

The n -th relative operator entropies and the n -th residual relative operator entropy

Hiroshi Isa*, Eizaburo Kamei,
Hiroaki Tohyama* and Masayuki Watanabe*
(*Maebashi Institute of Technology)

1. Introduction.

A と B はヒルベルト空間上の strictly positive operator とする. path $A \natural_t B$ を次のように定義する ([2, 3, 10, etc.]).

$$A \natural_t B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

path $A \natural_t B$ は, 2 点 $A = A \natural_0 B$ と $B = A \natural_1 B$ を通る. t の範囲が $[0, 1]$ のとき, path $A \natural_t B$ は weighted geometric operator mean $A \sharp_t B$ に一致する (cf. [11]). ここで, $A \natural_t B = B \natural_{1-t} A$ となることに注意する.

Fujii と Kamei [1] は Ulmann [14] による relative entropy の operator version として relative operator entropy を次のように与えた.

$$S(A|B) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A \sharp_t B - A}{t} = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

これは Nakamura と Umegaki [12] によって与えられた operator entropy $-A \log A$ の relative version である.

Furuta [5] は generalized relative operator entropy を次のように定義した.

$$S_\alpha(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Yanagi, Kuriyama と Furuichi [15] は次に示す Tsallis relative operator entropy を導入した.

$$(*)1) \quad T_\alpha(A|B) \equiv \frac{A \sharp_\alpha B - A}{\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

ここで, $T_0(A|B) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha(A|B) = S(A|B)$ である. $(*)1)$ において, $A \sharp_\alpha B$ を $A \natural_\alpha B$ と置き換えることで Tsallis relative operator entropy における α の範囲を $[0, 1]$ から $\mathbb{R}$ へと拡張する. 本報告を通して, $T_\alpha(A|B)$ はこの拡張された範囲のものを指している.

これらの relative operator entropy $S(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$, $T_\alpha(A|B)$ の間には次に示す不等式が成立することを示した [6].

Proposition A. For $\alpha \in (0, 1)$,

$$S(A|B) \leq T_\alpha(A|B) \leq S_\alpha(A|B) \leq -T_{1-\alpha}(B|A) \leq S_1(A|B).$$

$S(A|B)$ と $S_\alpha(A|B)$ は

$$\left. \frac{d}{dt} A \natural_t B \right|_{t=0} = S(A|B), \quad \left. \frac{d}{dt} A \natural_t B \right|_{t=\alpha} = S_\alpha(A|B)$$

であるから, それぞれ path $A \natural_t B$ の $t=0$ と $t=\alpha$ での変化率を与えている. また, $T_\alpha(A|B)$ は path $A \natural_t B$ の区間 $[0, \alpha]$ での平均変化率と見なすことができる. Figure 1 に $S(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$, $T_\alpha(A|B)$ のイメージを示す.

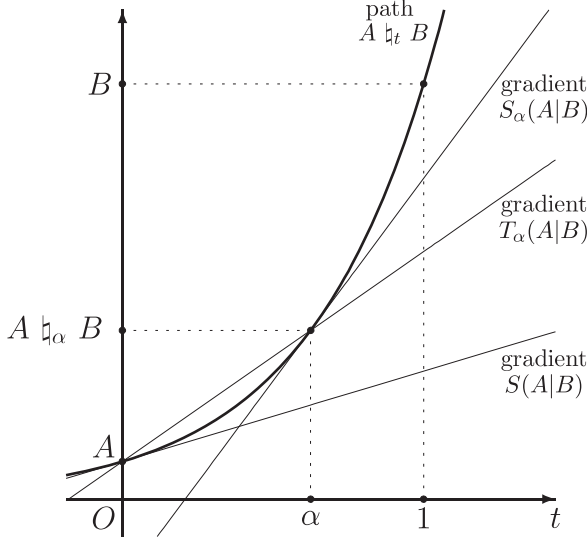


Figure 1. An image of $S(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$ and $T_\alpha(A|B)$.

Section 2 では n 次 Tsallis relative operator entropy $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ を帰納的に定義し, さらに $S^{[n]}(A|B) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha^{[n]}(A|B)$ として n 次 relative operator entropy を導入すると共にそれらの性質を調べる. その結果, $A \natural_t B$ について, Taylor 展開に相当する展開式が得られる. このとき, t^k の係数として $S^{[k]}(A|B)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) が現れ, 剰余項に $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ が現れる. このことに基づいて, $S^{[n]}(A|B)$ を一般化した n 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[n]}(A|B)$ と $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ を一般化した n 次 residual relative operator entropy を導入する. さらに, $S^{[n]}(A|B)$, $T_\alpha^{[n]}(A|B)$, $S_\alpha^{[n]}(A|B)$ について, Proposition A に対応する不等式に関して考察する.

Proposition A の不等式に現れる 2 つの項の差を operator valued divergence として与えた [9]. ここでは, 特に $\Delta_1 \equiv T_\alpha(A|B) - S(A|B)$ を扱う. Petz は operator valued divergence $D_{FK}(A|B) = B - A - S(A|B)$ を導入した [13]. これを Petz-Bregman divergence と呼ぶ [7]. これは, Δ_1 において, $\alpha = 1$ としたものともみることができる. $D_{FK}(A|B)$ のイメージを Figure 2 に示す. さらに, $D_{FK}(A|B)$ を用いて, Δ_1 は

$$(*)2 \quad \Delta_1 = \frac{1}{\alpha} D_{FK}(A|A \natural_\alpha B)$$

と表される [9].

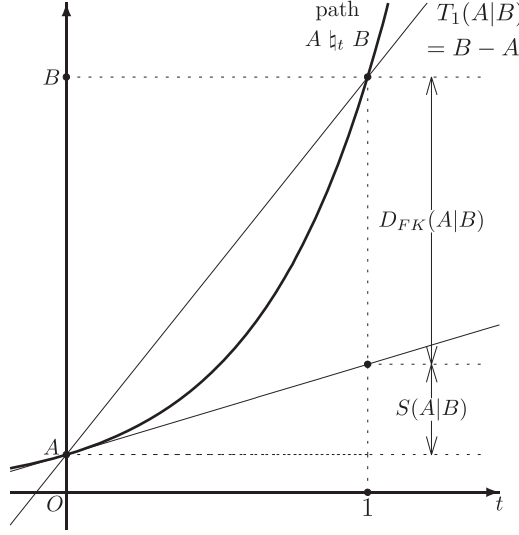


Figure 2. An interpretation of $D_{FK}(A|B)$.

これらに基づいて, Section 3 では n 次の relative operator entropy の差を n 次の operator valued divergence とする. ここでは, n 次 Petz-Bregman divergence を

$$D_{FK}^{[n]}(A|B) \equiv T_1^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)$$

とし, Δ_1 に相当する n 次の operator valued divergence として

$$\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \equiv T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)$$

を導入し, これらの性質を調べる. また, $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ と $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ との関係を示す.

2. Properties of the n -th relative operator entropies.

Section 1 で述べたように, $T_t(A|B) = \frac{A \natural_t B - A}{t}$ は区間 $[0, t]$ での path の平均変化率である. この見方に基づいて, n 次 Tsallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ を帰納的に定義する.

Definition 1. Let $n \in \mathbb{N}$ and $t \in \mathbb{R}$. We define the n -th Tsallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ as follows:

$$T_t^{[1]}(A|B) \equiv T_t(A|B), \quad t \in \mathbb{R}$$

and for $n \geq 2$

$$T_t^{[n]}(A|B) \equiv \frac{T_t^{[n-1]}(A|B) - T_0^{[n-1]}(A|B)}{t} \quad \text{if } t \neq 0,$$

$$T_0^{[n]}(A|B) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} T_t^{[n]}(A|B).$$

$T_0^{[n]}(A|B)$ を n 次 relative operator entropy と呼び, $S^{[n]}(A|B)$ と表す.

path 上の任意の 2 点 $A \natural_r B$ と $A \natural_s B$ での Tsallis relative operator entropy と generalized relative operator entropy については次のことがわかっている [8].

Theorem B. *Let r, s and $t \in \mathbb{R}$. Then*

$$(1) \quad T_t(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s - r)(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}(A|B),$$

$$(2) \quad S_t(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s - r)(A \natural_r B)A^{-1}S_{(s-r)t}(A|B).$$

In particular,

$$S(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s - r)(A \natural_r B)A^{-1}S(A|B).$$

同様の結果が n 次 Tsallis relative operator entropy と n 次 relative operator entropy についてもいえる.

Theorem 2. *Let r, s and $t \in \mathbb{R}$. Then*

$$T_t^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s - r)^n (A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n]}(A|B) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

In particular,

$$S^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s - r)^n (A \natural_r B)A^{-1}S^{[n]}(A|B) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Proof. n に関する帰納法により証明する.

Theorem B より, $n = 1$ のときに成立していることはわかっている. $n \geq 2$ として, $n - 1$ のときには成立していると仮定すると, $t \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} T_t^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) &= \frac{T_t^{[n-1]}(A \natural_r B | A \natural_s B) - T_0^{[n-1]}(A \natural_r B | A \natural_s B)}{t} \\ &= \frac{(s - r)^{n-1}(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n-1]}(A|B) - (s - r)^{n-1}(A \natural_r B)A^{-1}T_0^{[n-1]}(A|B)}{t} \\ &= (s - r)^n (A \natural_r B)A^{-1} \frac{T_{(s-r)t}^{[n-1]}(A|B) - T_0^{[n-1]}(A|B)}{(s - r)t} \\ &= (s - r)^n (A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n]}(A|B) \end{aligned}$$

であり, n についても成立する. また,

$$\begin{aligned} T_0(A \natural_r B | A \natural_s B) &= \lim_{t \rightarrow 0} T_t^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (s - r)^n (A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n]}(A|B) = (s - r)^n (A \natural_r B)A^{-1}T_0(A|B) \end{aligned}$$

であるから, $t = 0$ でも成立する. □

n 次 Tallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ と n 次 relative operator entropy $S^{[n]}(A|B)$ は, 次のように表すことができる.

Proposition 3. *Let $n \in \mathbb{N}$. Then*

$$(1) \quad T_t^{[n]}(A|B) = \frac{1}{t^n} \left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-1} t^k S^{[k]}(A|B) \right) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$(2) \quad S^{[n]}(A|B) = \frac{1}{n!} A(A^{-1}S(A|B))^n.$$

Proof. n に関する帰納法により証明する.

$n = 1$ のとき

$$T_t^{[1]}(A|B) = T_t(A|B) = \frac{A \natural_t B - A}{t}$$

であるから, (1) は成立する. また

$$S^{[1]}(A|B) = S(A|B)$$

であるから, (2) も成立している.

$n \geq 2$ として $n-1$ までは (1) と (2) が成立していると仮定する. $t \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} T_t^{[n]}(A|B) &= \frac{T_t^{[n-1]}(A|B) - T_0^{[n-1]}(A|B)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t^{n-1}} \left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-2} t^k S^{[k]}(A|B) \right) - S^{[n-1]}(A|B) \right) \\ &= \frac{1}{t^n} \left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-1} t^k S^{[k]}(A|B) \right) \end{aligned}$$

であるから, (1) は成立する. さらに $S^{[k]}(A|B)$ ($k \leq n-1$) に (2) を用いることにより

$$\begin{aligned} T_t^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{t^n} \left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A(A^{-1}S(A|B))^k \right) \\ &= \frac{1}{t^n} A^{\frac{1}{2}} \left((A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t - I - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^k \right) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である. したがって, (2) を示すためには, $a > 0$ について

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^n} \left(a^t - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (\log a)^k \right) = \frac{1}{n!} (\log a)^n$$

であることを示せばよい. Taylor の定理より, ある $\theta \in (0, 1)$ を用いて

$$a^t = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (\log a)^k + \frac{t^n}{n!} a^{\theta t} (\log a)^n$$

と書ける. したがって

$$\frac{1}{t^n} \left(a^t - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (\log a)^k \right) = \frac{1}{n!} a^{\theta t} (\log a)^n$$

と書け, $0 \leq |\theta t| \leq |t|$ より

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{n!} a^{\theta t} (\log a)^n = \frac{1}{n!} (\log a)^n$$

である. □

Proposition 3に基づいて, $T_t^{[n]}(A|B)$ と $S^{[n]}(A|B)$ について考察する. まず, $A \natural_t B$ の k 次導関数は次のようになることがわかる.

Lemma 4. *Let $k \in \mathbb{N}$. Then*

$$\frac{d^k}{dt^k} A \natural_t B = (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^k.$$

Proof. $a > 0$ に対して, $\frac{d^k}{dt^k} a^t = a^t (\log a)^k$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} A \natural_t B &= A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^k A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} A^{-1} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} A^{-1} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdots A^{-1} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \\ &= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))(A^{-1}S(A|B)) \cdots (A^{-1}S(A|B)) \\ &= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^k. \end{aligned}$$
□

Proposition 3 の (1) を書き直すと

$$(\diamond 1) \quad A \natural_t B = A + \sum_{k=1}^{n-1} t^k S^{[k]}(A|B) + t^n T_t^{[n]}(A|B)$$

であり, Proposition 3 の (2) と Lemma 4 より $S^{[k]}(A|B) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} A \natural_t B \Big|_{t=0}$ である. したがって, $(\diamond 1)$ は, k 次 relative operator entropy $S^{[k]}(A|B)$ を t^k の係数とする $A \natural_t B$ の 0 の周囲での Taylor 展開に相当する式とみなすことができる. また, このとき, $T_t^{[n]}(A|B)$ は $(\diamond 1)$ の剰余項を $\frac{1}{t^n}$ 倍したものと現れている.

そこで, $A \natural_t B$ の α の周囲での Taylor 展開を用いて, k 次 relative operator entropy $S^{[k]}(A|B)$ の一般化としての k 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[k]}(A|B)$ と, n 次 Tallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ の一般化としての n 次 residual relative operator entropy を導入する. $A \natural_t B$ の α の周囲での Taylor 展開は Lemma 4 より

$$(\diamond 2) \quad A \natural_t B = A \natural_\alpha B + \sum_{k=1}^{n-1} (t - \alpha)^k \frac{1}{k!} (A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k + R_n$$

である.

Definition 5. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $t, \alpha \in \mathbb{R}$. We define the k -th generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[k]}(A|B)$ as follows:*

$$S_\alpha^{[k]}(A|B) \equiv \frac{1}{k!} (A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k.$$

$S_\alpha^{[k]}(A|B)$ は $S^{[k]}(A|B)$ により, 次のように表すことができる.

Proposition 6. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Then*

$$S_\alpha^{[k]}(A|B) = (A \natural_\alpha B) A^{-1} S^{[k]}(A|B).$$

Proof.

$$\begin{aligned} S_\alpha^{[k]}(A|B) &= \frac{1}{k!} (A \natural_\alpha B) (A^{-1} S(A|B))^k \\ &= (A \natural_\alpha B) A^{-1} \frac{1}{k!} A (A^{-1} S(A|B))^k \\ &= (A \natural_\alpha B) A^{-1} S^{[k]}(A|B). \end{aligned} \quad \square$$

Theorem 2 と同様の結果が n 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[n]}(A|B)$ についてもいえる.

Theorem 7. *Let $r, s, \alpha \in \mathbb{R}$. Then*

$$S_\alpha^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) = (s - r)^n S_{(1-\alpha)r+s\alpha}^{[n]}(A|B) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Proof. Path $A \natural_t B$ の性質 (cf. [2, 4, 8])

$$(A \natural_r B) \natural_t (A \natural_s B) = A \natural_{(1-t)r+st} B$$

と Proposition 6, Theorem 2 より

$$\begin{aligned} S_\alpha^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) &= ((A \natural_r B) \natural_\alpha (A \natural_s B)) (A \natural_r B)^{-1} S^{[n]}(A \natural_r B | A \natural_s B) \\ &= (A \natural_{(1-\alpha)r+s\alpha} B) (A \natural_r B)^{-1} (s - r)^n (A \natural_r B) A^{-1} S^{[n]}(A|B) \\ &= (s - r)^n (A \natural_{(1-\alpha)r+s\alpha} B) A^{-1} S^{[n]}(A|B) \\ &= (s - r)^n S_{(1-\alpha)r+s\alpha}^{[n]}(A|B). \end{aligned} \quad \square$$

Collorary 8. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Then*

$$S_\alpha^{[n]}(B|A) = (-1)^n S_{1-\alpha}^{[n]}(A|B).$$

次に, ($\diamond 2$) の剰余項 R_n を用いて, $T_t^{[n]}(A|B)$ を一般化した n 次 residual relative operator entropy を $\frac{1}{(t-\alpha)^n} R_n$ として定義する. Proposition 6, Proposition 3 より

$$\begin{aligned} R_n &= A \natural_t B - A \natural_\alpha B - \sum_{k=1}^{n-1} (t - \alpha)^k S_\alpha^{[k]}(A|B) \\ &= A \natural_t B - A \natural_\alpha B - \sum_{k=1}^{n-1} (t - \alpha)^k (A \natural_\alpha B) A^{-1} S^{[k]}(A|B) \\ &= A \natural_t B - A \natural_\alpha B - (A \natural_\alpha B) A^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} (t - \alpha)^k S^{[k]}(A|B) \\ &= (t - \alpha)^n (A \natural_\alpha B) A^{-1} \frac{1}{(t - \alpha)^n} \left(A \natural_{t-\alpha} B - A - \sum_{k=1}^{n-1} (t - \alpha)^k S^{[k]}(A|B) \right) \\ &= (t - \alpha)^n (A \natural_\alpha B) A^{-1} T_{t-\alpha}^{[n]}(A|B) \end{aligned}$$

であるから, n 次 residual relative operator entropy は具体的には $(A \natural_\alpha B)A^{-1}T_{t-\alpha}^{[n]}(A|B)$ と表せる.

Table 1 に n 次 residual relative operator entropy と n 次 relative operator entropy $S^{[n]}(A|B)$, n 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[n]}(A|B)$, n 次 Tsallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ の関係を示す.

Table 1			
$\frac{1}{(t-\alpha)^n}R_n$	$\xrightarrow{\alpha=0}$	$T_t^{[n]}(A B)$	
$\downarrow_{t \rightarrow \alpha}$		$\downarrow_{t \rightarrow 0}$	
$S_\alpha^{[n]}(A B)$	$\xrightarrow{\alpha=0}$	$S^{[n]}(A B)$	

$S(A|B)$, $T_\alpha(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$ の間には Proposition A の不等式が成立していた. ここで定義した n 次 relative operator entropy $S^{[n]}(A|B)$, n 次 Tsallis relative operator entropy $T_\alpha^{[n]}(A|B)$, n 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[n]}(A|B)$ の間には次に示す不等式が成立する.

Theorem 9. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in [0, 1]$. Then the following hold:*

(1) *If n is odd,*

$$S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B) \leq -T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_1^{[n]}(A|B).$$

(2) *If n is even,*

$$S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B) \leq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_1^{[n]}(A|B) \quad \text{for } A \leq B$$

and

$$S^{[n]}(A|B) \geq T_\alpha^{[n]}(A|B) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B) \geq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \geq S_1^{[n]}(A|B) \quad \text{for } A \geq B.$$

Proof. Propotision 3 と Propotision 6 より

$$\begin{aligned} S^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{n!} A(A^{-1}S(A|B))^n, \\ T_\alpha^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{\alpha^n} \left(A \natural_\alpha B - A - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k S^{[k]}(A|B) \right), \\ S_\alpha^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{n!} (A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^n \end{aligned}$$

である.

まず, n が奇数または $A \leq B$ ならば

$$S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立することを示す. この不等式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^n &\leq \frac{1}{\alpha^n} \left((A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha - I - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^k \right) \\ &\leq \frac{1}{n!} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^n \end{aligned}$$

と同値であり, $A \leq B$ であることと $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \geq I$ であることは同値であるから, n が奇数または $x \geq 1$ ならば

$$\frac{1}{n!}(\log x)^n \leq \frac{1}{\alpha^n} \left(x^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k \right) \leq \frac{1}{n!} x^\alpha (\log x)^n$$

が成立することを示せばよい. 一方, Taylor の定理より, ある $\theta \in (0, 1)$ を用いて

$$x^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k + \frac{\alpha^n}{n!} x^{\theta\alpha} (\log x)^n,$$

すなわち

$$\frac{1}{\alpha^n} \left(x^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k \right) = \frac{1}{n!} x^{\theta\alpha} (\log x)^n$$

と書けるから, 上の不等式は

$$(\bullet) \quad (\log x)^n \leq x^{\theta\alpha} (\log x)^n \leq x^\alpha (\log x)^n$$

と同値である. $(\bullet)$ は, $x \geq 1$ ならば, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について成立し, n が奇数ならば, $0 < x \leq 1$ でも, $1 \geq x^{\theta\alpha} \geq x^\alpha$, $\log x \leq 0$ だから成立する. 以上より

$$(\star 1) \quad n \text{ が奇数または } A \leq B \text{ ならば } S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立する.

$1 - \alpha \in [0, 1]$ であるから, 上の結果より, n が奇数または $A \geq B$ ならば

$$S^{[n]}(B|A) \leq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_{1-\alpha}^{[n]}(B|A)$$

が成立する. したがって, Collorary 8 より

$$(\star 2) \quad n \text{ が奇数または } A \geq B \text{ ならば } (-1)^n S_1^{[n]}(A|B) \leq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq (-1)^n S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

も成立する.

また, n が偶数かつ $0 < x \leq 1$ ならば

$$(\log x)^n \geq x^{\theta\alpha} (\log x)^n \geq x^\alpha (\log x)^n$$

が成立するので, 上と同様にして

$$(\star 3) \quad n \text{ が偶数かつ } A \geq B \text{ ならば } S^{[n]}(A|B) \geq T_\alpha^{[n]}(A|B) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立し, Collorary 8 より

$$(\star 4) \quad n \text{ が偶数かつ } A \leq B \text{ ならば } S_1^{[n]}(A|B) \geq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立する.

したがって, n が奇数ならば, $(\star 1)$, $(\star 2)$ より, (1) の不等式が成立する. n が偶数ならば, $(\star 1)$, $(\star 4)$ より, (2) の $A \leq B$ のときの不等式が成立し, $(\star 2)$, $(\star 3)$ より, (2) の $A \geq B$ のときの不等式が成立する. $\square$

$A \leq B$ であるときには Proposition A と同様の関係が成立する.

Corollary 10. *Let $\alpha \in [0, 1]$. If $A \leq B$, then*

$$S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B) \leq (-1)^n T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_1^{[n]}(A|B)$$

hold for any $n \in \mathbb{N}$.

3. The n -th operator valued divergence.

この section では、Section 2 で定義した $S^{[n]}(A|B)$, $S_\alpha^{[n]}(A|B)$, $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ を用いて、 n 次の operator valued divergence を導入し、その性質を調べる。

$S(A|B) = S^{[1]}(A|B)$, $S_\alpha(A|B) = S_\alpha^{[1]}(A|B)$, $T_\alpha(A|B) = T_\alpha^{[1]}(A|B)$ である。 $\Delta_1 = T_\alpha^{[1]}(A|B) - S^{[1]}(A|B)$ であり、また、 $\alpha = 1$ のときは $D_{FK}(A|B)$ であるから、これらを 1 次の operator valued divergence とみなし、 n 次の relative operator entropy の差を n 次の operator valued divergence とする。まず、 n 次 Petz-Bregman divergence $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ を次のように定義する。

Definition 11. *Let $n \in \mathbb{N}$. We define the n -th Petz-Bregman divergence $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ as follows:*

$$D_{FK}^{[n]}(A|B) \equiv T_1^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B).$$

Theorem 9 より、 n 次 Petz-Bregman divergence $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ は次の性質を持つ。

Proposition 12. *Let $n \in \mathbb{N}$. Then*

- (1) $D_{FK}^{[n]}(A|B) \geq 0$ if n is odd,
- (2) $D_{FK}^{[n]}(A|B) \geq 0$ if n is even and $A \leq B$ and $D_{FK}^{[n]}(A|B) \leq 0$ if n is even and $A \geq B$.

さらに、Proposition 3 より、 $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ は次のように表される。

Theorem 13. *For any $n \in \mathbb{N}$, the following holds:*

$$D_{FK}^{[n]}(A|B) = B - A - \sum_{k=1}^n S^{[k]}(A|B).$$

また、 n 次の operator valued divergence の一つとして、 $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ を次で定義する。

Definition 14. *For $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in [0, 1]$, we define*

$$\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \equiv T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B).$$

ここで、 $\mathcal{D}_\alpha^{[1]}(A|B) = \Delta_1$, $\mathcal{D}_1^{[n]}(A|B) = D_{FK}^{[n]}(A|B)$ である。 $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ も $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と同様の性質を持つ。

Proposition 15. *Let $n \in \mathbb{N}$. Then*

- (1) $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \geq 0$ if n is odd,
- (2) $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \geq 0$ if n is even and $A \leq B$ and $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \leq 0$ if n is even and $A \geq B$.

Theorem 16. *Let $\alpha \in (0, 1]$. Then the following holds for $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = \frac{1}{\alpha^n} \left(A \natural_\alpha B - A - \sum_{k=1}^n \alpha^k S^{[k]}(A|B) \right).$$

Remark. $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = \alpha T_\alpha^{[n+1]}(A|B)$, 特に $\mathcal{D}_0^{[n]}(A|B) = O$ である.

$\alpha \neq 0$ のとき, $\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ は次に示す性質を持つ.

Theorem 17. *Let n be a fixed natural number and α be a fixed real number in $(0, 1]$. Then the following holds:*

$$\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = O \text{ if and only if } A = B.$$

上の Remark より Theorem 17 が成立することを示すためには, 次の proposition が成立することを示せば十分である.

Proposition 18. *Let n be a fixed natural number and α be a fixed real number in $[0, 1]$. Then the following holds:*

$$T_\alpha^{[n]}(A|B) = O \text{ if and only if } A = B.$$

Proof. Proposition 3 より, $A = B$ ならば $T_\alpha^{[n]}(A|B) = O$ であることは自明である. そこで, $T_\alpha^{[n]}(A|B) = O$ を仮定し, $A = B$ であることを示す.

$\alpha = 0$ のときは

$$T_0^{[n]}(A|B) = S^{[n]}(A|B) = \frac{1}{n!} A(A^{-1}S(A|B))^n = O$$

であるから, $\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = O$ であり, $A = B$ であることは明らかである.

$\alpha \neq 0$ のとき, Proposition 3 より

$$\begin{aligned} A \natural_\alpha B &= A + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k S^{[k]}(A|B) \\ &= A^{\frac{1}{2}} \left(I + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k \right) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である. $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ の任意の spectrum を x とすると $x > 0$ であり

$$x^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k$$

が成り立っている. 一方, Taylor の定理より, ある $\theta \in (0, 1)$ を用いて

$$x^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k + \frac{\alpha^n}{n!} x^{\theta\alpha} (\log x)^n$$

と書くことができる. これらの2つの式より $\frac{\alpha^n}{n!} x^{\theta\alpha} (\log x)^n = 0$ がいえ, $x = 1$ である. x は任意であるので, $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = I$ であり, $A = B$ を得る. $\square$

Section 1 で述べたように, Δ_1 は Petz-Bregman divergence $D_{FK}(A|B)$ を用いて (*2) のように表される. したがって, $\mathcal{D}_\alpha^{[1]}(A|B)$ と $D_{FK}^{[1]}(A|B)$ の間に次の関係があることがわかる.

$$\mathcal{D}_\alpha^{[1]}(A|B) = \frac{1}{\alpha} D_{FK}^{[1]}(A|A \natural_\alpha B).$$

$\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ と $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ についても上と同様のことがいえる.

Proposition 19. *Let $\alpha \in (0, 1]$. Then the following holds for all $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = \frac{1}{\alpha^n} D_{FK}^{[n]}(A|A \natural_\alpha B).$$

Proof. Theorem 16, Theorem 2, Theorem 13 より

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{\alpha^n} \left(A \natural_\alpha B - A - \sum_{k=1}^n \alpha^k S^{[k]}(A|B) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^n} \left(A \natural_\alpha B - A - \sum_{k=1}^n S^{[k]}(A|A \natural_\alpha B) \right) = \frac{1}{\alpha^n} D_{FK}^{[n]}(A|A \natural_\alpha B). \quad \square \end{aligned}$$

参考文献

- [1] J. I. Fujii and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japon.*, **34**(1989), 341–348.
- [2] J. I. Fujii and E. Kamei, Interpolational paths and their derivatives, *Math. Japon.*, **39**(1994), 557–560.
- [3] J. I. Fujii and E. Kamei, Path of Bregman-Petz operator divergence, *Sci. Math. Jpn.*, **70**(2009), 329–333.
- [4] J. I. Fujii, Interpolationality for symmetric operator means, *Sci. Math. Jpn.*, **75**(2012), 267–274.
- [5] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, *Linear Algebra Appl.*, **381**(2004), 219–235.
- [6] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality, *Sci. Math. Jpn.*, **75**(2012), 289–298.
- [7] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, On relations between operator valued α -divergence and relative operator entropies, *Sci. Math. Jpn.*, **78**(2015), 215–228. (online: e-2015 (2015), 215–228.)
- [8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Expanded relative operator entropies and operator valued α -divergence, *J. Math. Syst. Sci.*, **5**(2015), 215–224.
- [9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Some operator divergences based on Petz-Bregman divergence, *Sci. Math. Jpn.*, **80**(2017), 161–170.
- [10] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, *Math. Japon.*, **39**(1994), 395–400.
- [11] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math Ann.*, **248**(1980), 205–224.
- [12] M. Nakamura and H. Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, *Proc. Jap. Acad.*, **37**(1961), 149–154.
- [13] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, *Acta Math. Hungar.*, **116**(2007), 127–131.
- [14] A. Uhlmann, Relative entropy and Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, *Commun. Math. Phys.*, **54**(1977), 22–32.
- [15] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra Appl.*, **394**(2005), 109–118.