

Isometry によって不変な閉測地線について

東工大 理 田中 実

§1. 序文

コンパクトなリーマン多様体上の閉測地線の数を調べることは興味ある問題である。この問題に関して、Gromoll と Meyer ([2]) によって得られた定理がある。

Theorem. (Gromoll, Meyer) M を単連結なコンパクトリーマン多様体とする。 M の free loop space のベッチ数から作られる数列が有界でないならば、 M 上には、閉測地線が無限に存在する。

この定理より、以下の問題を考えつく。

問題. α を単連結、コンパクトなリーマン多様体 M 上の isometry とする。もし、空間 $C^0(M, \alpha) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow M / \gamma \text{ は } \alpha(\gamma(0)) = \gamma(1) \text{ を満たす連続な曲線}\}$ のベッチ数からなる数列が有界でないならば、 α で不変な測地線は無限に存在するか？

ここで、測地線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ が τ で不変だとは、勝手な τ に対して、 $\tau(\gamma(t)) = \gamma(t+\theta)$ となる定数 $\theta (\geq 0)$ が存在する時に言う。 τ が involutive ($\tau^2 = \text{id.}$) である時、Grove [6] によって、さらに τ が素数の order の isometry に対しては著者 [9] により、それぞれ肯定的に解決された。1974 年末に Grove は素数のべき order の isometry に対しても成り立つことを主張した。(しかしながら、彼の証明には、不完全な点があることが、後に著者により指摘された。) その後、すぐに著者により独立に、それが解決された。([10]) 本論文において、有限の order をもつ isometry に対しても成り立つことを示す。

Main theorem. M をコンパクト、単連結なリーマン多様体とし、 f を M 上の isometry で、有限の order をもつとする。もし、 $C^0(M, f)$ のベッチ数からなる数列が、非有界ならば f で不変な閉測地線が無限に存在する。

注1. Cor. として、Gromoll, Meyer の定理の閉測地線の存在よりも、多様体によっては、さらに詳しい結果が得られる。つまり、恒等写像 id. と homotopic な cyclic な勝手な isometry f に対して、 f で不変な閉測地線も無限に存在する。

注2. M. Vigné-Poirrier と D. Sullivan [8] により以下の2つの性質が同値であることが示されている。

(i) M の (rational) cohomology algebra の generator は、少なくとも2つある。

(ii) M の free loop space のベッチ数からなる数列は、非有界である。

Main theorem より、Vigné-Poirrier、Sullivan の定理の拡張を考えるのは意味があるだろう。

主定理の証明の方針は、finite order をもつ isometry f で不変な閉測地線が有限本しかないと仮定することにより、 $C^0(M, f)$ のベッチ数が一様に有界になることを示す。

§2. 準備

M を $(n+1)$ 次元のコンパクトなリーマン多様体とし、 $\langle, \rangle$ を M のリーマン計量とする。 g を order s (s は自然数) の isometry とする。 $\Omega(M, g)$ を絶対連続 $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$, $g(\sigma(0)) = g(\sigma(1))$ でその速度ベクトル σ' が、 $\int_0^1 \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle dt < \infty$ である曲線からなる集合とする。 $\Omega(M, g)$ には、完備なヒルベルト・リーマン多様体の構造がはいる([4])。しかも、 $C^0(M, g)$ と $\Omega(M, g)$ は homotopy 同値になる([4])。 $\Omega(M, g)$ の各元は、自然に $\mathbb{R}$ から M への写像と考えられる。

$g^0 = \text{id.}$ と仮定したから、 $\Omega(M, g)$ の各元は、周期 S の曲線になる。 $\Omega(M, g)$ 上にパラメータの移動によって定義される $S^1 = [0, S]/\{0, S\}$ -action がある。エネルギー関数 $E^g: \Omega(M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ を、 $E^g(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt$ で定義する。 c が E^g の critical point であることと、 c が g で不変な閉測地線であることは、同値である ([4])。もし、 c が nonconst. (i.e. $E^g(c) \neq 0$) ならば、常に critical orbit $S^1 \cdot c = \{ \beta(c) \mid \beta \in S^1 \}$ 上にある。明らかに、 $S^1 \cdot c$ の各元は、 E^g の critical point である。次に、孤立した critical orbit に対して、local homological invariant と呼ばれるある種の homology を定義する。Gromoll と Meyer ([3]) によって、この homology は定義されたが、有限次元の場合には、すでに Morse により定義されたものである。まず、 $\exp$ を M の exponential map とし、 $\exp: N \rightarrow \Omega(M, g)$, $\gamma \mapsto \exp \circ \gamma$ で $\exp$ を定義する。ここで、 N は normal bundle $\pi: N \rightarrow S^1 \cdot c$ の total space を示す。 $\tilde{N} \rightarrow S^1 \cdot c$ を normal disc bundle とした時、 $\tilde{N}$ が十分小さいならば、 $\mathcal{D} = \exp(\tilde{N})$ が $S^1 \cdot c$ の tubular neighborhood になるようにできる。 c の fiber を $\mathcal{D}_c = \exp(\tilde{N}_c)$ ($\tilde{N}_c: c$ 上の fiber) とし、 E_c^g を $\mathcal{D}_c$ への E^g の制限とする。 $S^1 \cdot c$ を孤立した critical orbit としよう。もし必要なら、さらに小さい tubular neighborhood $\mathcal{D}$ をとれば、

c は $\mathcal{Q}_c$ で E_c^g の唯一の critical point とおけるようにできる。

W_c, W_c^- を c における $\mathcal{Q}_c$ 上のエネルギー関数 E_c^g に対する admissible regions ([3]) とする。孤立した critical orbit $S^1 \cdot c$ に対する E_c^g の local homological invariant $\mathcal{H}(E_c^g, S^1 \cdot c)$ を、

$$\mathcal{H}(E_c^g, S^1 \cdot c) = H_*(S^1 \cdot W_c, S^1 \cdot W_c^-)$$
で定義する。

この homology は標数 zero の体を係数とする singular homology を使う。便宜上、 c での E_c^g に対する local homological invariant $\mathcal{H}(E_c^g, c)$ を、

$$\mathcal{H}(E_c^g, c) = H_*(W_c, W_c^-)$$

で定義しておく。これらの定義は、 $W_c, W_c^-, \mathcal{Q}$ の取り方には依存しない。Gromoll と Meyer ([3]) による shifting theorem より、

$$\mathcal{H}_{k+\lambda}(E_c^g, c) = \mathcal{H}_k^0(E_c^g, c)$$

が成り立つ。ここで、 λ は c の index、 $\mathcal{H}_k^0$ は characteristic invariant を表わす。 E_c^g の degenerate part に E_c^g を制限して、 c の local homological invariant を定義したものである。 E_c^g の null space の次元は $2n$ 以下だから、 $k > 2n$ ならば、 $\mathcal{H}_k^0(E_c^g, c) = 0$ である。すなわち、[9] 27 以下の2つの評価を得ている。

$$(2.1) \quad B_k(c, g) \leq B_{k-\lambda}^0(c, g) + B_{k-\lambda-1}^0(c, g)$$

$$\text{ここ} \text{で} \quad B_k(c, g) = \dim \mathcal{H}_k(E_c^g, S^1 \cdot c), \quad B_k^0(c, g) = \dim \mathcal{H}_k^0(E_c^g, c).$$

$a < b$ を E^g の regular values とし, $(E^g)^{-1}[a, b]$ の中にある critical set は, 有限個の critical orbits, $S^1 c^1, \dots, S^1 c^r$ からなるものとする。この時, Morse の不等式を得る。

$$(2.2) \quad b_k(\Omega^b(M, g), \Omega^a(M, g)) \leq \sum_{i=1}^r B_k(c^i, g)$$

ここで, $\Omega^b(M, g) = (E^g)^{-1}[0, b]$, $b_k(\Omega^b, \Omega^a) = \dim H_k(\Omega^b, \Omega^a)$ 。

§3. index と nullity

(2.1) と (2.2) 式により, critical point の index ならびに nullity の評価と characteristic invariant $\mathcal{H}^0$ の上からのそれをする必要がある。各整数 $m (\neq 0)$ に対して, iteration map $m: \Omega(M, g) \rightarrow \Omega(M, g^m)$ を $m(c)(t) = \sigma_m(t) = \sigma(mt)$ で定義する。次の定理は, 重要な定理で, 本質的に Gromoll と Meyer ([2]) により証明されている。

Theorem 3.1. $S^1 c$ を $\Omega(M, g)$ の nonconst. ($E^g(c) \neq 0$) な critical orbit で, ある整数 $m (\neq 0)$ に対して, $S^1 c_m$ が孤立した critical orbit で, $\nu(c, g) = \nu(c_m, g^m)$ が成り立つとする。その時, 任意の k に対して, $\mathcal{H}_k^0(E_c^g, c) \cong \mathcal{H}_k^0(E_{c_m}^{g^m}, c_m)$ が成り立つ。ここで, $\nu(c, g)$ (resp. $\nu(c_m, g^m)$) は, $\Omega(M, g)$ (resp. $\Omega(M, g^m)$) の critical orbit $S^1 c$ (resp. $S^1 c_m$) の nullity を表わす。

f を order s の isometry とする。一つの critical point から生成される critical orbits の index, nullity について調べよう。もし、 γ が nonconst. な f で不変な閉測地線であるとすれば、最小周期が $s/m (\leq 1)$ であるようなある critical point c によって、 γ を表現できる。 m_0 と s_0 を互いに素な、正整数で $s_0/m_0 = s/m$ を満たすものとする。 n_0 と k_0 を、 $m_0 \cdot n_0 = 1 + s_0 \cdot k_0$ を満たすようにとる。 $\bar{c}(t) = c(t/m_0)$ と定義すれば、 $\bar{c}$ は E^g ($g = f^{m_0}$) の critical point になる。 $\bar{c}$ の最小周期は s_0 で、 $\bar{c}$ は f^{s_0} で固定されている。 $m s_0 + k m_0 \neq 0$ を満たす勝手な整数 m と k に対して、 $\bar{c}_{m s_0 + k m_0}$ は、 E^{f^k} の critical point である。 $\mathbb{Z}^2 \cdot \bar{c}_{m s_0 + k m_0}$ ($m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) は、 γ によって生成される $\Omega(M, f)$ の中のすべての critical orbits である。まず、 $\mathbb{Z}^2 \cdot \bar{c}_{m s_0 + k m_0}$ の index と nullity の公式をお求めよう。 $f = \text{id.}$ の場合、Bott ([1]) が見つけたような公式を我々は必要とする。 T_c を $\bar{c}$ に各点で直交する ∞ ベクトル場からなるベクトル空間とする。線型写像 $L: T_c \rightarrow T_c$ を

$$LX = -X'' - R(X, \bar{c}')\bar{c}'$$

で定義する。 $\lambda(\bar{c}_{m s_0 + k m_0}, f^k)$ (resp. $\nu(\bar{c}_{m s_0 + k m_0}, f^k)$) を critical orbit $\mathbb{Z}^2 \cdot \bar{c}_{m s_0 + k m_0} (\subset \Omega(M, f^k))$ の index (resp. nullity) とする。Morse ([12]) が示したように

$$(3.1) \begin{cases} \lambda(\bar{E}_{ms_0+ks_0}, f_*^k) = \sum_{\mu \in \mathbb{C}} \dim \{ X \in \bar{V}_\mathbb{C} \mid LX = \mu X, \forall t \in \mathbb{R} \text{ に対} \\ \quad \mid \tau, X(t+ms_0+ks_0) = f_*^k(X(t)) \} \\ \nu(\bar{E}_{ms_0+ks_0}, f_*^k) = \dim \{ X \in \bar{V}_\mathbb{C} \mid LX = 0 \forall t \in \mathbb{R} \text{ に対} \\ \quad \mid \tau, X(t+ms_0+ks_0) = f_*^k(X(t)) \} \end{cases}$$

となる。 $\bar{V}_\mathbb{C}$ を複素化し、それを再び $\bar{V}_\mathbb{C}$ と書く。さらに f_*, g_*, L_* を $\mathbb{C}$ -linear map に拡張し、それらを再び、同じ記号で表わす。各実数 μ と $\omega \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ に対して、 $\hat{S}_\mathbb{C}[\mu, ms_0+ks_0, \omega f_*^k] = \{ X \in \bar{V}_\mathbb{C} \mid LX = \mu X, X(t+ms_0+ks_0) = \omega f_*^k(X(t)) \}$ と定義する。

Lemma 3.2. 任意の実数 μ と $ms_0+ks_0 \neq 0$ 及び任意の整数 m, k に対して、1) 2) 3) が成り立つ。

$$1) \quad \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, ms_0+ks_0, f_*^k] = \bigoplus_{\omega \in (ms_0+ks_0)\mathbb{S}^1} \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, 1, \omega g_*] \cap \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, ms_0+ks_0, f_*^k]$$

$$2) \quad \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, 1, \omega g_*] \cap \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, ms_0+ks_0, f_*^k] = \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker \{ (f_*^{s_0})^{ms_0+ks_0} - \omega - (ms_0+ks_0) \}$$

ここで、 $f_*^{s_0} : \bar{V}_\mathbb{C} \rightarrow \bar{V}_\mathbb{C}$ を、 $(f_*^{s_0} X)(t) = f_*^{s_0}(X(t))$ と定義した。

$$3) \quad \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker \{ (f_*^{s_0})^{ms_0+ks_0} - \omega - (ms_0+ks_0) \} = \bigoplus_{\sum ms_0+ks_0 = \alpha-1} \hat{S}_\mathbb{C}[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker (f_*^{s_0} - Z) \\ = \mathbb{C} \cdot Z, \quad \alpha = \omega ms_0+ks_0.$$

証明は, f が prime power order の場合とまったく同様にできる。([10])。この Lemma より,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_C[\mu, m_{S_0+L} m_0, f_*^k] &= \bigoplus_{\alpha^{S/S_0}=1} \bigoplus_{\omega^{m_{S_0+L} m_0}=\alpha} \bigoplus_{\sum m_{n_0+L} k_0=\alpha^{-1}} \tilde{S}_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap \\ &\quad \ker(f_*^{S_0} - Z) \\ &= \bigoplus_{\alpha^{S/S_0}=1} \bigoplus_{\omega^{m_{S_0+L} m_0}=\alpha} \bigoplus_{\sum m_{n_0+L} k_0=\alpha^{-1}} \tilde{S}_C[\mu, 1, \omega g_*] \\ &\quad \cap \ker(f_*^{S_0} - Z) \circ \end{aligned}$$

各 $Z \in S^2 \subset \mathbb{C}$ と $\omega \in S^1$ に対して, $\Lambda^Z(\omega) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}} \dim_{\mathbb{C}} \{ \tilde{S}_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker(f_*^{S_0} - Z) \}$, $N^Z(\omega) = \dim_{\mathbb{C}} \{ \tilde{S}_C[\rho, 1, \omega g_*] \cap \ker(f_*^{S_0} - Z) \}$ とおけば, S^1 上の非負整数値関数 Λ^Z, N^Z が得られる。(3.1) 式と今のことから,

$$(3.2) \quad \begin{cases} \lambda(\bar{C}_{m_{S_0+L} m_0}, f_*^k) = \sum_{\alpha^{S/S_0}=1} \sum_{\omega^{m_{S_0+L} m_0}=\alpha} \sum_{\sum m_{n_0+L} k_0=\alpha^{-1}} \Lambda^Z(\omega) \\ \nu(\bar{C}_{m_{S_0+L} m_0}, f_*^k) = \sum_{\alpha^{S/S_0}=1} \sum_{\omega^{m_{S_0+L} m_0}=\alpha} \sum_{\sum m_{n_0+L} k_0=\alpha^{-1}} N^Z(\omega) \end{cases}$$

を得る。関数 Λ^Z, N^Z は, 以下の性質を持つ。

(3.3) 各 $Z \in S^2$ に対して, $N^Z(\omega) \neq 0$ となる真 $\omega \in S^1$ は, 高々, $2n$ 個である。その真を, Z に関する Poincaré points と呼ぶ。

(3.4) Λ^Z は, Z に関する Poincaré points を除いて, 局所一定である。

(3.5) 各 Z, ω_0 に対して, $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \Lambda^Z(\omega) \geq \Lambda^Z(\omega_0)$ 。

(3.6) $\ker(f_*^{s_0} - Z) = \{0\}$ なる Z に対しては, $\Lambda^2 \cong \mathbb{N}^2 = 0$.

(3.2) 式と (3.4), (3.5), (3.6) より, 以下の Lemma を得る.

Lemma 3.3. 各整数 l , $0 \leq l < s/s_0$ に対して, 全ての $m \in D_l = \{m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \mid mn_0 + k_0 \equiv l \pmod{s/s_0}\}$ に対して, $\lambda(\bar{c}_{ms_0+m_0}, f) = 0$ であるか. そうでなければある正数 ε_l と a_l が存在して,

$\lambda(\bar{c}_{m_1 s_0 + m_0}, f) - \lambda(\bar{c}_{m_2 s_0 + m_0}, f) \geq (m_1 - m_2) \varepsilon_l - a_l$
が勝手な $m_i \in D_l$, $m_1 \geq m_2$, $i=1, 2$ に対して, 成り立つ.

(3.2) 式と (3.3), (3.6) より次の重要な Lemma を得る.

Lemma 3.4. 各整数 l , $0 \leq l < s/s_0$ に対して, 有限個の正整数 $k_1, \dots, k_g$ と数列 m_j^i , $i > 0, j=1, \dots, g$ が決まり以下の性質を満たす. $\{m_j^i, k_j\}$ は互いに異なり, $\{m_j^i, k_j \mid j=1, \dots, g, i > 0\} = \{ms_0 + m_0 \mid m \in D_l\}$ を満たしさらに, $\nu(\bar{c}_{m_j^i, k_j}, f) = \nu(\bar{c}_{m_j^i, k_j}, f|_{\text{Fix}(f^{s_0 s_j^i})}) = \nu(\bar{c}_{k_j}, f^{\pm}|_{\text{Fix}(f^{s_0 s_j^i})})$ を満たす.

ここで, s_j^i は, $(m_j^i, s_j^i) = 1$ で, s/s_0 の約数のうちで最大の整数を表わす. 上は, $l \cdot m_j^i \equiv 1 \pmod{s_0 s_j^i}$

を満たす整数である。 $\nu(\bar{c}_m, f^{\bar{F}}|_{\text{Fix}(f^{\bar{S}})})$ は critical orbit $S^1\bar{c}_m$ の $\Omega(\text{Fix}(f^{\bar{S}}), f^{\bar{F}}|_{\text{Fix}(f^{\bar{S}})})$ 内における nullity を表わす。
 $\text{Fix}(f^{\bar{S}})$ は $f^{\bar{S}}$ の不動点からなる集合で、 M の compact, totally geodesic な submanifold になる。

これで主定理の証明の準備がほぼすんだ。証明の前に、必要な Cor. を2つあげておく。もし critical orbit $S^1\bar{c}_{m_j^*k_j}$ が孤立しているならば、Theorem 3.1 の証明と同様な方法により、

$$\mathcal{H}^0(E_{\bar{c}_{m_j^*k_j}}^{f|_{\text{Fix}(f^{S_0S_j^*})}}, \bar{c}_{m_j^*k_j}) = \mathcal{H}^0(E_{\bar{c}_{m_j^*k_j}}^{f|_{\text{Fix}(f^{S_0S_j^*})}}, \bar{c}_{m_j^*k_j})$$

が成り立つ。また、Theorem 3.1 より、勝手な k に対して

$$\mathcal{H}_k^0(E_{\bar{c}_{m_j^*k_j}}^{f|_{\text{Fix}(f^{S_0S_j^*})}}, \bar{c}_{m_j^*k_j}) \cong \mathcal{H}_k^0(E_{\bar{c}_{k_j}}^{f^k|_{\text{Fix}(f^{S_0S_j^*})}}, \bar{c}_{k_j})$$

を得る。ここで、 $\mathcal{H}^0(E_c^{f^{\bar{F}}|_{\text{Fix}(f^{\bar{S}})}}, c)$ は、 $\Omega(\text{Fix}(f^{\bar{S}}), f^{\bar{F}}|_{\text{Fix}(f^{\bar{S}})})$ 上で定義されたエネルギー関数 $E^{f^{\bar{F}}|_{\text{Fix}(f^{\bar{S}})}}$ とその critical point c に対して定義された characteristic invariant を示す。上のことから、以下の corollary を得る。

Corollary 3.5. すべての critical orbits $S^1\bar{c}_{m_{S_0}+m_0}$

, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, は $\Omega(M, f)$ 内で孤立した critical orbits とする。
 その時、すべての k と $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ に対して、 $B_k^0(\bar{c}_{msotmo}, f) \leq B$ となる定数 B が存在する。さらに任意の $k > 2m$ と m に対して、 $B_k^0(\bar{c}_{msotmo}, f) = 0$ となる。

(2.1) 式と Lemma 3.3 より,

Corollary 3.6. Corollary 3.5 の仮定の下で, $B_k(\bar{c}_{msotmo}, f)$ は一様に $2B$ で上からおさえられる。さらに、勝手な $k > 2m+1$ に対して、 $B_k(\bar{c}_{msotmo}, f) \neq 0$ なる critical orbits $\bar{c}_{msotmo}^{\pm}$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, の個数は、 k に依存しないある定数 C をこえない。

Main theorem 3.7. M を compact, simply connected なリーマン多様体とし、 f を有限の order を持つ isometry とする。もし $C^0(M, f)$ の Betti 数をつくる数列が非有界ならば、 f で不変な閉測地線は無限に存在する。

注、 M は simply connected と仮定したから、 $C^0(M, f)$ の各次元の Betti 数は有限である。([11])。

(証明) もし、 f で不変な閉測地線が有限本しかないとすれば、有限個の $E^{f^{m_i}}$ の critical point c_i ($1 \leq i \leq r$,

$n_i \in \mathbb{Z}^+$) で $\Omega(M, f)$ 内の任意の nonconstant critical point は、ある i と m に対して、critical orbit $\dot{S}^\pm C_m^i$ 内に存在するように critical points $C^i (1 \leq i \leq r)$ を選べる。Cor. 3.5 と 3.6 で決まった critical point C^i に対する定数を B^i , C^i とする。 $\hat{B} = \max \{B^i; 1 \leq i \leq r\}$, $\hat{C} = \sum_{i=1}^r C^i$ とおく。任意の $k > 2n+1$ に対して、 $B_k(C_m^i, f) \neq 0$ なる critical orbits $\dot{S}^\pm C_m^i \in \Omega(M, f)$ の個数は $\hat{C}$ 以下である。Morse の不等式 ((2.2)) より、勝手な regular values $a < \theta$ と $k (> 2n+1)$ に対して、

$$b_k(\Omega^\theta, \Omega^a) \leq 2 \hat{C} \hat{B}$$

となる。ここで、 $\Omega^\theta = \Omega^\theta(M, f)$ と書いた。 a として、 $0 < a < \min \{E^{F^{n_i}}(C^i); 1 \leq i \leq r\}$ と選べば、 $\text{Fix}(f)$ は Ω^a の強変位レトラクト ([4]) だから、勝手な k に対して

$$b_k(\Omega^\theta, \Omega^a) = b_k(\Omega^\theta, \text{Fix}(f))$$

となる。 $k > n+1$ なる k に対しては、 $b_k(\text{Fix}(f)) = 0$ より勝手な $k (> 2n+1)$ に対して、 (exact sequence of)

$$b_k(\Omega^\theta) = b_k(\Omega^\theta, \text{Fix}(f))$$

となる。 $k (> 2n+1)$ を勝手に選び、固定した時、十分大きな regular value θ を選べば、Morse の不等式より、全ての regular value $d (> \theta)$ に対して、

$$b_k(\Omega^d, \Omega^\theta) = \text{ind}(\Omega^d, \Omega^\theta) = 0$$

となる。故に、 $b_k(\Omega) = b_k(\Omega^t) = b_k(\Omega^t, \text{Fix}(f)) \leq 2\hat{C}\hat{B}$ となり、定理の仮定に及す。

Bibliography

- [1] R. Bott, On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), 171-206.
- [2] D. Gromoll, W. Meyer, Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds, J. Differential geometry 3 (1969), 493-510.
- [3] _____, On differentiable functions with isolated critical points, Topology 8 (1969), 361-369.
- [4] K. Grove, Condition (C) for the energy integral on certain path-spaces and applications to the theory of geodesics, J. Differential Geometry 8 (1973), 207-223.
- [5] _____, Isometry-invariant geodesics, Topology 13 (1974), 281-292.
- [6] _____, Involution-invariant geodesics, Math. Scand. 36 (1975), 97-108.
- [7] K. Grove and M. Tanaka, On the number of invariant closed geodesics, to appear in Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976)
- [8] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan, The homology theory of the closed geodesic problem, to appear in J. Differential geometry.
- [9] M. Tanaka, On invariant closed geodesics under isometries, to appear in Kōdai Math. Sem. Rep.
- [10] _____, Invariant closed geodesics under isometries of prime power order, to appear.
- [11] J. P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of

Math. 54 (1951), 425-505.

[12] M.Morse, The calculus of variations in the large, Amer.
Math.Soc.Colloq.Publ. vol. 18, (1934).