

位相群の Π_n 空間への Unitary 表現の特性関数について

鹿児島大学教養部 酒井幸吉

任意の位相群 G 上に Quasi-positive definite 関数及び Quasi-negative definite 関数を導入し, これらの関数と G の Π_n 空間への cyclic unitary 表現の特性関数との関係についてのべる。

はじめに本文中で断りなく使用する記号も宣言しておく。
 G の単位元は e , 一般の元は g または h で表わす。 G 上の連続関数全体の集合を $C(G)$ とする。 $\varphi(g) \in C(G)$ に対して, $\varphi^*(g)$ は $\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$ によって与えられる関数。線形空間の部分集合 A が生成する線形部分空間を $\text{ls}\{A\}$ と略記する。 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ はそれぞれ複素数体, 実数体を表わす。 n はいつも任意に固定された non-negative integer とする。

§ 1 G の Π_n 空間への Cyclic unitary 表現

まず Π_n 空間の定義からはじめる。いま非退化 Hermitian sesqui-linear form $\langle, \rangle$ をもつ線形空間 $\mathcal{H}$ にて, これの極大負定値部

分空間 ($\langle, \rangle$ に關する) の次元が n のとき, $\{H, \langle, \rangle\}$ は $\text{pre } \Pi_n$ 空間であるという. この空間の極大負定値部分空間を Π (次元は n), その直交補空間 $\Pi^\perp$ を $\mathcal{P}$ とすると, $\mathcal{P}$ は正定値部分空間となり H は Π と $\mathcal{P}$ の直交直和に分解できる:

$$(1) \quad H = \Pi \oplus \mathcal{P} \quad (H \text{ の基本分解という}).$$

H から $\Pi, \mathcal{P}$ への射影作用素をそれぞれ N, P とし, $J = P - N$ とおくと, 基本分解 (1) に対応して H に正定値内積 $(,)_J$ が

$$(2) \quad (x, y)_J = \langle Jx, y \rangle \quad (x, y \in H)$$

で定義できる. H には $(,)_J$ より定まるノルムによって位相を与える. いま $\{H, (,)_J\}$ が Hilbert 空間になるとき, $\{H, \langle, \rangle\}$ は Π_n 空間 (Pontrjagin space with negative rank n) という. なお Π_0 空間は Hilbert 空間と考えてよい. 任意の $\text{pre } \Pi_n$ 空間は完備化によって, Π_n 空間の中に至る所稠密に埋め込むことができる. [2], [4] に Π_n 空間についての詳しい解説がある.

さて $(\text{pre}) \Pi_n$ 空間 H 上の線形作用 T が全単射で $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ ($x, y \in H$) をみたすとき unitary 作用素であるという. G の $(\text{pre}) \Pi_n$ 空間 H への unitary 表現 $\{U_g, H\}$ とは, G から H 上の unitary 作用素群への準同型 $g \mapsto U_g$ で任意の $x, y \in H$ によって定まる G 上の関数 $\langle U_g x, y \rangle$ が連続であるものという. この表現 $\{U_g, H\}$ を単に一文字 U で表わし, その表現空間 H を H^U とかくことにする. G の Π_n 空間への unitary 表現全体の集合

を $\mathcal{U}_n(G)$ とする. $U \in \mathcal{U}_n(G)$ とし, $f \in \mathcal{H}^U$ が $\{U_g f : g \in G\}^\perp = \{0\}$ をみたすとき, f は U -cyclic であるといい, この様な Vector の集合を $cv(U)$ とかく. $cv(U) \neq \phi$ (empty) のとき U は cyclic であるという. $\mathcal{U}_n(G)$ の要素で cyclic なものの全体を $\mathcal{CU}_n(G)$ で表わす. いま $U \in \mathcal{CU}_n(G)$, $f \in cv(U)$ に対して, 関数 $\varphi(g) = \langle U_g f, f \rangle \in \mathcal{C}(G)$ を U の f によって定まる特性関数と呼ぶ. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の cyclic unitary 表現の場合と同様に次の定理が成立する (cf. [8]).

定理 1 $U^j \in \mathcal{CU}_n(G)$ の $f_j \in cv(U^j)$ によって定まる特性関数を φ_j ($j=1, 2$) とする. $\varphi_1 = \varphi_2$ ならば, $\mathcal{H}^{U^1}$ から $\mathcal{H}^{U^2}$ 上への isometric 同型 T で $U_g^2 T = T U_g^1$ かつ $T f_1 = f_2$ なるものが存在する. $\square$

Π_n 空間 $\mathcal{H}$ 上の unitary 作用素 T は, Hilbert 空間 $\{\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_T\}$ (cf. (2)) 上の有界作用素になり, そのノルムを $\|T\|_T$ とかく. 一般に $U \in \mathcal{U}_n(G)$ は一様有界 (i.e. $\sup_{g \in G} \|U_g\|_T < \infty$) ではない. このことに関連して次の定理が成立する (cf. [8]).

定理 2 $U \in \mathcal{CU}_n(G)$ が一様有界であるための条件は U が有界な特性関数をもつことである. $\square$

注意 1 $U \in \mathcal{U}_n(G)$ とし, $\mathcal{H}^U$ は n 次元 U -不変負定値部分空間 $\mathcal{N}$ をもつとする. このとき $\mathcal{P} = \mathcal{N}^\perp$ も U -不変であり, $\mathcal{H}^U$ の基本分解 $\mathcal{H}^U = \mathcal{N} \oplus \mathcal{P}$ に対応して定まる正定値内積を $(\cdot, \cdot)_T$ (cf. (2)) とすると, U は Hilbert 空間 $\{\mathcal{H}^U, (\cdot, \cdot)_T\}$ への unitary 表現とみなすことができる. 故にこの様な U は一様有界になる.

一方 G が amenable なとき, $U \in \mathcal{U}_n(G)$ が一様有界ならば, $\mathcal{H}_U^\sigma$ は必ず n 次 U -不変負定値部分空間をもつ (cf. [7]). $\square$

§ 2 Hermitian kernels of finite negative rank

Π_n 空間への cyclic unitary 表現の特性関数を特徴づけるため, 標記にあるものを導入する. いま任意の Hermite 行列 H に対して, その負の固有値の個数を $r_-(H)$ で表わすことにする.

定義 1 $G \times G$ 上の連続関数 $K(g, h)$ が次の性質 (a), (b) をもつとき Hermitian kernel of negative rank n であるという:

$$(a) \quad \overline{K(g, h)} = K(h, g)$$

(b) 任意の有限個の元 $g_i \in G$ ($1 \leq i \leq m$) によって定まる

Hermite 行列 $K[g_1, g_2, \dots, g_m] := (K(g_i, g_j))$ に対して

$$r_-(K[g_1, g_2, \dots, g_m]) \leq n \quad \dots (*)$$

であり, しかも (*) にて等号が成立する: ことがある.

このような $K(g, h)$ の集合を $HK_n(G)$ とかく. $\square$

いま $K(g, h) \in HK_n(G)$ を任意に与える. $h \in G$ を固定して与えらる関数 $g \mapsto K(h, g)$ と K_h とかき, $C(G)$ の部分空間 $ls\{K_h: h \in G\}$ を $\mathcal{H}_K$ とする. $\mathcal{H}_K$ の元 $f_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i K_{g_i}$, $f_2 = \sum_{j=1}^q \mu_j K_{h_j}$ ($\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$) に対して, $\langle f_1, f_2 \rangle_K = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \bar{\mu}_j K(g_i, h_j)$ とおくと, $\langle, \rangle_K$ は $\mathcal{H}_K$ 上の非退化 Hermitian sesqui-linear form になる. 特に次が成立する:

$$(3) \quad \langle K_g, K_h \rangle_K = K(g, h).$$

更に次の補題が成立する.

補題 1 $\{f_g(K), \langle, \rangle_K\}$ は $p_k \pi_n$ 空間である. この完備化を $\{f_g(K), \langle, \rangle_K\}$ とすると, 写像 $G \ni g \mapsto K_g \in f_g(K)$ は弱連続 (i.e. 任意の $x \in f_g(K)$ に対して G 上の関数 $g \mapsto \langle K_g, x \rangle_K$ は連続) である. $\square$

逆に次も成立する.

補題 2 G から π_n 空間 f_g への写像 $g \mapsto \eta(g)$ に対して, $G \times G$ 上の関数 $K(g, h) := \langle \eta(g), \eta(h) \rangle$ は連続であるとする. f_g の部分空間 $\text{ls}\{\eta(g) : g \in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元を m ($m \leq n$) とすると $K(g, h) \in \text{HK}_m(G)$ である. 特に $\{\eta(g) : g \in G\}^\perp = \{0\}$ ならば $K(g, h) \in \text{HK}_n(G)$ になる. $\square$

§ 3 Quasi-positive definite 関数

定義 2 $\varphi(g) \in \mathbb{C}(G)$ に対して, $G \times G$ 上の関数 $K(g, h) = \varphi(h^{-1}g)$ が $\text{HK}_n(G)$ に属するとき, $\varphi(g)$ は Quasi-positive definite function of rank n であるという. この様な関数全体の集合を $P_n(G)$ で表わすことにする. $\square$

$P_0(G)$ は G 上の連続な positive definite 関数の集合に外ならない. いま $U \in \mathbb{C}U_n(G)$ の $f \in \mathbb{C}U(U)$ によって定まる特性関数 $\varphi_f(g)$ とすると, 補題 2 より $K(g, h) = \varphi_f(h^{-1}g) = \langle U_g f, U_h f \rangle \in \text{HK}_n(G)$. すなわち, $\varphi_f(g) \in P_n(G)$ である.

一方 $\varphi(g) \in P_n(G)$ に任意に与え、 $K(g, h) := \varphi(h^{-1}g) \in HK_n(G)$ とする。
 このとき $K_g(g^{-1}h) = K_{gg_0}(h)$, $K(gg_1, gg_2) = K(g_1, g_2)$ なる関係が
 成立するから、pre Π_n 空間 $\mathcal{H}_g[K]$ への G の unitary 表現 $g \rightarrow U_g' \in$
 $U_g' f(h) = f(g^{-1}h)$ ($f \in \mathcal{H}_g[K]$) によって定義できる。この表
 現 U' の Π_n 空間 $\mathcal{H}_g(K)$ (cf. 補題 1) 上への拡張を U とすると、 U
 は cyclic になる。実際 $f_0 = K_e$ とすると、 $U_g f_0 = K_g$ だから $\mathcal{H}_g(K)$
 の作り方より、 f_0 は U -cyclic である。しかも U の f_0 によっ
 て定まる特性関数は $\varphi(g)$ になる:

$$\langle U_g f_0, f_0 \rangle_K = \langle K_g, K_e \rangle_K \stackrel{(3)}{=} K(g, e) = \varphi(g).$$

すなわち $\varphi(g)$ を特性関数にもつ $U \in \mathcal{U}_n(G)$ が存在する。更に
 定理 1 より、この様な U は unitary 同値なものを除き一意に
 きまる。これを $U(\varphi)$ とかくことにする。以上まとめて

定理 3 $\varphi(g) \in P_n(G) \Leftrightarrow U(\varphi) \in \mathcal{U}_n(G)$ 及び $f \in \mathcal{U}(U(\varphi))$ が存在して
 $\varphi(g)$ は $\varphi(g) = \langle U(\varphi)_g f, f \rangle$ と表わされる。

しかも任意の $\varphi(g) \in P_n(G)$ に対して、上の $U(\varphi)$ は unitary 同値
 なものを除き一意にきまる。 $\square$

注意 2 (A) $\varphi_i(g) \in P_{n_i}(G)$ ($i=1, 2$) とすると、適当な整数 m
 ($0 \leq m \leq n_1 + n_2$) が存在して、和 $\varphi(g) = \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$ は $P_m(G)$ に属す。

(B) 一般に $U \in \mathcal{U}_n(G)$, $f \in \mathcal{H}^U$ に対して、 $\varphi(g) = \langle U_g f, f \rangle \in P_m(G)$ 。
 ここで $m (\leq n)$ は $\mathcal{H}^U$ の部分空間 $\mathcal{L} \{ U_g f : g \in G \}$ に含まれる
 極大負定値部分空間の次元に等しい。 $\square$

任意の $U \in \mathcal{U}_n(G)$ に対して $\mathcal{E}(U) := \{x \in \mathcal{E}_n^U : U_g x = x \ (\forall g \in G)\}$ とおくと, U が cyclic ならば $\mathcal{E}(U)$ は高々 1 次元である. このことに注意して $\mathcal{U}_{n+1}(G)$ の次の様ないくつかの部分集合を定義する:

$$\mathcal{U}_{n+1}(G, \check{\mathcal{E}}) = \{U \in \mathcal{U}_{n+1}(G) : \mathcal{E}(U) = \{0\}\},$$

$$\mathcal{U}_{n+1}(G, \mathcal{E}) = \mathcal{U}_{n+1}(G) \setminus \mathcal{U}_{n+1}(G, \check{\mathcal{E}}).$$

$\mathcal{U}_{n+1}(G, \mathcal{E})$ に属する U で, $\mathcal{E}(U)$ が non-positive, negative definite, neutral になるものの全体をそれぞれ $\mathcal{U}_{n+1}^N(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^{(-)}(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E})$ で表わす. 更に $\mathcal{U}_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E})$ を次の二つに分ける:

$$\mathcal{U}_{n+1}^{(+0)}(G, \mathcal{E}) = \{U \in \mathcal{U}_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E}) : \mathcal{E}_2^U \text{ は } \mathcal{E}(U) \text{ を含む } U\text{-不変な } 2\text{-次元部分空間を含む}\},$$

$$\mathcal{U}_{n+1}^{(Z)}(G, \mathcal{E}) = \mathcal{U}_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E}) \setminus \mathcal{U}_{n+1}^{(+0)}(G, \mathcal{E}).$$

$$\begin{aligned} \text{従って } \mathcal{U}_{n+1}^N(G, \mathcal{E}) &= \mathcal{U}_{n+1}^{(-)}(G, \mathcal{E}) \cup \mathcal{U}_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E}) \quad (\text{disjoint union}) \\ &= \mathcal{U}_{n+1}^{(-)}(G, \mathcal{E}) \cup \mathcal{U}_{n+1}^{(+0)}(G, \mathcal{E}) \cup \mathcal{U}_{n+1}^{(Z)}(G, \mathcal{E}) \quad (\text{disjoint union}). \end{aligned}$$

上に定義した $\mathcal{U}_{n+1}(G)$ の各部分集合に対応して, $P_{n+1}(G)$ の部分集合 $P_{n+1}(G, \check{\mathcal{E}})$, $P_{n+1}(G, \mathcal{E})$, $P_{n+1}^N(G, \mathcal{E})$, $P_{n+1}^{(-)}(G, \mathcal{E})$, $P_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E})$, $P_{n+1}^{(+0)}(G, \mathcal{E})$, $P_{n+1}^{(Z)}(G, \mathcal{E})$ は, $\varphi(g) \in P_{n+1}(G)$ で $U(\varphi)$ がそれぞれ $\mathcal{U}_{n+1}(G, \check{\mathcal{E}})$, $\mathcal{U}_{n+1}(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^N(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^{(-)}(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^{(0)}(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^{(+0)}(G, \mathcal{E})$, $\mathcal{U}_{n+1}^{(Z)}(G, \mathcal{E})$ に属するものの全体とする.

また G 上の non-zero real character (i.e. G 上の実数値関数 $r(g) \in \mathbb{C}(G)$, $r(g) \neq 0$ で $r(gh) = r(g) + r(h)$ を満たすもの)の集合を $A(G)$ とする. 以上の記号のもとに次の二つの補題が成立する.

補題 3 $U \in \mathcal{CW}_{n+1}^{(-)}(G, \varepsilon) \Leftrightarrow U = V (+) \varepsilon^-$ なる形に分解できる.

ただし $V \in \mathcal{CW}_n(G, \check{\varepsilon})$, $\varepsilon^- \in \mathcal{CW}_1(G, \varepsilon)$ は 1 次元 π_1 空間への trivial 表現である. この様な U に対して

$$cv(U) = \{x + \omega : x \in \mathfrak{g}^{\varepsilon^-}, x \neq 0, \omega \in cv(V)\}. \quad \square$$

補題 4 $U \in \mathcal{CW}_{n+1}^{(+0)}(G, \varepsilon) \Leftrightarrow U = V (+) W$ なる形に分解できる.

ただし $V \in \mathcal{CW}_n(G, \check{\varepsilon})$, W は $r(g) \in A(G)$ を用いて次の様に定義される:
 $W_g \xi = \xi$, $W_g \eta = \sqrt{-1} r(g) \xi + \eta$, ここで $\{\xi, \eta\}$ は $\mathfrak{g}^W$ ($= 2$ 次元 π_1 空間) のベースで $\langle \xi, \xi \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = 0$, $\langle \xi, \eta \rangle = 1$ をみたすものである. この様な U に対して

$$cv(U) = \{\alpha \xi + \beta \eta + \omega : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \beta \neq 0, \omega \in cv(V)\} \quad \square$$

上の二つの補題と定理 3 より次の結果を得る.

定理 4 $P_{n+1}^{(-)}(G, \varepsilon) = \{p(g) - c : p(g) \in P_n(G, \check{\varepsilon}), c \in \mathbb{R}, c > 0\}$

$$P_{n+1}^{(+0)}(G, \varepsilon) = \{\sqrt{-1} r(g) + p(g) + c : r(g) \in A(G), p(g) \in P_n(G, \check{\varepsilon}), c \in \mathbb{R}\} \quad \square$$

注意 3 $P_i(g) \in P_n(G, \check{\varepsilon})$, $r_i(g) \in A(G)$, $c_i \in \mathbb{R}$ ($i=1, 2$) とする.

もし $P_1(g) + c_1 = P_2(g) + c_2$ ならば, $P_1(g) = P_2(g)$, $c_1 = c_2$ である.

実際 $c = c_1 - c_2 > 0$ と仮定すると, 定理 4 より $P_1(g) = P_2(g) - c$ は $P_{n+1}^{(-)}(G, \varepsilon)$ に属する. これは矛盾である ($\because P_n(G) \cap P_{n+1}(G) = \emptyset$).

従って $P_1(g) = P_2(g)$, $c_1 = c_2$ である. 同様に, $\sqrt{-1} r_1(g) + P_1(g) + c_1$

$= \sqrt{-1} r_2(g) + P_2(g) + c_2$ ならば, $r_1(g) = r_2(g)$, $P_1(g) = P_2(g)$,

$c_1 = c_2$ であることが結論できる. $\square$

§ 4 Quasi-negative definite 関数

$P_{n+1}^N(G, \varepsilon)$ に属する関数を統一的に特徴づけるために標記のものを導入する. $\varphi(g) \in C(G)$ に対して $G \times G$ 上の関数 $K^\varphi(g, h)$ を

$$(4) \quad K^\varphi(g, h) = \varphi(h^{-1}g) - \varphi(g) - \overline{\varphi(h)}$$

によって定めることにする.

定義 3 $\varphi(g) \in C(G)$ が $\varphi(e) = 0$ かつ $K^\varphi(g, h) \in HK_n(G)$ のとき Quasi-negative definite function of rank n であるという. この様な関数の集合を $N_n(G)$ とかく. $\square$

$\varphi(g) \in N_n(G)$ ならば $\varphi^*(g) = \varphi(g)$ である. なお $N_0(G)$ は negative definite (or conditional positive definite) 関数と呼ばれるものなので e で zero となるものの集合である (cf. [1], [3]).

注意 4 $\varphi(g) = \sqrt{-1} r(g)$ ($r(g) \in A(G)$) とおくと $K^\varphi = 0$ となるから, $\varphi(g) \in N_0(G)$ である. 逆に $\varphi(g) \in N_0(G)$, $\varphi(g) \neq 0$, $K^\varphi = 0$ ならば, $\varphi(g)$ は $\sqrt{-1} r(g)$ ($r(g) \in A(G)$) なる形である. $\square$

任意の $V \in \mathcal{U}_n(G)$ に対して, この弱連続 1-cocycle (i.e. G から $\mathfrak{g}^V$ への弱連続写像 $g \mapsto \eta(g)$ で $\eta(hg) = \overline{V}_h \eta(g) + \eta(h)$ をみたすもの) の全体を $\Sigma'(G, V)$ とし, $B'(G, V) = \{\partial \nu(g) = \overline{V}_g \nu - \nu : \nu \in \mathfrak{g}^V\} (\subseteq \Sigma'(G, V))$ とおく. 更に

$$\Sigma'_t(G, V) := \{\eta(g) \in \Sigma'(G, V) : \{\eta(g) : g \in G\}^\perp = \{0\}\},$$

$$B'_t(G, V) := B'(G, V) \cap \Sigma'_t(G, V).$$

$N_n(G)$ と $\mathcal{U}_n(G)$ は次の定理によって関連づけることができる.

定理 5 $\varphi(g) \in C(G)$ に対して $K^p \neq 0$ とする. このとき

$\varphi(g) \in N_n(G)$ であるための条件は $V \in \mathcal{U}_n(G)$ 及 ω $\eta(g) \in \Sigma'_t(G, V)$ が存在して次の関係 (5) が成立することである:

$$(5) \quad \langle \eta(g), \eta(h) \rangle = \varphi(h^{-1}g) - \varphi(g) - \overline{\varphi(h)} (= K^p(g, h)). \quad \square$$

十分性は $\eta(e) = 0$ なることと補題 2 より明らか. 逆に $\varphi(g) \in N_n(G)$, $K^p \neq 0$ とすると, 次の関係が成立する (cf. §2):

$$(6) \quad K_{g_0}^p(g^{-1}h) - K_{g_0}^p(g^{-1}) = K_{gg_0}^p(h) - K_{g_0}^p(h)$$

この関係より $\text{pre } \Pi_n$ 空間 $\mathcal{H}_g[K^p]$ 上の G の unitary 表現 $g \mapsto V_g'$ を

$$V_g' f(h) = f(g^{-1}h) - f(g^{-1}) \quad (f \in \mathcal{H}_g[K^p])$$

と定義できる. この表現 V' の Π_n 空間 $\mathcal{H}_g(K^p)$ への拡張 $\varepsilon V'$ とする.

更に $G \ni g \mapsto \eta(g) = K_g^p \in \mathcal{H}_g(K^p)$ によって $\eta(g)$ を定めると, (6) 及 ω 補題 1 より $\eta(g) \in \Sigma'_t(G, V)$ なることが判る. しかも (3), (4) から (5) が従う. よって定理 5 の必要性が判る.

注意 5 (A) $\varphi(g) \in N_n(G)$ に対して, (5) をみたす $V \in \mathcal{U}_n(G)$ 及 ω $\eta(g) \in \Sigma'_t(G, V)$ は unitary 同値なものを除き一意にきずる (cf. [9]). この $V, \eta(g) \in V', \eta_p(g)$ で表わすことにする.

(B) $V \in \mathcal{U}_n(G)$ とする. $\eta(g) \in \Sigma'_t(G, V)$ を任意に与えたとき, (5) をみたす $\varphi(g) \in C(G)$ が存在するかどうかは明らかではない. もし実数値連続関数 $\psi(g)$ で

$$\text{Im} \langle \eta(h), V_h \eta(g) \rangle = \psi(hg) - \psi(g) - \psi(h)$$

をみたすものがあれば, $\varphi(g) = \sqrt{-1} \psi(g) - \frac{1}{2} \text{Re} \langle \eta(g), \eta(g) \rangle$

は (5) を満たす (cf. [9]). ▣

$\varphi(g) \in N_m(G)$ に対応する $\eta_g(g) \in Z'_t(G, V^p)$ に着目して, $N_m(G)$ を次の二つに分ける:

$$N_m^{(B)}(G) = \{ \varphi(g) \in N_m(G) : \eta_g(g) \in B'_t(G, V^p) \},$$

$$N_m^{(Z)}(G) = N_m(G) \setminus N_m^{(B)}(G),$$

ただし $n=0$ の場合 $\sqrt{-1}A(G) \subset N_0^{(B)}(G)$ と考える (cf. 注意 4).

$N_m^{(B)}(G)$ に属する関数の形を知るため, 次の二つの補題あげる.

補題 5 $V \in \mathcal{U}_m(G)$, $\partial V(g) \in B'(G, V)$ とし, $p(g) = \langle V_g v, v \rangle$ とおく.

このとき $\eta(g) = \partial V(g)$ に対して (5) を満たす $\varphi(g)$ は存在し, 次の形で与えられる:

$$\varphi(g) = \sqrt{-1}r(g) + p(g) - p(e),$$

ただし $r(g) = 0$ 又は $r(g) \in A(G)$ である. ▣

補題 6 $V \in \mathcal{U}_m(G)$, $\eta(g) = \partial V(g) \in B'(G, V)$ とすると,

$$\eta(g) \in B'_t(G, V) \Leftrightarrow V \in \mathcal{U}_m(G, \check{E}) \text{ かつ } v \in v(V). \quad \text{▣}$$

これらの補題及び注意 3 より次の結果を得る.

定理 6 $\varphi(g) \in N_m^{(B)}(G) \Leftrightarrow \varphi(g)$ は次の (7) 又は (8) で表わされる:

$$(7) \quad \varphi(g) = p(g) - p(e), \quad (p(g) \in P_m(G, \check{E})),$$

$$(8) \quad \varphi(g) = \sqrt{-1}r(g) + p(g) - p(e), \quad (r(g) \in A(G), p(g) \in P_m(G, \check{E})).$$

(7), (8) の右辺にある $p(g)$, $r(g)$ は $\varphi(g)$ により一意的に定まる. ▣

次の § での記述を簡単にするため, (7), (8) で与えられる関数 $\varphi(g)$ の集合をそれぞれ $N_m^{(-)}(G)$, $N_m^{(+)}(G)$ とかく. 従って

$$N_n(G) = N_n^{(-)}(G) \cup N_n^{(+0)}(G) \cup N_n^{(Z)}(G) \quad (\text{disjoint union}).$$

注意 6 $\eta=0$ の場合 $N_0^{(-)}(G), N_0^{(+0)}(G), N_0^{(Z)}(G)$ は次の様に特徴づけられることもできる (cf. [9]). いま $\varphi(g) \in N_0(G)$ とすると,

$$\varphi(g) \in N_0^{(-)}(G) \Leftrightarrow \varphi(g) \text{ は有界},$$

$$\varphi(g) \in N_0^{(+0)}(G) \Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi(g) \text{ は有界}, \operatorname{Im} \varphi(g) \text{ は非有界},$$

$$\varphi(g) \in N_0^{(Z)}(G) \Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi(g) \text{ は非有界}. \quad \square$$

§ 5 $N_n(G), \mathbb{C}U_{n+1}^N(G, \varepsilon)$ 及び $P_{n+1}^N(G, \varepsilon)$ の関係

いま $U \in \mathbb{C}U_{n+1}^{(0)}(G, \varepsilon)$ (cf. § 3), $\eta \in \mathcal{C}U(U)$ とする. このとき neutral vector $\xi \in \mathcal{E}(U)$ $\varepsilon \langle \xi, \eta \rangle = 1$ を満たすように選ぶ.

$f_\eta(\xi, \eta; c) := \lambda s\{\xi, \eta\}$ (ただし $c = \langle \eta, \eta \rangle$) とおくと, これは Π_1 部分空間であり, $f_\eta^U \in f_\eta^U = f_\eta(\xi, \eta; c) (+) f_\eta$. ($f_\eta = \Pi_n$ 部分空間) と分解しておく. この分解に対応して, U は次の様に表わすことができる:

$$U_\eta \xi = \xi$$

$$U_\eta \omega = \langle U_\eta \omega, \eta \rangle \xi + V_\eta \omega = \langle \omega, \eta(g^{-1}) \rangle \xi + V_\eta \omega, \quad (\omega \in f_\eta)$$

$$U_\eta \eta = \varphi(g)\xi + \eta + \eta(g).$$

ここで $\{V_\eta, f_\eta\} \in \mathbb{U}_n(G)$, $\varphi(g) \in \mathbb{C}(G)$, $\eta(g) \in \mathbb{Z}'_t(G, V)$ である. しかも $\varphi^*(g) = \varphi(g)$, $\varphi(e) = 0$ かつ次の関係が成立する:

$$\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) + \langle \eta(g), \eta(h^{-1}) \rangle.$$

従って, 定理 5 より $\varphi(g) \in N_n(G)$ となる. 更に U の η によ

て定まる特性関数は $\varphi(g) + C$ である.

— 才 $\varphi(g) \in N_n(G)$ 及 $w, C \in \mathbb{R}$ も任意に与える. $V = V^p \in \mathcal{U}_n(G)$, $\eta(g) = \eta_p(g) \in Z_t^1(G, V^p)$ (cf. 注意 5 (A)) とおき, $f_g(\xi, \eta; C)$ は 2 次元 Π 空間で $\langle \xi, \xi \rangle = 0$, $\langle \xi, \eta \rangle = 1$, $\langle \eta, \eta \rangle = C$ を満たすベース $\{\xi, \eta\}$ をもつものとする. 更に Π_{n+1} 空間 $f_g \in f_g = f_g(\xi, \eta; C)(\dagger) f_g^V$ と定める. このとき, G の unitary 表現 $U^{(p, C)} = \{U_g, f_g\} \in$

$$U_g \xi = \xi, \quad U_g w = \langle w, \eta(g^{-1}) \rangle \xi + V_g w \quad (w \in f_g^V),$$

$$U_g \eta = \varphi(g) \xi + \eta + \eta(g).$$

と定義できる. 任意の $C \in \mathbb{R}$, $\varphi(g) \in N_n^{(+0)}(G) \cup N_n^{(Z)}(G)$ に対して, $U^{(p, C)}$ は cyclic であり, $\eta \in \text{cv}(U^{(p, C)})$ となる. すなわち, この場合 $U^{(p, C)} \in \mathcal{CU}_{n+1}^{(+0)}(G, \varepsilon)$ である. しかも $U^{(p, C)}$ の η によって定まる特性関数は $\varphi(g) + C$ となる.

より詳しく次の定理が成立する (cf. [9. §§6-7]).

定理 7 $\mathcal{CU}_{n+1}^{(+0)}(G, \varepsilon) = \{U^{(p, C)} : \varphi(g) \in N_n^{(+0)}(G), C \in \mathbb{R}\}.$

$$\mathcal{CU}_{n+1}^{(Z)}(G, \varepsilon) = \{U^{(p, C)} : \varphi(g) \in N_n^{(Z)}(G), C \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

定理 8 $P_{n+1}^{(+0)}(G, \varepsilon) = \{\varphi(g) + C : \varphi(g) \in N_n^{(+0)}(G), C \in \mathbb{R}\},$

$$P_{n+1}^{(Z)}(G, \varepsilon) = \{\varphi(g) + C : \varphi(g) \in N_n^{(Z)}(G), C \in \mathbb{R}\}.$$

特に $N_n^{(+0)}(G) \subset P_{n+1}^{(+0)}(G, \varepsilon)$, $N_n^{(Z)}(G) \subset P_{n+1}^{(Z)}(G, \varepsilon).$ \(\square\)

注意 7 $\varphi(g) \in N_n^{(Z)}(G)$ の場合, 任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して $U^{(p, C)}$ は

$$U^{(p, C)} = V(\dagger) \varepsilon^+ \quad \text{と分解できる. ただし } V \in \mathcal{CU}_{n+1}^{(Z)}(G, \varepsilon), \varepsilon^+$$

は 1 次元 Π_0 空間 $\wedge$ の G の trivial 表現である. 従って $\varepsilon(U^{(p, C)})$

は2次元となり, $U^{(\varphi, c)}$ は cyclic ではない, $\square$

上の注意にもかかわらず, $P_{n+1}^{(-)}(G, \varepsilon)$ に属する関数は $N_n^{(-)}(G)$ に属する関数を用いて表わすことができる. いま $\varphi(g) \in N_n^{(-)}(G)$ とすると, 定理6より $\varphi(g) = p(g) - p(e)$, ($p(g) \in P_n(G, \mathbb{C})$) なる形で表示され, $p(g)$ しかかゝって $p(e)$ は $\varphi(g)$ に対して一意に定まる. このことより $\varphi(g) \in N_n^{(-)}(G)$ に対して, $\mu(\varphi) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ と

$$(9) \quad \mu(\varphi) = \begin{cases} p(e) & (\varphi(g) = p(g) - p(e), p(g) \in P_n(G, \mathbb{C})) \\ +\infty & (\varphi(g) \in N_n^{(-)}(G) \setminus N_n^{(-)}(G)) \end{cases}$$

と定める. このとき定理4と(7)を比較すると次の定理を得る.

定理9 $P_{n+1}^{(-)}(G, \varepsilon) = \{ \varphi(g) + c : \varphi(g) \in N_n^{(-)}(G), c \in \mathbb{R}, c < \mu(\varphi) \}.$ $\square$

注意8 (A) $\varphi(g) \in N_n^{(-)}(G)$ とすると, 次の成立する.

$$\mu(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi(g) \in P_{n+1}^{(-)}(G, \varepsilon)$$

$$\mu(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi(g) \in P_n(G, \mathbb{C})$$

$$\mu(\varphi) < 0 \Rightarrow \varphi(g) \in P_n(G, \varepsilon).$$

(B) 定理8-9と(9)より, $N_n(G)$ と $P_{n+1}^N(G, \varepsilon)$ は次で結ばれる.

$$(10) \quad P_{n+1}^N(G, \varepsilon) = \{ \varphi(g) + c : \varphi(g) \in N_n(G), c \in \mathbb{R}, c < \mu(\varphi) \}.$$
 $\square$

上の(10)より $\mathbb{C}U_{n+1}^N(G, \varepsilon)$ に属する表現は $N_n(G)$ に属する関数によって完全にきまると考えてよい.

§.6 可換群 G 上の $P_1(G)$

この§では G は可換とする. G の unitary character 群を $\hat{G}$,

G 上の連続な non-unitary character (i.e. $\chi(g) \in \mathbb{C}(G)$ で, $\chi(g)h = \chi(g)\chi(h)$ をみたし, $\chi^* \neq \chi$ なるもの)の全体を G^* とする.

Naimark [5] によれば, 任意の $U \in \mathcal{U}_n(G)$ に対して, $\mathcal{H}_U^\perp$ はいつも n 次元 U -不変 non-positive 部分空間をもつ. この事実を $n=1$ の場合に適用すると, 次の補題を得る (cf. [10]).

補題 7 $\mathcal{CU}_1(G)$ は次の様な表現 U^1, U^2 でつくられる:

$$U^1 = \chi_1 \otimes V^1, \quad (\chi_1 \in \hat{G}, V^1 \in \mathcal{CU}_1^N(G, \mathbb{E})),$$

$$U^2 = V^2 (+) W, \quad (V^2 \in \mathcal{CU}_0(G), W \in \mathcal{CU}_1(G, \mathbb{E})).$$

ただし W は $\chi_2 \in G^*$ を用いて, $W_g \zeta = \chi_2(g)\zeta$, $W_g \eta = \chi_2^*(g)\eta$ と定義される. $\{\zeta, \eta\}$ は $\mathcal{H}_W^\perp (= 2\text{次元 } \Pi_1 \text{ 空間})$ のベースで $\langle \zeta, \zeta \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = 0$, $\langle \zeta, \eta \rangle = 1$ をみたすもの.

更に U^1, U^2 の cyclic vector は次で与えられる:

$$cv(U^1) = cv(V^1),$$

$$cv(U^2) = \{\alpha\zeta + \beta\eta + w : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\beta \neq 0, w \in cv(V^2)\}. \quad \square$$

この補題と注意 8(B) より, $P_1(G)$ に属する関数は, unitary character と negative definite 関数, 又は non-unitary character と positive definite 関数を用いて表示できる.

定理 10 $\varphi(g) \in P_1(G) \iff \varphi(g)$ は次の (11) 又は (12) と表わされる:

$$(11) \quad \varphi(g) = \chi(g)(\psi(g) + c),$$

ここで $\chi \in \hat{G}$, $\psi(g) \in N_0(G)$, $c \in \mathbb{R}$, $c < \mu(\psi)$.

$$(12) \quad \varphi(g) = \lambda(\chi(g) + \chi^*(g) + \mu(\chi(g) - \chi^*(g))) + p(g),$$

ここで $\chi(g) \in G^*$, $p(g) \in P_0(G)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ で $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ なるもの. $\square$

注意 9 (A) 定理 6, 注意 6 及び定理 8 より, (II) にある $\varphi(g)$ は次の三つの形で表示されるものに分類できる:

$$\varphi_1(g) = \chi(g)(p(g) - c_1),$$

$$\varphi_2(g) = \chi(g)(\sqrt{-1} r(g) + p(g) + c_2),$$

$$\varphi_3(g) = \chi(g)(\psi(g) + c_2),$$

ここで $\chi(g) \in \hat{G}$, $p(g) \in P_0(G, \mathbb{R})$, $r(g) \in A(G)$, $\psi(g) \in N_0(G)$ で $\operatorname{Re} \psi(g)$ は非有界, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$ である.

(B) G が局所コンパクトでオ2可算公理をみたすとき, G 上の negative definite 関数は "Levy-Khinchin formula" によって統一的に積分表示される (cf. [3], [1]).

(C) この § のはじめにのべた Naimark の結果は, 非可換であっても, G が連結可解群 (cf [6]) 又は連結局所コンパクト amenable 群 (cf. [7]) の場合にも成立する. 従って, これらの場合にも定理 10 及び上の (A) は有効である. $\square$

References

- [1] Berg, C.: Potential theory on locally compact abelian groups, Springer, 1975.
- [2] Bognár, J.: Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.
- [3] Guichardet, A.: Symmetric Hilbert spaces and related topics, Springer, Lecture Notes in Math., Vol. 261 (1972).

- [4] Iohvidov, I.S. et al.: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I, Trudy Moskov Math. Obšč., 5(1956), 367-432.
- [5] Naimark, M.A.: On commuting unitary operators in spaces with an indefinite metric, Acta Sci. Math., (Szeged), 24(1963), 177-189.
- [6] _____: Unitary representations of solvable groups in spaces with indefinite metric, Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Math., 27(1963), 1181-1185.
- [7] Sakai, K.: On J-unitary representations of amenable groups, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 26(1977), 33-41.
- [8] _____: On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontrjagin spaces, J. Math. Kyoto Univ., 19(1979), 71-90.
- [9] _____: On quasi-negative definite functions and certain classes of cyclic unitary representations in Π_n -spaces, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 28(1979), 9-50.
- [10] _____: On indecomposable unitary representations of locally compact abelian groups in Π_n -spaces, Ibid., 27(1978), 1-20.