

ON CERTAIN TWO PARAMETER DEFORMATIONS OF MULTIPLE ZETA VALUES

神戸大学大学院理学研究科 加藤正輝
MASAKI KATO

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, KOBE UNIVERSITY

1. はじめに

本稿は 2019 年 11 月に行われた研究集会「多重ゼータ値の諸相」における筆者の講演内容をまとめたものである。講演では説明が駆け足になってしまった部分についても、本稿では出来る限り詳述するように努めたが、紙幅の都合もあり、主定理の証明については省略させていただいた。もし証明についても知りたい方は、[8] を見ていただきたい。

さて、本稿の題目にある多重ゼータ値の 2 パラメータ変形とは、多重ゼータ値

$$\zeta(\mathbf{k}) := \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>1} \times \mathbb{Z}_{>0}^{r-1})$$

の q 類似の p 変形のことを指す。このような q -特殊関数の変形は楕円特殊関数と呼ばれ、可積分系や表現論、数理物理等の分野において近年活発に研究されている。本稿の目的は、このような変形を多重ゼータ値に対しても導入し、その基本的な性質を調べることにある。

本論に進む前に、楕円特殊関数の例の一つを見ておこう。ここでは、Ruijsenaars [12] によって導入された楕円ガンマ関数を取り上げる。楕円ガンマ関数は次のように定義される。 p, q を $0 < |p|, |q| < 1$ なる複素数とし、 $z \in \mathbb{C}$ とする。楕円ガンマ関数 $\Gamma(z; p, q)$ を

$$\Gamma(z; p, q) := \prod_{m,n=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1}p^{m+1}q^{m+1}}{1 - zp^mq^n}.$$

と定める。 q -shifted factorial $(z; q)_{\infty}$ を

$$(z; q)_{\infty} := \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i z)$$

で定めると、楕円ガンマ関数 $\Gamma(z; p, q)$ の $p \rightarrow 0$ の極限は

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Gamma(z; p, q) = \frac{1}{(z; q)_{\infty}}$$

で与えられることは容易にわかる。さらに以下の公式が成り立つ (例えば、[5] の §1.10 を参照):

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^{1-x} \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^x; q)_{\infty}} = \Gamma(x),$$

ここに $\Gamma(x)$ は通常のガンマ関数を表す。

楕円ガンマ関数が通常のガンマ関数の類似物であることは、以下の差分関係式からも見て取れる。

$$\begin{aligned} \Gamma(pz; p, q) &= \theta_0(z; q) \Gamma(z; p, q), \\ \Gamma(qz; p, q) &= \theta_0(z; p) \Gamma(z; p, q), \end{aligned}$$

ここに、 $\theta_0(z; q)$ は以下のように定義されるテータ関数を表す:

$$\theta_0(z; q) := (z; q)_{\infty} (qz^{-1}; q)_{\infty}.$$

この差分関係式は、通常のガンマ関数の差分関係式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ の楕円類似である。その他の楕円ガンマ関数の基本的性質と応用については、[4, 10, 12] 等を参照していただきたい。

近年の研究においては、楕円ガンマ関数をはじめとする楕円特殊関数が非常に豊かな構造を持つことや様々な応用を持つことが判明してきている。よって、このような変形を多重ゼータ値に対しても考えることができれば、それは非常に興味深い性質を持つことが期待できるのである。

2. 関数 ψ_k と KRONECKER 関数

この節では、本論文で基本的な役割を果たす関数 ψ_k およびその母関数とみなせる Kronecker 関数 $F(w, z; q)$ を導入し、それらの基本的性質を調べる。この節では q は $0 < |q| < 1$ なる複素数を表すものとする。

関数 ψ_k は以下のように定義される。 $z \in \mathbb{C}$ および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、関数 $G_k(z; q)$ を

$$G_k(z; q) := \prod_{n_0, \dots, n_k \geq 0} (1 - zq^{n_0 + \dots + n_k})^{(-1)^k} (1 - z^{-1}q^{n_0 + \dots + n_k + k+1})$$

と定める。 $G_k(z; q)$ は西澤 [11] によって導入された多重楕円ガンマ関数の特別な場合である。関数 $\psi_k(z; q)$ は

$$\psi_k(z; q) := z \frac{d}{dz} \log G_k(z; q)$$

と定義される。

関数 ψ_k の基本的な性質は以下の通り。

命題 2.1. (a) $k \geq 0$ に対して、

$$\psi_k(qz, \tau) = \psi_k(z, q) + \psi_{k-1}(z, q),$$

ここに、 $\psi_{-1}(z, \tau) := -1$ とおいた。

(b) $k \geq 0$ とする。 $|q|^{k+1} < |z| < 1$ のとき、

$$\psi_k(z; q) = (-1)^{k+1} \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{z^n}{(1 - q^n)^{k+1}}.$$

Kronecker 関数を導入しよう。テータ関数 $\theta(z; q)$ を

$$\theta(z; q) := iq^{\frac{1}{8}} (z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^{-1}q^m)(1 - zq^m)(1 - q^m)$$

で定め、Kronecker 関数 $F(w, z; q)$ を

$$F(w, z; q) := \frac{\theta'(1; q)\theta(zw; q)}{\theta(z; q)\theta(w, q)}$$

で定める。以下の命題により、Kronecker 関数は、 ψ_k の母関数とみなせる。

命題 2.2. $|q| < |z| < 1$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ を固定する。このとき $F(w, z; q)$ は、 $w = 1$ の周りで以下のように Laurent 展開される：

$$F(w, z; q) = \frac{1}{w-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(q^k z; q) (w-1)^k.$$

命題 2.2 は、 $F(w, z; q)$ が以下のような級数表示を持つ ([13] を参照) ことから容易に従う：

$$F(w, z; q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z^n}{q^n w - 1}.$$

本稿における、Kronecker 関数の最も重要な性質として、以下の Fay の恒等式が挙げられる。

定理 2.3 (Fay の恒等式)。

$$F(w_1, z_1; q) F(w_2, z_2; q) = F(w_1, z_1 z_2; q) F(w_1^{-1} w_2, z_2; q) + F(w_2, z_1 z_2; q) F(w_1 w_2^{-1}, z_1; q).$$

定理 2.3 は、一般の Riemann 面の場合の Fay の trisecant 公式 ([3]) の楕円曲線の場合である。

3. 多重ゼータ値の q 類似

この節では、多重ゼータ値の q 類似について簡単に復習し、その後、それらの母関数とみなすことができる積分 $I(l, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ を導入する。この節を通して、 q は $0 < |q| < 1$ なる複素数を表すものとする。

多重ゼータ値の q 類似にはいくつかのモデルが存在するが、本稿では、Bachmann-Kühn [1] によって導入された q 類似に注目する。

定義 3.1 (Bachmann-Kühn [1]). $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、ブラケット $[s_1, \dots, s_l]$ を

$$[s_1, \dots, s_l] := \frac{1}{(s_1 - 1)! \cdots (s_l - 1)!} \sum_{\substack{n_1 > \cdots > n_l > 0 \\ d_1, \dots, d_l > 0}} d_1^{s_1-1} \cdots d_l^{s_l-1} q^{n_1 d_1 + \cdots + n_l d_l}$$

で定める。

以下の命題により、ブラケット $[s_1, \dots, s_l]$ は多重ゼータ値の q 類似とみなすことができる：

命題 3.2 ([1], Proposition 6.4). $s_1 > 1$ のとき、

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^{s_1 + \cdots + s_l} [s_1, \dots, s_l] = \zeta(s_1, \dots, s_l).$$

Zudilin [14] はブラケット $[s_1, \dots, s_l]$ の一般化として、以下のような q -級数を導入した：

定義 3.3 (Zudilin [14]). $s_1, \dots, s_l, r_1, \dots, r_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、多重 q -ゼータブラケットを

$$3 \left[\begin{matrix} s_1, \dots, s_l \\ r_1, \dots, r_l \end{matrix} \right] := \sum_{\substack{m_1, \dots, m_l > 0 \\ d_1, \dots, d_l > 0}} \frac{m_1^{r_1-1} d_1^{s_1-1} \cdots m_l^{r_l-1} d_l^{s_l-1} q^{(m_1 + \cdots + m_l)d_1 + (m_2 + \cdots + m_l)d_2 + \cdots + m_l d_l}}{(r_1 - 1)!(s_1 - 1)! \cdots (r_l - 1)!(s_l - 1)!}$$

で定める。特に、

$$3 \left[\begin{matrix} s_1, \dots, s_l \\ 1, \dots, 1 \end{matrix} \right] = [s_1, \dots, s_l]$$

が成り立つ。

注意 3.4. Bachmann [2] は、 $[s_1, \dots, s_n]$ の別の一般化として、双ブラケット (bi-bracket) という q -級数を導入している。双ブラケットは、多重 q -ブラケットで表すことができる。逆に、多重 q -ゼータブラケットを双ブラケットで表すことも可能である。([14] の Proposition 3 を参照。)

ここで、多重 q -ゼータブラケットの母関数とみなすことができる、積分 $I(l, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ を導入する。

定義 3.5. n を正の整数とする。 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$c(z) := \frac{z}{z - 1}$$

とおく。 $i = 1, \dots, n$ に対して、 $l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および以下の条件を満たす $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ をとる：

$$|a_i| \neq 1, \quad |b_i| \notin |q|^{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \cup |q|^{l_i+1+\mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$\mathbf{l} := (l_1, \dots, l_n), \mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$ とおき、積分 $I(l, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ を以下で定める：

$$I(l, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{i=1}^n c(a_i z_i \cdots z_n) \psi_{l_i}(b_i z_i; q) \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1 \cdots z_n},$$

ここに、 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ である。

積分 $I(l, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ は以下のような級数表示を持つ：

命題 3.6. $|a_i| < 1$, $|q|^{l_i+1} < |b_i| < 1$ ($i = 1, \dots, n$) のとき

$$I(\mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q) = (-1)^n \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{a_i^{d_i}}{(1 - q^{d_1 + \dots + d_i})^{l_i+1}} \prod_{j=i}^n (q^{l_j+1} b_j^{-1})^{d_i}.$$

命題 3.6 の右辺の無限級数の Taylor 展開の係数は多重 q -ゼータブラケットの和で表することができる:

命題 3.7. $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 級数 $S(\mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ を

$$S(\mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q) := \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{a_i^{d_i}}{(1 - q^{d_1 + \dots + d_i})^{l_i+1}} \prod_{j=i}^n (q^{l_j+1} b_j^{-1})^{d_i}$$

で定めると,

$$\begin{aligned} & \frac{l_1! \dots l_n!}{s_1! \dots s_n!} \frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}} \dots \frac{\partial^{s_n}}{\partial x_n^{s_n}} S(\mathbf{l}, (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}), (q^{l_1}, \dots, q^{l_n}); q) \Big|_{x_1 = \dots = x_n = 0} \\ &= (2\pi i)^{s_1 + \dots + s_n} \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_n=0}^{l_n} s_1(l_1, j_1) \dots s_1(l_n, j_n) j_1! \dots j_n! \mathfrak{z} \left[\begin{matrix} s_1+1, \dots, s_n+1 \\ j_1+1, \dots, j_n+1 \end{matrix} \right], \end{aligned}$$

ここに, $s_1(n, k)$ は以下で定義される第 1 種 Stirling 数である:

$$x(x+1) \dots (x+n-1) := \sum_{k=0}^n s_1(n, k) x^k.$$

逆に, 多重 q -ゼータブラケットは級数 $S(\mathbf{l}, \mathbf{x}, \mathbf{y}; q)$ の Taylor 展開の係数の和で表される (この意味で, $S(\mathbf{l}, \mathbf{x}, \mathbf{y}; q)$ の Taylor 展開の係数と多重 q -ゼータブラケットは等価である.):

命題 3.8.

$$\begin{aligned} & (-1)^{j_1 + \dots + j_n} (2\pi i)^{s_1 + \dots + s_n} j_1! \dots j_n! \mathfrak{z} \left[\begin{matrix} s_1+1, \dots, s_n+1 \\ j_1+1, \dots, j_n+1 \end{matrix} \right] \\ &= \sum_{r_1=0}^{j_1} \dots \sum_{r_n=0}^{j_n} (-1)^{r_1 + \dots + r_n} s_2(j_1, r_1) \dots s_2(j_n, r_n) \frac{r_1! \dots r_n!}{s_1! \dots s_n!} \\ & \quad \cdot \frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}} \dots \frac{\partial^{s_n}}{\partial x_n^{s_n}} S((r_1, \dots, r_n), \mathbf{x}, (q^{r_1}, \dots, q^{r_n}); q) \Big|_{x_1 = \dots = x_n = 0}, \end{aligned}$$

ここに, $s_2(n, k)$ は以下で定義される第 2 種 Stirling 数である:

$$x^n = \sum_{k=0}^n s_2(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1).$$

4. 多重ゼータ値の 2 パラメータ変形

この節では, 3 節で導入した積分 $I(\mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ の p 変形とみなすことができる積分 $I(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ およびその母関数 $I(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ を導入する. 本節以降, p, q は, $0 < |p| < 1$, $0 < |q| < 1$ なる複素数とする.

定義 4.1. n を正の整数とする. $i = 1, \dots, n$ に対して, $k_i, l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および以下の条件を満たす $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ をとる:

$$|a_i| \notin |p|^{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \cup |p|^{k_i+1+\mathbb{Z}_{\geq 0}}, \quad |b_i| \notin |q|^{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \cup |q|^{l_i+1+\mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n)$, $\mathbf{l} := (l_1, \dots, l_n)$, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$ とおき, 積分 $I(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ を以下で定める:

$$I(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{i=1}^n \psi_{k_i}(a_i z_i \cdots z_n; p) \psi_{l_i}(b_i z_i; q) \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1 \cdots z_n}.$$

以下の命題により, 積分 $I(k_1, l_1, a_1, b_1; p, q)$ は一般化された楕円ガンマ関数の対数微分で表される.

命題 4.2. $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 一般化楕円ガンマ関数 $\Gamma_{k,l}(z; p, q)$ を

$$\Gamma_{k,l}(z; p, q) := \prod_{\substack{m_0, \dots, m_k \geq 0 \\ n_0, \dots, n_l \geq 0}} (1 - zp^{m_0+\dots+m_k}q^{n_0+\dots+n_k})^{(-1)^{k+l+1}} (1 - p^{k+1}q^{l+1}z^{-1}p^{m_0+\dots+m_k}q^{n_0+\dots+n_k})$$

で定め,

$$\psi_{k,l}(x; p, q) := z \frac{d}{dz} \log \Gamma_{k,l}(z; p, q)$$

とおく. $|p|^{k+1} < |a| < 1$, $|q|^{l+1} < |b| < 1$ のとき, 以下が成り立つ:

$$I(k, l, a, b; p, q) = (-1)^{l+1} \psi_{k,l}(q^{l+1}ab^{-1}; p, q).$$

注意 4.3. 関数 $\Gamma_{k,l}(z; p, q)$ は西澤 [11] によって導入された多重楕円ガンマ関数の特別な場合である. 特に, 関数 $\Gamma_{0,0}(z; p, q)$ は Ruijsenaars [12] によって導入された楕円ガンマ関数である.

積分 $I(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ の $p \rightarrow 0$ の極限は, 本質的には 4 節で導入した積分 $I(\mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q)$ と一致する:

命題 4.4.

$$\lim_{p \rightarrow 0} I(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q) = (-1)^{k_1+\dots+k_n} I(\mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; q).$$

命題 2.2 により, Kronecker 関数を用いて以下のように定義される積分 $I(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ は, 積分 $I(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ の母関数とみなせる.

定義 4.5. 以下を満たすように, パラメータ $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$) をとる:

$$\alpha_i \notin p^{\mathbb{Z}}, |a_i| \notin |p|^{\mathbb{Z}}, \beta_i \notin q^{\mathbb{Z}}, |b_i| \notin |q|^{\mathbb{Z}}.$$

$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$ とおき, 積分 $I(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ を以下で定める:

$$I(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{i=1}^n F(\alpha_i, a_i z_i \cdots z_n; p) F(\beta_i, b_i z_i; q) \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1 \cdots z_n}.$$

5. 調和積公式とシャッフル積公式の拡張

多重ゼータ値のみたす基本的な関係式として, 調和積公式とシャッフル積公式がある. この節では, これらの公式を 4 節で導入した積分 $I(\alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}; p, q)$ にまで一般化することを考える.

調和積とシャッフル積公式は, どちらも 2 つの多重ゼータ値の積を多重ゼータ値の線形和で表す公式である. 例えば, 2 つの Riemann ゼータ値の積については, 以下のような公式が成り立つことはよく知られている:

(a) (調和積)

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2). \quad (5.1)$$

(b) (シャッフル積)

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \sum_{i=0}^{s_2-1} \binom{s_1-1+i}{i} \zeta(s_1+i, s_2-i) + \sum_{j=0}^{s_1-1} \binom{s_2-1+j}{j} \zeta(s_2+j, s_1-j). \quad (5.2)$$

以下の金子-Gangl-Zagier[6] による結果は, (5.1), (5.2) の q 類似とみなすことができる.

定理 5.1 (金子-Gangl-Zagier [6], Theorem 7). s_1, s_2 を正の整数とすると以下が成り立つ:

(a) (調和積)

$$\begin{aligned} [s_1] \cdot [s_2] &= [s_1, s_2] + [s_2, s_1] + [s_1 + s_2] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s_1} (-1)^{s_2-1} \binom{s_1 + s_2 - i - 1}{s_1 - i} \frac{B_{s_1+s_2-i}}{(s_1 + s_2 - i)!} [i] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s_2} (-1)^{s_1-1} \binom{s_1 + s_2 - j - 1}{s_2 - j} \frac{B_{s_1+s_2-j}}{(s_1 + s_2 - j)!} [j], \end{aligned}$$

ここに, B_n は以下で定義される Bernoulli 数を表す:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

(b) (シャッフル積)

$$\begin{aligned} [s_1] \cdot [s_2] &= \sum_{i=0}^{s_2-1} \binom{s_1-1+i}{i} [s_1+i, s_2-i] + \sum_{j=0}^{s_1-1} \binom{s_2-1+j}{j} [s_2+j, s_1-j] \\ &\quad - \binom{s_1+s_2-2}{s_1-1} [s_1+s_2-1] + \binom{s_1+s_2-2}{s_1-1} \left[\frac{s_1+s_2-1}{2} \right]. \end{aligned}$$

定理 5.1 は深さが 2 以上の場合に一般化できることが知られている. 詳細は, [1],[2] を参照のこと.

定理 5.1 の p -変形として, 以下が成り立つ:

定理 5.2. (a) (調和積)

$$\begin{aligned} I(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1; p, q) I(\alpha_2, \beta_2, a_2, b_2; p, q) &= I((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_1 \beta_2), (a_1, a_2), (b_1 b_2^{-1}, b_2); p, q) \\ &\quad + I((\alpha_2, \alpha_1), (\beta_2, \beta_1 \beta_2), (a_2, a_1), (b_1^{-1} b_2, b_1); p, q) \end{aligned}$$

(b) (シャッフル積)

$$\begin{aligned} I(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1; p, q) I_1(\alpha_2, \beta_2, a_2, b_2; p, q) &= I((\alpha_1, \alpha_1^{-1} \alpha_2), (\beta_1, \beta_2), (a_1 a_2, a_2), (b_1, b_2); p, q) \\ &\quad + I((\alpha_2, \alpha_1 \alpha_2^{-1}), (\beta_2, \beta_1), (a_1 a_2, a_1), (b_2, b_1); p, q). \end{aligned}$$

証明. 定義により

$$\begin{aligned} I(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1; p, q) I(\alpha_2, \beta_2, a_2, b_2; p, q) \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} F(\alpha_1, a_1 z_1; p) F(\alpha_2, a_2 z_2; p) F(\beta_1, b_1 z_1; q) F(\beta_2, b_2 z_2; q) \frac{dz_2 dz_1}{z_1 z_2} \end{aligned}$$

が成り立つ. この表示において, $F(\beta_1, b_1 z_1; q) F(\beta_2, b_2 z_2; q)$ (すなわち底が q の部分) に定理 2.3 を用いれば (a) が得られ, $F(\alpha_1, a_1 z_1; p) F(\alpha_2, a_2 z_2; p)$ (すなわち底が p の部分) に定理 2.3 を用いれば (b) が得られる. □

定理 5.2 から, 定理 5.1 が得られることを見よう. まず, 定理 5.1 (a) を示す. 定理 5.2 (a) において, 以下の条件を満たすようにパラメータ a_1, a_2, b_1, b_2 を固定する:

$$\begin{aligned} |p| &< |a_i| < 1 \quad (i = 1, 2), \\ |q| &< |b_1| < |b_2| < 1. \end{aligned}$$

定理の両辺を, 変数 $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \beta_1 - 1, \beta_2 - 1$ について逐次的に Laurent 級数展開して定数項を比較すると, Proposition 2.2 より

$$\begin{aligned} I(0, 0, a_1, b_1; p, q)I(0, 0, a_2, b_2; p, q) &= I((0, 0), (0, 0), (a_1, a_2), (b_1 b_2^{-1}, b_2); p, q) \\ &\quad + I((0, 0), (0, 0), (a_2, a_1), (q b_1^{-1} b_2, b_1); p, q) + I(1, 1, p a_1 a_2^{-1}, q b_1 b_2^{-1}; p, q) \end{aligned} \quad (5.3)$$

を得る. $p \rightarrow 0$ の極限をとると, 命題 4.4, 命題 3.6 より,

$$\begin{aligned} S(0, a_1, b_1; q)S(0, a_2, b_2; q) &= S((0, 0), (a_1, a_2), (b_1 b_2^{-1}, b_2); q) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} S(0, a_2 z, q b_1^{-1} b_2, b_1; q) c_0(a_1 z) \psi_0(b_1 z; q) \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

が得られる. 簡単な計算より,

$$S(0, a_2 z, q b_1^{-1} b_2; q) = S(0, a_2 z, b_1^{-1} b_2; q) + c_0(a_2 b_1 b_2^{-1} z)$$

がわかるから,

$$\begin{aligned} S(0, a_1, b_1; q)S(0, a_2, b_2; q) &= S((0, 0), (a_1, a_2), (b_1 b_2^{-1}, b_2); q) + S((0, 0), (a_2, a_1), (b_1^{-1} b_2, b_1); q) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} c_0(a_2 b_1 b_2^{-1} z) c_0(a_1 z) \psi_0(b_1 z; q) \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

を得る. さらに

$$\begin{aligned} c_0(a_1 z) c_0(a_2 b_1 b_2^{-1} z) &= \left(c_0(a_1 a_2^{-1} b_1^{-1} b_2; q) - \frac{1}{2} \right) \cdot (c_0(a_2 b_1 b_2^{-1} z) - c_0(a_1 z)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (c_0(a_1 z) + c_0(a_2 b_1 b_2^{-1} z)) \end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} &S(0, a_1, b_1; q)S(0, a_2, b_2; q) \\ &= S((0, 0), (a_1, a_2), (b_1 b_2^{-1}, b_2); q) + S((0, 0), (a_2, a_1), (b_1^{-1} b_2, b_1); q) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - c_0(a_1 a_2^{-1} b_1^{-1} b_2) \right) \cdot (S(0, a_2 b_1 b_2^{-1}, b_1; q) - S(0, a_1, b_1, y_2; q)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (S(0, a_1, b_1; q) + S(0, a_2 b_1 b_2^{-1}, b_1; q)) \end{aligned} \quad (5.4)$$

を得る. 解析接続により, (5.4) は, 特異点を除くすべての a_1, a_2, b_1, b_2 で成り立つ. (5.4) において $b_1 = b_2 = 0, a_1 = e^{2\pi i x_1}, a_2 = e^{2\pi i x_2}$ とし, 両辺を x_1, x_2 に関して逐次的に Taylor 級数に展開して係数を比較すると定理 5.1(a) が得られる.

次に, 定理 5.2(b) から 定理 5.1 (b) を導く. 定理 5.2(b) において, 以下の条件を満たすように, パラメータ a_1, a_2, b_1, b_2 を固定する.

$$\begin{aligned} |p| &< |a_i| < 1, |q| < |b_i| < 1 \quad (j = 1, 2), \\ |p| &< |a_1 a_2| < 1. \end{aligned}$$

変数 $\beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1$ について逐次的に Laurent 級数展開して定数項を比較すると,

$$\begin{aligned} I(0, 0, a_1, b_1; p, q)I(0, 0, a_2, b_2; p, q) &= I(0, 0, (0, 0), (a_1 a_2, a_2), (b_1, b_2); p, q) \\ &\quad + I((0, 0), (0, 0), (a_1 a_2, a_1), (b_2, b_1); p, q) + I(1, 1, a_1 a_2, b_1 b_2; p, q) \end{aligned} \quad (5.5)$$

が得られる. (5.5) において, $p \rightarrow 0$ の極限をとり, Taylor 展開の係数の比較をすると 定理 5.1(b) が得られる.

定理 5.2 は, 深さが 2 以上の場合に拡張することができる. まず, (a) の一般化について考えよう. A とその部分集合 A' を以下で定義される文字の集合とし, $\mathbb{C}\langle A \rangle, \mathbb{C}\langle A' \rangle$ を, それぞれ A, A' 上

の語で生成される $\mathbb{C}$ 上の非可換多項式環とする:

$$A := \{Z(\alpha, \beta, a, b) \mid \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{C}^\times\}.$$

$$A' := \left\{Z(\alpha, \beta, a, b) \in A \mid \alpha \notin p^\mathbb{Z}, |a| \notin |p|^\mathbb{Z}, \beta \notin q^\mathbb{Z}, |b| \notin |q|^\mathbb{Z}\right\}.$$

$\mathbb{C}\langle A \rangle$ の語 w に対して, その長さを $l(w)$ と書く. $\mathbb{C}$ -双線形写像 $*$: $\mathbb{C}\langle A \rangle \times \mathbb{C}\langle A \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle A \rangle$ を以下で定める:

- (i) $\mathbb{C}\langle A \rangle$ の任意の元 w に対して $1 * w = w * 1 = w$.
- (ii) $\mathbb{C}\langle A \rangle$ の任意の語 w, w' に対して

$$\begin{aligned} wZ(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1) * w'Z(\alpha_2, \beta_2, a_2, b_2) &= (w * w'Z(\alpha_2, \beta_2, a_2, b_1^{-1}b_2))Z(\alpha_1, \beta_1\beta_2, a_1, b_1) \\ &\quad + (wZ(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1b_2^{-1}) * w')Z(\alpha_2, \beta_1\beta_2, a_2, b_2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

$(\mathbb{C}\langle A \rangle, *)$ は可換かつ結合的な $\mathbb{C}$ -代数となる.

以下の定理は, 本稿における 1 番目の主定理である.

定理 5.3. $\mathbb{C}$ -線形写像 $I: \mathbb{C}\langle A' \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$I(Z(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1) \cdots Z(\alpha_n, \beta_n, a_n, b_n)) := I((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n), (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n); p, q)$$

で定める. すると, $w_1, w_2, w_1 * w_2 \in \mathbb{C}\langle A' \rangle$ のとき以下が成り立つ.

$$I(w_1 * w_2) = I(w_1) \cdot I(w_2).$$

次に定理 5.2 (b) の一般化について考える. $\mathbb{C}$ -双線形写像 $\sqcup: \mathbb{C}\langle A \rangle \times \mathbb{C}\langle A \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle A \rangle$ を以下で定める:

- (i) $\mathbb{C}\langle A \rangle$ の任意の元 w に対して $1 \sqcup w = w \sqcup 1 = w$
- (ii) $\mathbb{C}\langle A \rangle$ の任意の語 w, w' に対して

$$\begin{aligned} Z(\alpha_1, \beta_1, a_1, b_1)w \sqcup Z(\alpha_2, \beta_2, a_2, b_2)w' &= Z(\alpha_1, \beta_1, a_1a_2, b_1)(w \sqcup Z(\alpha_1^{-1}\alpha_2, \beta_2, a_2, b_2)w') \\ &\quad + Z(\alpha_2, \beta_2, a_1a_2, b_2)(Z(\alpha_1\alpha_2^{-1}, \beta_1, a_1, b_1)w \sqcup w'). \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}\langle A \rangle, \sqcup)$ は可換かつ結合的な $\mathbb{C}$ -代数となる.

本稿の 2 番目の主定理は以下の通りである.

定理 5.4. $w_1, w_2, w_1 \sqcup w_2 \in \mathbb{C}\langle A' \rangle$ のとき以下が成り立つ.

$$I(w_1 \sqcup w_2) = I(w_1) \cdot I(w_2).$$

主定理の証明は, 以下の小森-松本-津村 [9] による結果の楕円変形を示すことによりなされる.

定理 5.5 ([9]). 多重ゼータ値のシャッフル積分解は, 計算の途中で A_r 型のルート系ゼータ値が現れることを許せば, 部分分数分解として実現できる.

[9] においてゼータ値の部分分数分解に用いられているのは, 以下の有理関数の恒等式である:

$$\frac{1}{x^{k_1}y^{k_2}} = \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \binom{k_2-1+m_1}{m_1} \frac{1}{(x+y)^{k_2+m_1}x^{k_1-m_1}} + \sum_{m_2=0}^{k_2-1} \binom{k_1-1+m_2}{m_2} \frac{1}{(x+y)^{k_1+m_2}y^{k_2-m_2}}$$

本稿の主定理は, この恒等式ではなく, Fay の恒等式 (定理 2.3) を用いて, [9] と類似の議論を行うことにより証明される.

注意 5.6. 部分分数分解を用いた多重ゼータ値のシャッフル積公式の証明としては, Goncharov [7] によるものもある. [7] の証明において用いられている有理関数の恒等式は以下のようなものである:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p_1(p_1+p_2)\cdots(p_1+\cdots+p_k)} \cdot \frac{1}{p_{k+1}(p_{k+1}+p_{k+2})\cdots(p_{k_1}+\cdots+p_{k+l})} \\ &= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \frac{1}{p_{\sigma(1)}(p_{\sigma(1)}+p_{\sigma(2)})\cdots(p_{\sigma(1)}+\cdots+p_{\sigma(k+l)})}, \end{aligned}$$

ここに, $S(k, l)$ は $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ かつ $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)$ なる $\{1, \dots, k+l\}$ の置換 σ 全体のなす集合を表す. この有理関数の恒等式の楕円類似を考えることにより主定理を証明することも可能かもしれない.

謝辞. 筆者に講演の機会を与えてくださり, また講演後に Goncharov の preprint の存在をご指摘いただいた, 古庄英和先生に感謝申し上げます.

REFERENCES

- [1] H. Bachmann and U. Kühn, The algebra of generating functions for multiple divisor sums and applications to multiple zeta values, *Ramanujan J.* **40** (2016), 605-648.
- [2] H. Bachmann, The algebra of bi-brackets and regularized multiple Eisenstein series, *J. Number Theory* **200**, 260-294 (2019).
- [3] D. Mumford, Tata lectures on theta. II, *Progress in Mathematics*, 43, Birkhuser (1984).
- [4] G. Felder and A. Varchenko, The elliptic gamma function and $SL(3, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^3$, *Adv. Math.* **156** (2000), 44-76.
- [5] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Second edition, Cambridge University Press, 2004.
- [6] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, Double zeta values and modular forms, in *Automorphic forms and zeta functions*, Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific (2006).
- [7] A.B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, arXiv: 0103059.
- [8] M. Kato, On certain two parameter deformations of multiple zeta values, submitted.
- [9] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products of multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, *Math. Z.* **268**, 993-1011 (2011).
- [10] A. Narukawa, The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions, *Adv. Math.* **189**(2004), 247-267.
- [11] M. Nishizawa, An elliptic analogue of the multiple gamma function, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 7411-7421.
- [12] S. Ruijsenaars, First order difference equations and integrable quantum systems, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 1069-1146.
- [13] A. Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, Berlin, 1976.
- [14] W. Zudilin, Multiple q-zeta brackets, *Mathematics* **3** (2015), 119-130.