したのが (8) 式や (11) 式の
 双一次形式なのである。方程式に作用する変換群の立場か
 らみても双一次形式の方が見通しよいのだが、ここでは
 省略する。

(II) 解の予想とチェック

1. Polynomial solution: (8) または (11) 式の解が
 x, t の多項式である

$$\sum_{m,n=0}^N a_{mn} x^m t^n$$

と仮定して係数を逐次決めて行く。これは手計算でやる
 大変だが、REDUCE を使うと頭を使わずに手の運動
 (タイピング) だけで出来る。

2. Exponential solution: (8) または (11) 式の解が
 指数関数 $\exp(px + \Omega t)$ の多項式と仮定して係数を
 決める。この場合も低次の多項式を手の運動だけで
 する。

以上のようにして与えられた偏微分方程式の特殊解を求める

事だけでなく、その他、逆散乱形式の導出、高次 symmetry をもつ方程式のチェック、双一次微分方程式が N -ソリト = 解 をもつかどうかの判定 等と、あらゆる所で数式処理が役立つ。

References.

R. Hirota: "Direct Methods in Soliton Theory,"
in *Solitons*, ed. R. K. Bullough and P. J.
Caudrey (Topics in Current Physics 17,
Springer-Verlag, 1980).