

Left cells in Coxeter groups

G. Lusztig (MIT)

0. 序

$\mathfrak{g}$ = 半単純 Lie 群

$U(\mathfrak{g})$ = enveloping algebra

$\text{Prim}_0 U(\mathfrak{g}) = \{ \text{primitive ideals of } U(\mathfrak{g}) \text{ with the trivial central character} \}$

W = Weyl 群

とする。 W には, left cell と呼ばれる部分集合の族 $\{\Gamma_i\}$ が, 初等的なやり方で, 定義され

$$W = \bigsqcup_i \Gamma_i$$

$\exists$ intrinsic bijection : $\{\Gamma_i\} \xrightarrow{\sim} \text{Prim}_0 U(\mathfrak{g})$

となっている。この意味で, $\text{Prim}_0 U(\mathfrak{g})$ の情報は, 原則的には, W に含まれていることになるが, さらに, left cell という概念は, 一般の Coxeter 群に対して定義できるという利便をもつ。

1. Left cell の定義

1.1. $(W, S) = \text{Coxeter 系}$ ($|S| < \infty$)

$l : W \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ length function

$\leq$: Bruhat order on W

とする。この時、次の条件をみたす $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -algebra H が、一意に存在する:

1. H は、free $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -module で、 W で parametrize される basis $\{T_w\}_{w \in W}$ をもつ。

2. $T_w T_{w'} = T_{ww'}$, if $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$

$$(T_s + 1)(T_s - q) = 0 \quad (s \in S).$$

この algebra を、Hecke algebra, または、Iwahori algebra と呼ぶ。

注意. 上の条件が、compatible であることは、自明のことではない。[1; p55] を見よ。

1.2. $H \otimes \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ には、次の条件をみたす新しい basis $\{C_w\}_{w \in W}$ が、一意に存在する [4]:

$$\begin{aligned} (a) \quad C_w &= \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(y)} P_{y,w}(q^{-1}) T_y \\ &= \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} q^{-\frac{\ell(w)}{2} + \ell(y)} P_{y,w}(q) (T_{y^{-1}})^{-1} \end{aligned}$$

$$(b) \quad P_{y,w} \in \mathbb{Z}[q]$$

$$(c) \quad \deg P_{y,w} \leq \frac{1}{2} (\ell(w) - \ell(y) - 1) \quad , \text{ if } y < w$$

$$P_{w,w} = 1.$$

(定義は簡単だが、理解するのは困難.)

1.3. $W = \text{Weyl 群}$. または, affine Weyl 群 のときは, Schubert variety の上の "intersection cohomology" を用いて, $P_{y,w}$ の geometric picture が, 得られる [5]. この時, (a) は, Poincaré duality に, (b) は, 奇数次の cohomology の vanishing 等々に対応する。

1.4. $\{C_w\}$ は, basis であるから, 任意の $u \in S$ に対し,

$$T_u C_w = \sum_{y \in W} C_y a_{y,w}^u \quad (a_{y,w}^u \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}])$$
と書ける. (C_w は, ある multiplicative property をもっていて, この右辺は特別の形をしている [4].) この時, 次のように定義する.

$$y \leq_L w \Leftrightarrow \exists y = y_0, y_1, \dots, y_n = w \quad \exists a_1, \dots, a_n \\ \text{s.t.} \quad a_{y_i, y_{i-1}}^{a_i} \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$y \sim_L w \Leftrightarrow y \leq_L w \quad \text{and} \quad y \geq_L w.$$

すると, $\sim_L$ は同値関係であり, これに関する同値類を, left cell と呼ぶ. $T_u C_w$ のかわりに, $C_w T_u$ を用いて, right cell が定義され, 両方を用いて two sided cell が, 同様に定義される [4].

1.5. Γ を, W の left cell とする. 大雑把にいて,
 $\{C_w\}_{w \in \Gamma} = \text{a basis of a left } H\text{-module}.$

正確な定義は [9]. $q \rightarrow 1$ と特殊化すると, この left H -module は, left W -module を与える。これを [7] と書く。 W が有限の時, この [7] として, どのような表現が出てくるかは, 予想はされているが, まだ証明できない [8].

1.6. W が, 半単純 Lie 群 $G/\mathbb{C}$ の Weyl 群 のとき,

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \{ \text{two sided cell} \} \\
 & \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{special representation of } W \} \\
 & = \{ \text{Joseph's Goldie rank representation} \} \\
 & \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{special unipotent class in } G^\# \}
 \end{aligned}$$

two sided cell C に対応する, special unipotent class を $u^{G^\#}$ とすると

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \# \{ \text{left cell in } C \} \\
 & = \dim H^{\text{top}}(B_u)^{A(u)}
 \end{aligned}$$

ここで, special representation B 及び, special unipotent class の定義は [7], Goldie rank representation の定義は, [3] を見よ。また,

$$G^\# = G \text{ の dual group}$$

$$B_u = \{ \text{Borel subgroup } \ni u \}.$$

$$A(u) = \pi_0(Z_{G^\#}(u)).$$

1.7. (予想) W が, affine Weyl 群のとき.

(a) $\{ \text{two sided cell} \}$

$\begin{matrix} 1:1 \\ \leftrightarrow \end{matrix} \{ \text{unipotent class in } G^\# \}$

two sided cell C に対応する unipotent class を $u^{G^\#}$ とすると

(b) $\# \{ \text{left cell in } C \}$

$$= \sum_i (-1)^i \dim H^i(B_u)^{A(u)}.$$

注意. $H^{\text{odd}}(B_u) = 0$ が知られているので, (b) の右辺 > 0 .

1.8. (予想) W を, 一般の Coxeter 群とする.

$\# \{ \text{two sided cell} \} < \infty$

2. Involutions.

2.1. $W = \mathfrak{S}_n$ のとき, W の各 left cell は, 丁度一つだけ involution を含む [4][6].

2.2. $W = \text{Weyl 群}$, $\Gamma = \text{left cell}$ とすると

$\Gamma \ni \text{Duflo involution}$.

2.3. 別のやり方で、2.2 の Γ が、involution を含むことを示す。

$E \in W^\vee = \{ \text{irreducible } W\text{-module} \}$

$E(q) = \text{corresponding representation of } H \otimes \mathbb{C}((q^{1/2}))$
(cf. [9])

$a_E \geq 0$ を

$$\text{Tr}(q^{-l(x)/2} T_x; E(q)) = c_{x,E} q^{-a_E/2} + (\text{higher powers of } q^{1/2}), \quad (\forall x \in W)$$

となる最小の整数とする。

命題 (a) $c_{x,E} \geq 0$ ($\forall E \in W^\vee$) となる $x \in \Gamma$ が、一意に存在する。

(b) このとき、 $x^2 = 1$ 。

注意. この x と、Duflo involution は、一致するものと思われる。

2.4. (予想) 任意の Coxeter 群の、任意の left cell は、involution を含む。

2.5. W を classical type の Weyl 群とする。

定理. $\# \{ \text{involutions in a fixed left cell} \} = 2^d$
 (d はある整数, $\# = \text{cardinality}$)

証明. $\Gamma = \text{left cell}$

$$\Gamma^* = \{ x \in \Gamma \mid c_{x,E} \neq 0 \text{ for some } E \in W^\vee \}$$

とすると, 次のことが, わかっている。

(a) $W \neq W(E_8)$ なら, $\Gamma^* = \Gamma \cap \Gamma^{-1}$

(b) $W = \text{classical type}$ なら, $\Gamma^* = \{ \text{involutions in } \Gamma \}$

(c) 任意の Weyl 群 W と, W の任意の left cells Γ, Δ に対し,
 $\#(\Gamma \cap \Delta^{-1}) = \dim \text{Hom}_W([\Gamma], [\Delta])$

(1.5 節を参照) これより, 次のことを示せば, 十分。

(d) W が, classical type なら, 任意の left cell の与える表現は, multiplicity free で, 2^d 個の既約成分を持つ。
 これを, 以下の節で示す。

2.6. (この節については [10].)

$G = \text{有限群}$

$$\mathcal{U}(G) = \{ (x, \sigma) \mid x \in G, \sigma \in Z_G(x)^\vee \} / \text{conjugacy}$$

$\mathcal{U}(G)$ の二元 $m = (x, \sigma)$, $m' = (x', \sigma')$ に対し.

$$\{m, m'\} = \sum_{\substack{g \in G \\ gxg^{-1} = x', g\sigma g^{-1} = \sigma'}} \text{Tr}(g\sigma g^{-1}, \sigma') \text{Tr}(g^{-1}x'g, \sigma) \times \frac{1}{|Z_G(x)|} \frac{1}{|Z_G(x')|}$$

とし、 $\mathcal{U}(G)$ 上の複素数値関数 f の Fourier 変換 $\hat{f}$ を次のように定義する.

$$\hat{f}(m) = \sum_{m'} \{m, m'\} f(m').$$

2.7. G が可換群なら.

$$\mathcal{U}(G) = G \times G^\vee$$

$$\{(x, \sigma), (x', \sigma')\} = \frac{1}{|G|} \sigma'(x) \sigma(x'^{-1})$$

$$\hat{f}(x, \sigma) = \frac{1}{|G|} \sum_{(x', \sigma')} \sigma'(x) \sigma(x'^{-1}) f(x', \sigma').$$

2.8. $f: \mathcal{U}(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$

が Lagrangian であるとは、次の条件がみたされること:

$$(a) \quad \hat{\hat{f}} = f$$

$$(b) \quad f(1, 1) = 1.$$

2.9. $G = \mathbb{F}_p^d$ の時.

$\{\text{Lagrangian functions}\}$

$= \{\text{Lagrangian subspaces の特性関数}\}$

但し、Lagrangian subspace とは、symplectic form $\{, \}$ に関する maximal totally isotropic subspace のこと。

証明. $f = \text{Lagrangian function}$ とすると

8.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \hat{f}(x) = \frac{1}{|q|} \sum_{y \in \mathcal{M}(q)} \{x, y\} f(y) \\
 &\leq \frac{1}{|q|} \sum_{y \in \mathcal{M}(q)} f(y) = \hat{f}(0) = f(0). \\
 &\quad (\text{但し, } 0 = (1, 1).)
 \end{aligned}$$

これから.

$$f(x) = 0 \quad x \neq 1$$

$$|f^{-1}(1)| = |q|$$

$$\{x, y\} = 1 \quad (x, y \in f^{-1}(1))$$

かわかり、 f は Lagrangian subspace の特性函数になる。
逆は、容易。

2.10. $G(\mathbb{F}_q) =$ 有限 Chevalley 群

$W = G$ の Weyl 群

$B(\mathbb{F}_q) =$ Borel 部分群

$G^\# = G$ の dual group

$u = G^\#$ の special unipotent element

$$A(u) = \pi_0(Z_{G^\#}(u))$$

$$\overline{A}(u) = \text{certain quotient of } A(u) \quad ([11.] \text{ 参照.})$$

とする。良く知られているように。

$$\begin{aligned}
 W^\vee &\xleftrightarrow{1:1} \{ \text{irreducible components of } 1_{B(\mathbb{F}_q)}^{G(\mathbb{F}_q)} \} \\
 &\hookrightarrow \{ \text{unipotent representations of } G(\mathbb{F}_q) \}
 \end{aligned}$$

9.

次のことが知られている。

$\{ \text{unipotent representations of } G(\mathbb{F}_q) \}$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{1:1} \coprod_{\substack{u = \text{special unipotent} \\ (\text{modulo conjugacy})}} \mathcal{U}(\bar{A}(u)) \end{array}$$

この分割は $W^\vee$ の, two sided cells への分割と compatible.

2.11. G が classical type なら, $\bar{A}(u) = \mathbb{F}_2^d$ となる。

2.12. $W = \text{Weyl 群}$

$\Gamma = \text{left cell}$

$C = \Gamma$ を含む two sided cell

$u = C$ に対応する special unipotent element

$\mathcal{U}(\bar{A}(u))$ 上の函数 f_Γ を, $[C]$ に含まれる $p \in W^\vee$ に対応する $m \in \mathcal{U}(\bar{A}(u))$ に対しては

$$f_\Gamma(m) = (p : [\Gamma])$$

その他の $m \in \mathcal{U}(\bar{A}(u))$ に対しては

$$f_\Gamma(m) = 0$$

として, 定めると.

$$f_\Gamma = \text{Lagrangian}.$$

以上を, あわせて, 定理の証明が得られる。

(以下、1.7 の予想に関して、気づいたことを、書いておきます：行者)

$\mathfrak{f}^* = \text{Cartan subalgebra of Lie } G^\#$

$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^*$ の dual

とする。 $\lambda \in \mathfrak{f}$ の定める B 上の line bundle の first Chern class を $c_1(\lambda)$ とすると $H^2(B) \hookrightarrow H^2(B_u)^{A(u)}$ であるから、 $c_1(\lambda) \in H^2(B_u)^{A(u)}$ と思える。 $\cap$ -product により、 $\exp c_1(\lambda)$ は $H_*(B_u)_{A(u)}$ ($= A(u)$ が trivial に作用する最大の quotient) に作用する。 $H_*(B_u)_{A(u)}$ 上の、 $\cap$ の $\mathfrak{f}$ -作用と、 W -作用をあわせて、 $H_*(B_u)_{A(u)}$ 上に affine Weyl 群の表現が、実現される。

一方 $\overline{\mathcal{F}}_W$ を用いて [7] の 3 節を形式的に真似ると、次の空間上に、 affine Weyl 群の表現が、実現される。

$$i(H_{\text{top}}(B_u)_{A(u)}) \cdot S(\mathfrak{f}) \quad (\subset H_*(B))$$

但し、 $i : H_*(B_u)_{A(u)} \longrightarrow H_*(B)$ 。図式にまとめると、

$$\begin{array}{ccc} H_*(B) & \xleftarrow{i} & H_*(B_u)_{A(u)} \\ \uparrow & & \downarrow j \\ i(H_{\text{top}}(B_u)_{A(u)}) \cdot S(\mathfrak{f}) & \xleftarrow{i} & H_{\text{top}}(B_u)_{A(u)} \cdot S(\mathfrak{f}) \end{array}$$

A 型の場合は [2] より、 i は injective であり、最近、 Lascoux が、証明したという結果 (伝聞) より、包含写像 j

は、実は、等号になる。従って、

$$H_*(B_u)_{A(u)} \simeq i(H_{\text{top}}(B_u)_{A(u)}) \cdot S(I)$$

従って、 $H_*(B_u)_{A(u)}$ は、affine Weyl 群の special 表現と、
いふべきものになっている。これは、予想 1.7 (b) を支持する。

References

- [1] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie*, Chap 4.5.6.
- [2] R. Hotta, T.A. Springer: A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups, *Inventiones Math.* 41 (1977) 113-127.
- [3] A. Joseph: Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra II, *J. Algebra* 65 (1980) 284-306.
- [4] D. Kazhdan, G. Lusztig: Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Inventiones Math.* 53 (1979) 165-184.
- [5] D. Kazhdan, G. Lusztig: Schubert varieties and Poincaré duality, *Proc. Symposia in Pure Math.* 36 (1980) 185-202.

- [6] D.E. Knuth: The art of computer programming, Chap. 5.1.4. (1973)
- [7] G. Lusztig: A class of irreducible representations of a Weyl group, Proc. Kon. Nederl. Akad., A, 82(3) (1979) 323-335.
- [8] G. Lusztig: A class of irreducible representations of a Weyl group II, Proc. Kon. Nederl. Akad., A, 85(2) (1982) 219-226.
- [9] G. Lusztig: On a theorem of Benson and Curtis, J. Algebra 71 (1981) 490-498.
- [10] G. Lusztig: Unipotent representations of a finite Chevalley group of type E_8 , Quart. J. Math. Oxford (2), 30 (1979), 315-338.
- [11] G. Lusztig: Characters of reductive groups over a finite field, Annals of Math. Studies (to appear)

行者明彦 記
(阪大理)