

特異および特異に近い差分方程式のSOR法

大阪女子大学 石原 和夫 (Kazuo Ishihara)
大阪女子大学 山本 慎 (Makoto Yamamoto)

1. SOR 法. $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ とし, $D, -L, -U$ は A の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $J = D^{-1}(L + U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を J の固有値, ω を加速係数, $H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$, $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$, $\delta(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$, とする.

補題 1 [1, 3]. (i) A が convergent ($\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$) $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$.
(ii) $\rho(A) = 1$ とする. A が semiconvergent ($\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ が存在) $\Leftrightarrow \gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear.

仮定 1. A が consistently ordered かつ 2-cyclic である.

仮定 2. $\det A = 0$ かつ J の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である.

補題 2 [3]. A は仮定 1 を満たす正則行列, J の固有値はすべて実数で $\rho(J) < 1$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は convergent ($\rho(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_\omega)$ となる.

補題 3 [2]. A は仮定 1 と 2 を満たす特異行列, J の固有値はすべて実数で $\rho(J) = 1$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_\omega)$ となる.

2. 差分方程式. 次のような Neumann 型の 2 点境界値問題を考える.

$$(1) \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a < x < b \\ y'(a) = \alpha, & y'(b) = \beta. \end{cases}$$

ここで $p(x), q(x), r(x)$ は連続で, $q(x) \geq 0$ とする. $[a, b]$ を $(n-1)$ 等分し, $h = \frac{b-a}{n-1}$, $x_i = a + (i-1)h$, $1 \leq i \leq n$. (1) を中心差分により近似し, $y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ となる.

定理 1. $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, $\mathbf{b} \in \text{Im}A$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は semiconvergent ($0 < \omega < 2$) で, $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ の解に収束し, $\delta(J) = \cos \frac{\pi}{n-1}$, $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sin \frac{\pi}{n-1}}$.

定理 2. $q(x) > 0$, $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ とする. $\Rightarrow$ SOR 法は convergent ($\rho(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$) で $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_\omega)$ となる. さらに, $h = \frac{b-a}{n-1}$ が十分小ならば, $\rho(J) \approx \cos \frac{\pi}{n-1}$, $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1+\sin \frac{\pi}{n-1}}$.

注意. 定理 2 において, 誤差評価は $|y(x_i) - v_i| = O(h)$ である. $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ を満足しない時, SOR 法は種々の挙動をする. 数値例は講演時に示す. Dirichlet 型 2 点境界値問題の SOR 法については [4] 参照.

参考文献

- [1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.
- [2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 - 566.
- [3] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962.
- [4] Ishihara, K. and Yamamoto, M., SOR methods for finite difference equations with a nonsymmetric matrix arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 38 (1993), to appear.