

A Remark on Critical Points of Link Cobordism

神大 中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

$R^3 \times [0, 1]$ に proper に埋められたコンパクトな有向 P. L. 曲面 F を考える。 F は elementary critical points のみ有する曲面に ambient isotopic である。 ([3], I.) そこで, elementary critical points のみを F は有すると仮定し, その個数を $c(F)$ で表わす。

この $c(F)$ を 絡み輪 $(L_i, R^3) = (F \cap R^3 \times \{i\}, R^3 \times \{i\})$ ($i = 0, 1$) の代数的不変量で評価することが 本稿の目的である。

有向絡み輪 (L, R^3) に対し, L のどの meridian も σ にうつす 絡み輪群 $\pi_1(R^3 - L)$ から σ で生成される無限巡回群 $\langle \sigma \rangle$ への準同型に対応する $R^3 - L$ の無限巡回被覆空間 $\tilde{E}$ をとる。すると 1次元ホモロジー群 $H_1(\tilde{E}; \mathbb{Z})$ は, 有限生成 $\mathbb{Z}\langle \sigma \rangle$ -加群であり, $\mathbb{Z}\langle \sigma \rangle$ -加群としての正方表現行列を有する。そこで このような正方表現行列の次数の最小数を $m(L)$ で表わす。 ([2].) 但し, $H_1(\tilde{E}; \mathbb{Z})$ が自明の時は、

$m(L) = 0$ とする。

定理. $c(F) \geq |m(L_0) - m(L_1)|.$

証明. F が minimal points や maximal points を有するとき、図1のように piping により、saddle points だけを有する曲面 F' で $c(F') = c(F)$ であるものが $R^3 \times [0, 1]$ にとれる。故に saddle points のみ F が有するとしてよい。

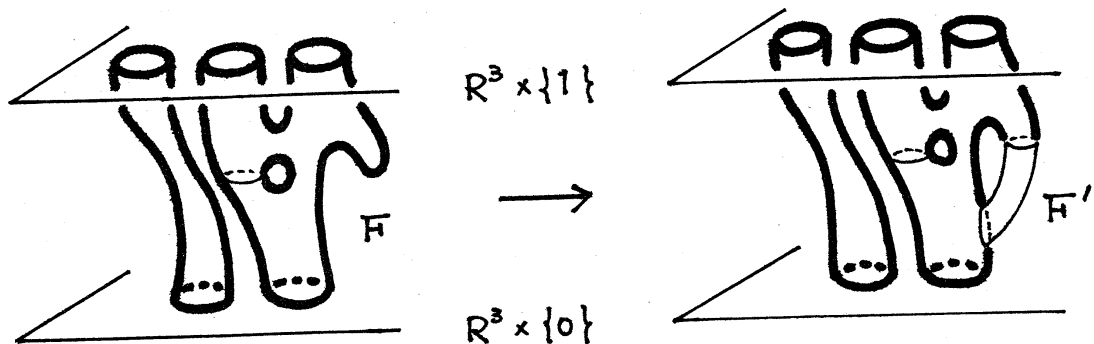


図 1

更に saddle points の levels はすべて異なるとしてよい。つまり、 $k = c(F)$ とおくと $(k+1)$ 個の数を $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$ ととることにより F の saddle points が $R^3 \times (t_i, t_{i+1})$ に 各々 1 個ずつあるとしてよい。ここで、 $(F \cap R^3 \times \{t_i\}, R^3 \times \{t_i\})$ を (L_{t_i}, R^3) で表わすことにすると 次の三角不等式から、 F が唯 1 個の

saddle point を有する場合に示せば十分であるとわかる。

$$|m(L_0) - m(L_1)| \leq |m(L_{t_0}) - m(L_{t_1})| + |m(L_{t_1}) - m(L_{t_2})| + \cdots + |m(L_{t_{k-1}}) - m(L_{t_k})|.$$

さて F が唯一個の saddle point のみを有し、つまり、 L_1 が L_0 から唯一回 fusion すると得られるとする。この fusion を実現する band を β_0 とし、 L_0 の連結 Seifert 曲面を S_0 とする。

$\beta_0 \cap S_0$ を β_0 に沿、た piping により、柳川 [6] の方法で消去することにより、 L_1 の連結 Seifert 曲面 S_1 が得られる。

さて、 $H_1(S_1 - \beta_0)$ の自由アーベル群としての basis を表現する simple loops $\{a_i\}$ 及び β_0 を1度だけ通過する simple loop b_0 を、 $\{a_i\} \cup b_0$ が $H_1(S_1)$ の自由アーベル群としての basis を表現するようにとる。すると、 L_1 の Seifert 行列は、

$$\left| \begin{array}{c|c} lk(a_i, a_j^+) & lk(a_i, b_0^+) \\ \hline lk(b_0, a_j^+) & lk(b_0, b_0^+) \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{で得られ、} H_1(\tilde{E}(L_1); \mathbb{Z}) \text{ は}$$

$$\left| \begin{array}{c|c} lk(a_i, a_j^+) - t lk(a_j, a_i^+) & lk(a_i, b_0^+) - t lk(b_0, a_i^+) \\ \hline lk(b_0, a_j^+) - t lk(a_j, b_0^+) & lk(b_0, b_0^+) - t lk(b_0, b_0^+) \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n}$$

を $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -正方表現行列にもつ。

ここで、小行列 $|lk(a_i, a_j^+)|_{1 \leq i, j \leq n}$ は L_0 の Seifert 行列でもあるので、小行列 $|lk(a_i, a_j^+) - t lk(a_j, a_i^+)|_{1 \leq i, j \leq n}$ は、 $H_1(\tilde{E}(L_0); \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -正方表現行列であり、これは定義により、次数 $m(L_0)$ の正方行列に可約である。故に 先にあげた

$H_1(\widehat{E}(L_1); \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ - 正方表現行列は, 次数 $m(L_0) + 1$ までには少なくとも可約である。故に $m(L_1) \leq m(L_0) + 1$ を得る。

逆も, L_0 が L_1 から唯 1 回 fission すると得られることから, 同様に議論ができ, $m(L_0) \leq m(L_1) + 1$ が得られる。

以上から, $|m(L_0) - m(L_1)| \leq 1$ が得られる。

これにより, 証明が完了した。

付記. 上の定理の系として, [4], [5], [1] の結び目の bordism の critical points の個数の評価が得られる。つまり, $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ に proper に埋められたコンパクトな有向 P.L. 曲面 F 及び結び目 $(K, \mathbb{R}^3) = (F \cap \mathbb{R}^3 \times \{0\}, \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ について, $c(F) \geq m(K) + 1$ であり, ここで, K が絡み輪であつても良いことがわかる。

F のコンパクト性から 十分大なる数 t をとれば, F は $\mathbb{R}^3 \times [0, t)$ にある。ここで, $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ に trivial knot をとり, F の maximal points のひとつと piping で結ぶことにより, 新たに link cobordism F' が得られる。定理より, $c(F') \geq |m(L) - m(\text{a trivial knot})|$ であり, $m(\text{a trivial knot}) = 0$, $c(F) - 1 = c(F')$ であることから, $c(F) \geq m(L) + 1$ が得られる。

最後に, 最近に河内 [2] が得た link bordism のより精緻

な評価を報告しておく。

$R^3 \times [0, \infty)$ に proper に埋められたコンパクトな有向 P. L. 曲面 F 及び 絡み輪 $(L, R^3) = (F \cap R^3 \times \{0\}, R^3 \times \{0\})$ について, $c(F) - 2C_0(F) \geq m(L) + 1$ である。ここで, $C_0(F)$ は F の minimal points の個数を表わす。

References

- (1) Hosokawa, F., Kawauchi, A., Nakanishi, Y., Sakuma, M.: Note on critical points of surface in 4-space. Kobe J. Math., (to appear).
- (2) Kawauchi, A.: On critical points of proper surfaces in the upper half-space. (to appear).
- (3) Kawauchi, A., Shibuya, T., Suzuki, S.: Descriptions on surfaces in four-space, I. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10, 75-125 (1982); *ibid.*, II. *ibid.* 11, 31-69 (1983).
- (4) Nakanishi, Y., Nakagawa, Y.: On ribbon knots. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10, 423-430 (1982).
- (5) Saito, M.: Minimal number of saddle points of proper embedded surfaces in the 4-ball. Kobe J. Math. (to Appear).
- (6) Yanagawa, T.: On ribbon 2-knots; the 3-manifolds bounded by the 2-knots. Osaka J. Math. 6, 447-464 (1969). *ibid.* II; the second homotopy group of the complementary domain. Osaka J. Math. 6, 465-473 (1969).