

消費税に対する「分割買い」について

On "Splitting-Buy" against the Consumption Tax

山口大学工短部 伊藤 暁 (Akira ITO)

山口大学工学部 井上 克司 (Katsushi INOUE)

山口大学工学部 高浪 五男 (Itsuo TAKANAMI)

あらまし 消費税が導入された当初、商店で買った品物を一度にでなく一個づつ別々に精算するという行動が見受けられた。はたしてこのような分割買い（払い）により常に得をすることができるのであろうか？ 本稿では、分割数をなるべく少なくするという条件も考慮に入れて、この問題を考察する。

1. ま え が き

税額など会計計算においては切捨てなどの端数処理が通常行なわれている。もちろん、このような操作により誤差が生じているのであるが、今までそれほど問題にされたことはなかった。ところが、消費税が導入されるや否やこの問題が注目を浴びるようになった。

【事例1】（朝日新聞'89/4/2）

◇算数では分からぬ
子供が「五十円のアイスクリームを買いに行く」というので、二人に百円持たせたら、間もなく「三円足りない」と言われて帰って来なかった。間違って帰って来なかった。消費税だったなと思いついて子供たちに説明。税込み一個五十一円なので、今後はそれぞれに六十円持たせました。すると、九十円ずつおつりを持って帰ってきたんですけど、小学二年の子が「二個まとめて買ったら三円なのに、一個ずつ買ったほうが二円ずつなの。算数が分からなくなった」といいます。
消費税って、こんな子供にまで侵入するほど身近に押し寄せてきたんですね。
—福岡市城南区・主婦(名)

これは次の理由による：50円×2個を買う。まとめて買うと、100円×3%=3円。1個ずつ買うと、50×3%=1.5円→切捨て→1円×2個分=2円。∴分割

が1円ほど得。

確かに、丸め方が切捨て方式ならば分割すればするほど得になるはずである。

【事例2】(同89'4/14)

◇見習いたいけど…
「わあ、主婦の鏡」と感心したのは先日、近くのスーパーのレジで見かけた光景です。五十代の女性が、カゴいっぱい買った品を一品ずつ精算、レジシートを打ってもらっていたんです。まとめて最後の合計額に三割上乗せされるのに対して、納税額が少なくすんで得なんですよね。みんな分かっているんだけど、レジが込んでしまうのでなかなか出来なくて……。でもそのときのレジの方、いやな顔ひとつしなかったのもうれしかったです。
消費税はいまだに言う人は多いけど、言うばかりで何も出来ないのが現実。あんな勇気が大事なんですよね。あの主婦の方、これからも頑張ってくださいね。早くも別のレジに並び変えた自分が情けなかった。私ですか？ 見習いたいけど、オバタリアンみたいに見られても……。
——北九州市小倉南区・大崎多寿恵さん(三)

また、次のような現象も起きた。

【事例3】(同'89/4/7)

外税方式なら
60円安いのに
神奈川県横須賀市
無職・牧野進さん
乳酸飲料を月決めで毎朝四本配達してもらっています。従来、一本五十円で三十日分なら六千円払っていました。しかし、四月から内税方式で一本五十二円になり、その百二十本の六千二百四十円になるといわれました。外税方式なら六千円に三割を加えて六千八百四十円ですみます。差し引き六十円の差があり、価格上げのような気がします。
月決め分は検討中
乳酸飲料の地域会社 フ
ループの地域会社によって販
線方法が異なっているようで
す。お客からの問い合わせが
多いので、実情を調べ、月決
めのお客さんには外税方式に
するよう検討中です」

これは次の理由による。50円×120個を買う。内税方式(四捨五入と見なす)では、 $50 \times 3\% = 1.5$ 円→四捨五入→2円×120個分=240円。外税方式では、 $6000 \text{円} \times 3\% = 180$ 円。∴外税の方が60円得。(内税方式は完全なバラ買いである。)

ところが、必ずしも外税の方が得とは言えず単価が違えば内税の方が得な場合もある。例えば、単価が50円ではなく45円だったとしよう。すると内税方式では、 $45 \times 3\% = 1.35$ 円→四捨五入→1円×120個分=120円。外税方式では、 $5400 \text{円} \times 3\% = 162$ 円。∴内税の方が42円得。同様にして単価が80円の場合も内税の方が48円得になる。

2. 基本的性質

本章では、後ほど必要となる幾つかの数理的な事実について整理する。 R 、 Z 、 N 、を各々実数、整数、自然数の整数の集合とする。

【定義1】 $x, y \in R$ 、 $k \in N$ とする。

$\lfloor x \rfloor \triangleq x$ を越えない最大の整数 (切捨て)

$\lceil x \rceil \triangleq x$ より小さくない最小の整数 (切り上げ)

$[x] \triangleq \lfloor x+1/2 \rfloor$ (四捨五入)

$x \bmod 1 \triangleq x - \lfloor x \rfloor$ (x の小数部分)

$k\delta \triangleq 0, 1, \dots$, あるいは k 。特に $\delta = 0$ あるいは 1 。

【事実1】 $x, y, z \in R$ 、 $A \in Z$ とする。

- (1) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ 、 $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
- (2) $\lfloor A+x \rfloor = A + \lfloor x \rfloor$ 、 $\lceil A+x \rceil = A + \lceil x \rceil$ 、 $[A+x] = A + [x]$
- (3) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ 、 $x \leq \lceil x \rceil < x+1$
- (4) $x \leq y$ ならば、 $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ 、 $\lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$ 、 $[x] \leq [y]$
- (5) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor - \delta$
- (6) $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil x+y \rceil + \delta$
- (7) $[x] + [y] = [x+y+1/2] - \delta$

(証明略) □

本稿では、 $\alpha \in R$ は税率を表し $\alpha > 0$ と仮定する。すると、税込み価格を表す関数 F, F' と、税額を表す関数 f, f' は次のように定まる。

【定義2】 $x \in R$ とする。

$$F(x) \triangleq \lfloor (1+\alpha)x \rfloor, f(x) \triangleq \lfloor \alpha x \rfloor$$

$$F'(x) \triangleq \lceil (1+\alpha)x \rceil, f'(x) \triangleq \lceil \alpha x \rceil$$

F, f は切捨て、 F', f' は四捨五入の場合に対応する。

事実1の(4)~(6)は「 $\lfloor$ 」を F, f 、「 $\lceil$ 」を F', f' に置き換えても成り立つ。例えば

【事実2】 $x, y, z \in \mathbb{R}$ とする。

(1) $x \leq y$ ならば、 $F(x) \leq F(y)$, $f(x) \leq f(y)$, $F'(x) \leq F'(y)$, $f'(x) \leq f'(y)$ 。すなわち単調非減少。

$$(2) F(x)+F(y)=F(x+y)-\delta$$

$$(3) f(x)+f(y)=f(x+y)-\delta$$

$$(4) F'(x)+F'(y)=F'(x+y+\frac{1}{2(1+\alpha)})-\delta$$

$$(5) f'(x)+f'(y)=f'(x+y+1/2\alpha)-\delta$$

以後、各関数の定義域は整数と仮定する。

【事実3】 $A \in \mathbb{Z}$ のとき、

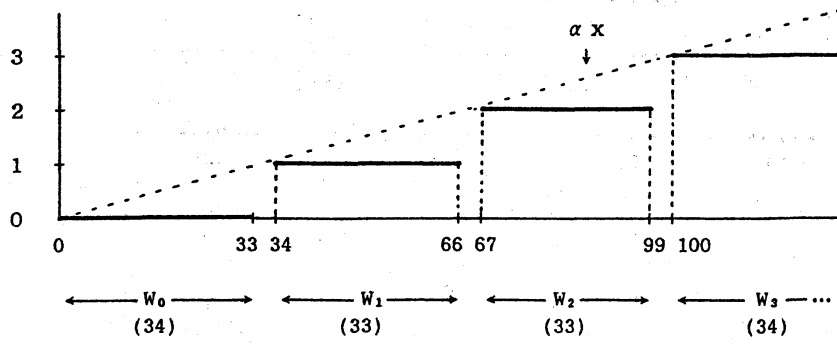
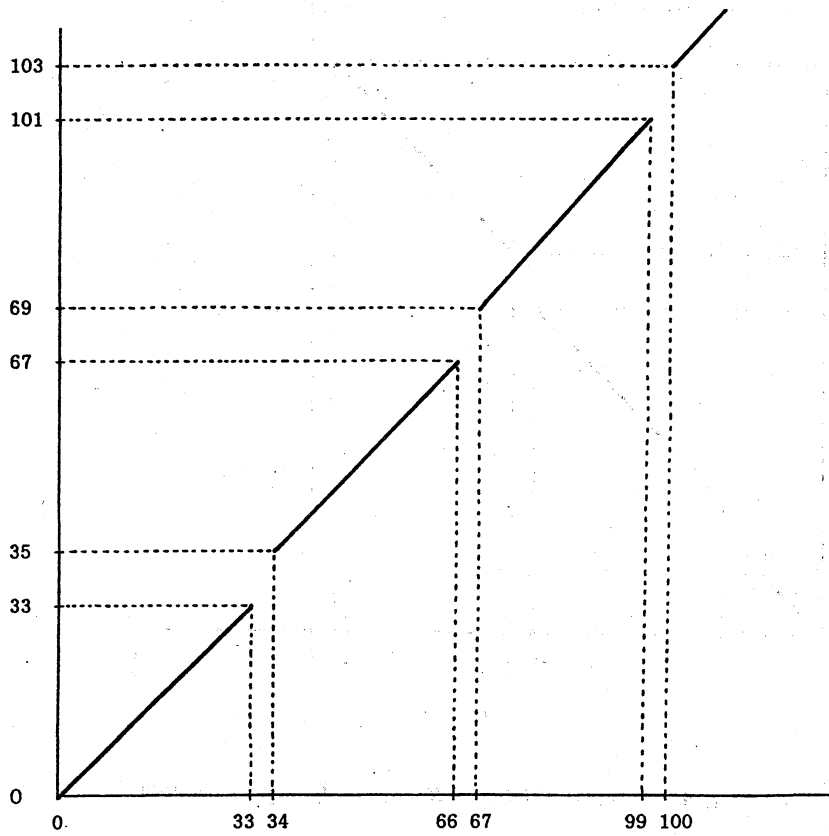
$$(1) F(A) = A+f(A), F'(A) = A+f'(A)$$

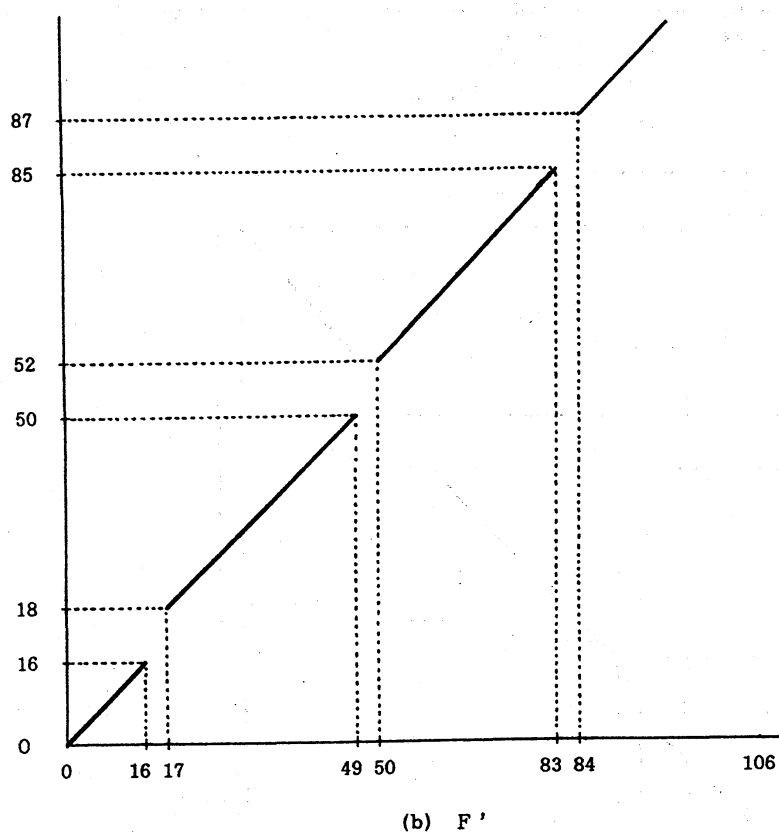
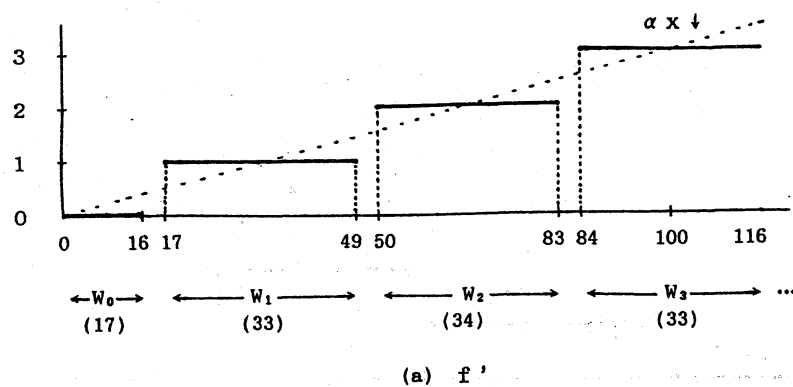
(2) F, F' は単射であるが全射ではない。

(3) $\alpha < 1$ の場合、 f, f' は全射であるが単射ではない。

(証明略) □

上記の(2)について、例えば $\alpha=0.03$ の場合、 F は $103i+34, 103i+68$, ならびに $103i+102$ ($i \geq 0$) なる値は決してとらない(図1参照)。

(a) f (b) F 図. 1 切捨ての場合の税額 f と税込み価格 F (税率 $\alpha = 0.03$).



図・2 四捨五入の場合の税額 f' と税込み価格 F' (税率 $\alpha = 0.03$) .

$B \in \mathbb{N}$ が与えられたとき $B = f(A) = \lfloor \alpha A \rfloor$ を満たす $A \in \mathbb{N}$ を求めたい。 $B \leq \alpha A < B+1$ より、 $B/\alpha \leq A < (B+1)/\alpha = B/\alpha + 1/\alpha$ 。このとき $\alpha \geq 1$ ならば $B/\alpha \leq A < B/\alpha + 1$ 、すなわち $A = \lceil B/\alpha \rceil = f^{-1}(B)$ と定まるが、 $\alpha < 1$ の場合は $A = \lceil B/\alpha \rceil$, あるいは $\lceil B/\alpha \rceil + 1$, あるいは...のように幾つもの A がありうる (事実 3)。そこで次のように B に対応する A で最小のものを定める。

以後、 $0 < \alpha < 1$ と仮定する。

【定義 2】 $x \in \mathbb{R}$ とする。

$$g(x) \triangleq \lceil x/\alpha \rceil, \quad g'(x) \triangleq \lceil (x-1/2)/\alpha \rceil, \quad M \triangleq \lceil 1/\alpha \rceil$$

【事実 4】 $x, y, z \in \mathbb{R}$ とする。

$$(1) \quad g(x) + g(y) = g(x+y) + \delta$$

$$(2) \quad g'(x) + g'(y) + g'(z) = g'(x+y+z-1) + 2\delta$$

(証明略) $\square$

税額が i 円である帯域を

$$W_i \triangleq \{g(i), g(i)+1, \dots, g(i+1)-1\}$$

と記す。各帯域に含まれる点の個数は $|W_i| = g(i+1) - g(i) = g(1) - \delta = M - \delta$ である。

【命題 1】 各 $j (1 \leq j \leq n)$ について $s_j \in W_{i_j}$ のとき、

$$\sum_{j=1}^n s_j \in \bigcup_{k=0}^{n-1} W_{\sum i_j + k}$$

(証明略) $\square$

命題により次のことが言える：各 s_j を統合する前の税の総額は $\sum_{j=1}^n i_j$ である。

統合すると、税は $\sum i_j, \sum i_j+1, \dots$, あるいは $\sum i_j+n-1$ 円となるから、 $0, 1, \dots$, あるいは $n-1$ 円損をすることになる。

逆に、 $s \in W_k$ を $s = \sum s_j$ と n 分割して各 $s_j \in W_{i_j}$ となったとしよう。すると命題より、分割前の税額 k は $\sum i_j, \sum i_j+1, \dots$, あるいは $\sum i_j+n-1$ に等しいはずである。すなわち、分割後の税額である $\sum i_j$ は $k, k-1, \dots$, あるいは $k-n+1$ に等しい。従って n 分割すると、 $0, 1, \dots$, あるいは $n-1$ 円得をすることになる (K 分割したとき $K-1$ 円以上得することはありえない)。

以上が切捨ての場合であるが、四捨五入については次のようになる。

$\lfloor \alpha A + 1/2 \rfloor = B$ とすると $B \leq \alpha A + 1/2 < B+1$ であるから、 $(B-1/2)/\alpha \leq A < ((B+1)-1/2)/\alpha$
 $\alpha = (B-1/2)/\alpha + 1/\alpha$ 。故に $f'(A) = B$ を満たす最小の A は $\lceil (B-1/2)/\alpha \rceil$ である。

税額が i 円である帯域を

$$W_i \triangleq \{g'(i), g'(i)+1, \dots, g'(i+1)-1\}$$

と定義する。帯域に含まれる点の個数は $|W_i| = g'(i+1) - g'(i) = g'(3/2) - \delta = M - \delta$ である。各帯域は切捨ての場合に対して、マイナス方向に約 $M/2$ ほどずれている (図2参照)。

【命題2】各 $j (1 \leq j \leq n)$ について $s_j \in W'_{i_j}$ のとき、

$$\sum_{j=1}^n s_j \in \bigcup_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} W'_{\sum i_j + k}$$

(証明略) □

従って、 K 分割したとき $\pm \lfloor K/2 \rfloor$ 円以上得あるいは損をすることはありえない。

統合と分割の二つの観点を考え合わせれば、分割することによって税額が変動する様子は図3のようになる。図において T_0, T_I は

$$T_0 \triangleq f\left(\sum_{i=1}^N a_i\right), \quad T_I \triangleq \sum_{i=1}^N f(a_i)$$

を表す。ここに $a_1, a_2, \dots, a_N$ は各商品の値段である。あらゆる分割の中で最小 (最大) の税額を $T_{\min}$ ($T_{\max}$) とすると、切捨ての場合は

$$T_{\min} = T_I \quad (T_{\max} = T_0)$$

である。一方、四捨五入の場合は図3の点 $P^-(P^+)$ の座標を求めることにより、

$$T_{\min} \geq T_I - \lfloor (N-2\Delta T+1)/4 \rfloor$$

$$(T_{\max} \leq T_0 + \lfloor (N-2\Delta T+1)/4 \rfloor)$$

であることがわかる。ここで、 $\Delta T \triangleq T_0 - T_I$ とおいた。従って、 $T_{\max} - T_{\min} \leq \Delta T + \lfloor (N-2\Delta T+1)/4 \rfloor \cdot 2 \leq \Delta T + N/2 - \Delta T + 1/2 = (N+1)/2 = \lceil N/2 \rceil$ となる。

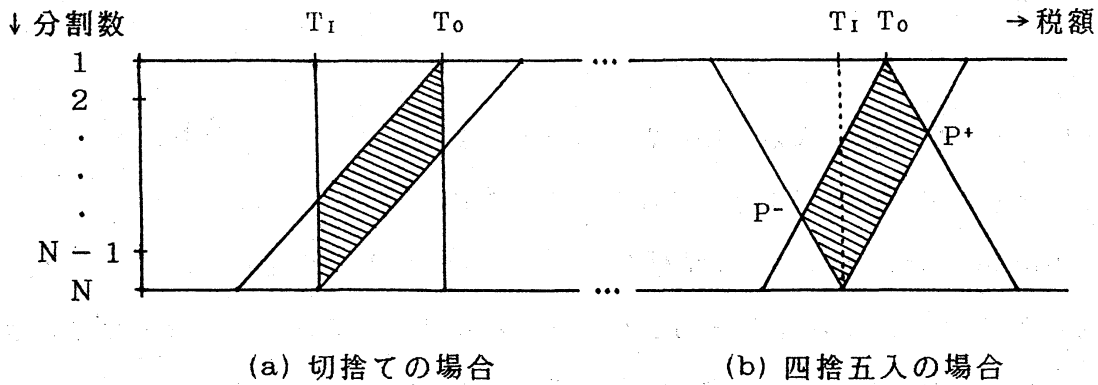


図.3 T_0, T_1 から定まる税の存在範囲 (N = 品物の個数) .

3. アルゴリズム

本章では、税率 α は有理数と仮定し $\alpha = D'/D$ のように既約分数の形で表されるものとする。すると、 $a = qD + a \bmod D$, $b = rD + b \bmod D$ とおくと、

$$f(a) = \lfloor aD'/D \rfloor = \lfloor (qD + a \bmod D) D'/D \rfloor = qD' + f(a \bmod D),$$

$$f(b) = rD' + f(b \bmod D),$$

$$f(a+b) = (q+r)D' + f(a \bmod D + b \bmod D)$$

であるから、

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = f(a \bmod D + b \bmod D) - f(a \bmod D) - f(b \bmod D)$$

となる。 f' についても同様。これは $a - a \bmod D$ が分割に対して何等影響を及ぼさないことを意味している。以後、与えられる商品の値段 a は全て $0 \leq a \leq D-1$ を満たすものとする。もし必要ならば、求められた結果に $a - a \bmod D$ 分を加えればよい。

“MinTAX” とは次のような問題である： N 個の商品の値段 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 、税率 α 、分割数 K 、および金額 T が入力として与えられたとする。税率を α とするとき、商品の各 K 分割に対する税額のうちで最小の値は T であるか？

【定理 1】 MinTAX は $O(NKD^{K-1})$ 時間で解ける。

(証明略) □

次に、分割数を特に指定しないときはどうであろうか？ すなわち、あらゆる分割を許すときに税額が最も少なくて済むものを求めたい。

“Min*TAX”とは次のような問題である： N 個の商品の値段 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 、税率 α 、分割数 K 、および金額 T が入力として与えられたとする。税率を α とするとき、商品のあらゆる分割に対する税額のうちで最小の値は T であるか？

前定理から、 $O(N^2 D^{N-1})$ の時間で求められることがわかるが、これは N の指数関数である。次の定理では N に関して多項式のアルゴリズムを示す。

【定理 2】 Min*TAX は $O(DN^{D-1})$ 時間で解ける。

(証明略) □

現実的に考えると α は固定されているから、定理のアルゴリズムは一応満足できるものと言えるであろう。

【注】切捨ての場合は、 $T_{\min} = T_I = \sum f(a_i)$ であるから、Min*TAX は $O(N(\log D)^2)$ 、すなわち入力の大きさに関する多項式時間で求めることができる。

最後に計算量理論上の考察を行なう。

“ExistTAX”とは次のような問題である： N 個の商品の値段 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 、分割数 K 、税率 α 、金額 T が入力として与えられたとする。税額を T とするような K 分割は存在するか？

【補題 1】 ExistTAX は (分割数 $K=2$, 税額 $T=0$ のときでさえ) NP 完全である。

(証明略) □

【定理 3】 MinTAX は (分割数 $K=2$, 税額 $T=0$ のときでさえ) NP 困難である。

【注】 ExistTAX が強 NP 完全であることが示されれば、定理 1 に示した疑似多項式時間アルゴリズムの大幅な改良はかなり難しいと結論される。

文 献

- [1] 白松録郎：その後の消費税—価格転嫁と 1 円玉、かや書房（1989）。
- [2] M.R.Garey and D.S.Johnson, *Computers and Intractability*, Freeman (1979).
- [3] D.E.Knuth, *The art of Computer Programming; Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley (1973).
- [4] C. ベルジュ（野崎訳）：組み合わせ論の基礎、サイエンス社（昭 48）。
- [5] M.W.Krentel, The Complexity of Optimization Problems, *Pro.18th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing* (1986), pp.69-76.