

特性曲線有限差分法の離散 L^2 理論

野津裕史¹, 田端正久²

¹ 早稲田大学高等研究所, h.notsu@aoni.waseda.jp

² 早稲田大学理工学術院, tabata@waseda.jp

1 はじめに

特性曲線法は流れ問題の数値解法として強力であり, 多くの研究者によってスキーム開発が行われており, 特に有限要素法と組み合わせた特性曲線有限要素法は理論解析が進んでいる (例えば [1, 2, 4, 5, 6, 8] を参照). 特性曲線有限要素法の場合には合成関数の積分が現れるが, それを厳密に行うことは容易ではない. そのため, しばしば数値積分が用いられるが, 精度の低い積分公式は不安定性の原因となるため注意が必要である [9, 10]. 近年, 質量集中化による数値積分を要さない特性曲線有限要素法が開発され, 最大値原理に基づいて安定性・収束性が示された [7].

本稿では特性曲線法と有限差分法を組み合わせた, 特性曲線有限差分法を考える. 特性曲線有限差分法では積分は現れない. 我々は移流拡散方程式のための特性曲線有限差分法の離散 L^2 理論を構築した [3]. ここでは, その離散 L^2 理論を展開する際に有用な道具について述べる. 特性曲線法では流体粒子の軌跡に沿った離散化を行う. 有限差分法の場合, 上流点は一般に格子点上にはないため, 双一次補間を用いて上流点での値を定める. その際に現れる合成関数の評価は, 安定性の議論において有用である. また, 時間 2 次精度の特性曲線法は, 特性曲線に沿った Crank-Nicolson 法といえる. 適合性はその時空間における流体粒子の動きを考慮して行う.

2 合成関数の離散 L^2 評価

離散 L^2 ノルムを定義し, 特性曲線有限差分法における物質微分項の評価で有用な合成関数の離散 L^2 評価を与える.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を長方形領域とし, $\Gamma \equiv \partial\Omega$ を Ω の境界とする. 領域 Ω の直交差分格子を考える. h_i ($i = 1, 2$) を x_i 方向の空間格子間隔, $h \equiv \max\{h_1, h_2\}$, $h_{\min} \equiv \min\{h_1, h_2\}$ とする. 格子点を $x_{i,j} \equiv (ih_1, jh_2)^T$ で表し, 格子点集合 $\Omega_h, \Gamma_h, \bar{\Omega}_h$ と格子点関数空間 V_{0h}, V_h, V_{h0} をそれぞれ,

$$\Omega_h \equiv \{x_{i,j} \in \Omega; i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad \Gamma_h \equiv \{x_{i,j} \in \Gamma; i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad \bar{\Omega}_h \equiv \Omega_h \cup \Gamma_h, \quad (1)$$

$$V_{0h} \equiv \{v_h; \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad V_h \equiv \{v_h; \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad V_{h0} \equiv \{v_h \in V_h; v_h|_{\Gamma_h} = 0\}, \quad (2)$$

とする. ($v_h \in V_h$ に対して $v_h|_{\Omega_h} \in V_{0h}$ なので, しばしば v_h を V_{0h} の元とみなす.) 格子点集合 S_h と, S_h 上で定義された格子点関数 v_h, w_h に対して, 離散 L^2 内積および離散 L^2 ノルムをそれぞれ,

$$(v_h, w_h)_{S_h} \equiv h_1 h_2 \sum_{x \in S_h} v_h(x) w_h(x), \quad \|v_h\|_{l^2(S_h)} \equiv \{(v_h, v_h)_{S_h}\}^{1/2} \quad (3)$$

で定義する. $\Pi_h: V_h \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ を双一次補間作用素とする. 記号 $\circ$ は関数の合成を表し, 一般に $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X: \Omega \rightarrow \Omega$ に対して,

$$\psi \circ X(x) \equiv \psi(X(x)) \quad (4)$$

とする.

仮定 1 (差分格子列に対する仮定) h に依存しないある正定数 h_0, γ_1, γ_2 があって, 任意の (h_1, h_2) に対して次を満たす.

$$h_1, h_2 \in (0, h_0], \quad \gamma_1 \leq \frac{h_2}{h_1} \leq \gamma_2. \quad (5)$$

以下では上の仮定 1 が成り立つとする. 合成関数の離散 L^2 評価は次である.

命題 1 与えられた関数 w は $w \in C^1(\bar{\Omega})^2$ で $w = 0$ ($x \in \Gamma \equiv \partial\Omega$) を満たすとする. δ は

$$0 < \delta < 1/\|w\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \quad (6)$$

かつ, h と δ に依存しないある正定数 C_1 が存在して,

$$W_0 \delta \leq C_1 h_{\min}. \quad (7)$$

を満たすとする. ここに $W_0 \equiv \max\{|w_i(x)|; x \in \bar{\Omega}, i = 1, 2\}$ である.

$$X(x) \equiv x - \delta w(x) \quad (8)$$

とおく. このとき, 正定数 $c_1(w)$ が存在して, 任意の $v_h \in V_h$ に対して

$$\|(\Pi_h v_h) \circ X\|_{l^2(\Omega_h)} \leq (1 + c_1 \delta) \|v_h\|_{l^2(\Omega_h)} \quad (9)$$

が成立する.

3 差分近似の積分評価

本節では差分近似を積分形で評価する。時空間曲線に沿った適合性評価を離散 L^2 ノルムを用いて行う際にも利用できる汎用的なものである。

補題 1 δ を正数, $F : [-\delta/2, \delta/2] \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする。次式が成り立つ。

$$\Gamma_1(F; \delta) \equiv \frac{1}{2} \left\{ F\left(\frac{\delta}{2}\right) + F\left(-\frac{\delta}{2}\right) \right\} - F(0) = \frac{\delta^2}{8} \int_0^1 ds_1 \int_{-s_1}^{s_1} F''\left(\frac{\delta}{2}s_2\right) ds_2$$

$$(F \in C^2[-\delta/2, \delta/2]). \quad (10)$$

$$\Gamma_2(F; \delta) \equiv \frac{F\left(\frac{\delta}{2}\right) - F\left(-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} - F'(0) = \frac{\delta^2}{8} \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_{-s_2}^{s_2} F'''(\frac{\delta}{2}s_3) ds_3$$

$$(F \in C^3[-\delta/2, \delta/2]). \quad (11)$$

$$\Gamma_3(F; \delta) \equiv \frac{F\left(\frac{\delta}{2}\right) - 2F(0) + F\left(-\frac{\delta}{2}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} - F''(0)$$

$$= \frac{\delta^2}{4} \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \int_{-s_3}^{s_3} F''''(\frac{\delta}{2}s_4) ds_4 \quad (F \in C^4[-\delta/2, \delta/2]). \quad (12)$$

T を正定数とする。 Δt を時間刻み幅とし, $t^n \equiv n\Delta t$ ($n \in \mathbb{Z} \cup \{\mathbb{Z} + 1/2\}$), $N_T \equiv [T/\Delta t]$ とする。補題 1 を基に, 次の補題が成り立つ。

補題 2 δ を正数とする。 $x \in \bar{\Omega}_h$ と $n = 1, \dots, N_T$ に対して $F = F(\cdot; x, t^n) : [-\delta/2, \delta/2] \rightarrow \mathbb{R}$ を与えられた関数とする。 Γ_i ($i = 1, 2, 3$) を補題 1 の関数とし, $r_i^n : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) を

$$r_i^n(x) \equiv \Gamma_i(F(\cdot; x, t^n); \delta) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (13)$$

で定義される関数とする。このとき, 次の不等式が成り立つ。

$$\|r_1\|_{l^2(l^2)} \leq \frac{\delta^2}{8} \left\| \left\{ \int_{-1}^1 F''\left(\frac{\delta}{2}s; \cdot, \cdot\right)^2 ds \right\}^{1/2} \right\|_{l^2(l^2)} \quad (F \in C^2[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]), \quad (14)$$

$$\|r_2\|_{l^2(l^2)} \leq \frac{\delta^2}{8\sqrt{6}} \left\| \left\{ \int_{-1}^1 F'''(\frac{\delta}{2}s; \cdot, \cdot)^2 ds \right\}^{1/2} \right\|_{l^2(l^2)} \quad (F \in C^3[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]), \quad (15)$$

$$\|r_3\|_{l^2(l^2)} \leq \frac{\delta^2}{24\sqrt{2}} \left\| \left\{ \int_{-1}^1 F''''(\frac{\delta}{2}s; \cdot, \cdot)^2 ds \right\}^{1/2} \right\|_{l^2(l^2)} \quad (F \in C^4[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]). \quad (16)$$

ここに,

$$\|r_i\|_{l^2(l^2)} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=1, \dots, N_T} \|r_i^n\|_{l^2(\Omega_h)}^2 \right\}^{1/2} \quad (17)$$

である。

4 特性曲線有限差分スキーム

移流拡散問題：

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - v \Delta \phi = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, T), \\ \phi = \phi^0 & \text{in } \Omega, \text{ at } t = 0, \end{cases} \quad (18)$$

を満たす関数 $\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ、を考える。ここに、 v は正定数、 $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた関数である。本稿では、 $u \in C^0(0, T; C^1(\bar{\Omega}))$, $u|_{\Gamma} = 0$ および $f \in C^0(0, T; C^0(\bar{\Omega}))$ を課す。

問題 (18) のための時間 2 次精度特性曲線有限差分スキームを述べる。 $D^i \equiv \partial / \partial x_i$ ($i = 1, 2$) とする。流体粒子の上流点の 1, 2 次近似を表す X_1^n, X_2^n を

$$X_1^n(x) \equiv x - u^n(x) \Delta t, \quad X_2^n(x) \equiv x - u^{n-1/2}(x - u^n(x) \frac{\Delta t}{2}) \Delta t, \quad (19)$$

とする。上付き添え字 $n - 1/2$ は $t = (n - 1/2) \Delta t$ での値を取ることを意味している。 $\Pi_h^{(\frac{1}{2}, 0)}$ と $\Pi_h^{(0, \frac{1}{2})}$ をそれぞれ、 x_1 と x_2 方向に $1/2$ ずらした格子点、

$$\bar{\Omega}_h^{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv \{x_{i+1/2, j} \in \bar{\Omega}; i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad \bar{\Omega}_h^{(0, \frac{1}{2})} \equiv \{x_{i, j+1/2} \in \bar{\Omega}; i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad (20)$$

での値を用いる双一次補間作用素とする (図 1 参照)。 ∇_{hi} ($i = 1, 2$) を x_i 方向の中心差分作用素とし、

$$\nabla_h \equiv (\nabla_{h1}, \nabla_{h2})^T, \quad \Delta_{h,i} \equiv \nabla_{hi}^2 \quad (i = 1, 2), \quad \Delta_h \equiv \sum_{i=1}^2 \Delta_{h,i}, \quad (21)$$

$$\tilde{\nabla}_{h1}^{(n)} v_h \equiv (\Pi_h^{(\frac{1}{2}, 0)} \nabla_{h1} v_h) \circ X_1^n, \quad \tilde{\nabla}_{h2}^{(n)} v_h \equiv (\Pi_h^{(0, \frac{1}{2})} \nabla_{h2} v_h) \circ X_1^n, \quad \tilde{\nabla}_h^{(n)} \equiv (\tilde{\nabla}_{h1}^{(n)}, \tilde{\nabla}_{h2}^{(n)})^T, \quad (22)$$

$$\tilde{\Delta}_{h,i}^{(n)} \equiv \nabla_{hi} \tilde{\nabla}_{hi}^{(n)} \quad (i = 1, 2), \quad \tilde{\Delta}_h^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^2 \tilde{\Delta}_{h,i}^{(n)}. \quad (23)$$

とする。 $\tilde{\Delta}_h^{(n)}$ は、変形離散ラプラス作用素である。 $\nabla_{(2h)1} \nabla_{(2h)2} v_h(x_{i,j})$ を $\{x_{i\pm 1, j\pm 1}\} \subset \bar{\Omega}_h$ の 4 点を用いて $\partial^2 / \partial x_1 \partial x_2$ を近似する差分作用素とする。

ϕ^0 の近似 $\phi_h^0 \in V_{h0}$ が与えられたとする。問題 (18) のための時間 2 次精度特性曲線有限差分スキームは

$$\frac{\phi_h^n - (\Pi_h \phi_h^{n-1}) \circ X_2^n}{\Delta t}(x) - \frac{v}{2} \left(\Delta_h \phi_h^n + \tilde{\Delta}_h^{(n)} \phi_h^{n-1} \right)(x)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\nu\Delta t}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 (D^i u_i^n) \Delta_{h,i} + (D^2 u_1^n + D^1 u_2^n) \nabla_{(2h)1} \nabla_{(2h)2} \right\} \phi_h^{n-1}(x) \\
& = \frac{1}{2} \left(f^n + f^{n-1} \circ X_1^n \right) (x) \quad (x \in \Omega_h),
\end{aligned} \tag{24}$$

を満たす $\phi_h = \{\phi_h^n\}_{n=1}^{N_T} \subset V_{h0}$ を求めよ, となる.

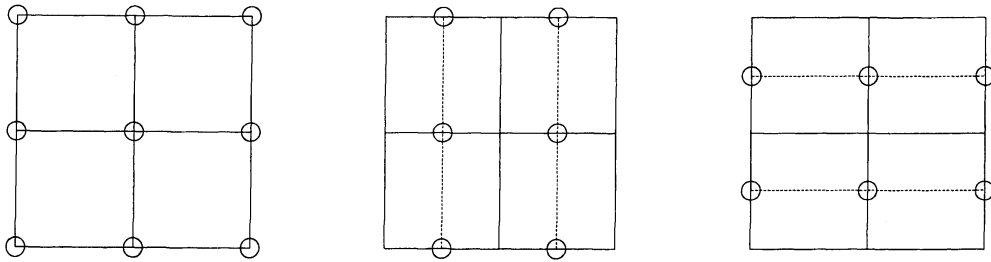


図1 補間作用素 Π_h (左), $\Pi_h^{(\frac{1}{2},0)}$ (中), $\Pi_h^{(0,\frac{1}{2})}$ (右) に用いられる格子点位置.

注意 1 ∇_{h1} は $\bar{\Omega}_h^{(\frac{1}{2},0)}$ で定義される. $\bar{\Omega}_h^{(\frac{1}{2},0)}$ の X_1^n による上流点は格子点とは限らないため, 補間作用素 $\Pi_h^{(\frac{1}{2},0)}$ を要する. 補間作用素 $\Pi_h^{(0,\frac{1}{2})}$ も同様の理由で必要となる.

5 スキーム (24) の安定性と収束性

命題 1 において, δ に Δt を, w に u^n を代入すると,

$$\|(\Pi_h v_h) \circ X_1^n\|_{l^2(\Omega_h)} \leq (1 + c\Delta t) \|v_h\|_{l^2(\Omega_h)} \tag{25}$$

の評価が成り立つ. これを基礎として, 離散 Gronwall の補題を用いて, スキーム (24) の安定性が得られる.

定理 1 (安定性) $\Delta t \leq 1/\|u\|_{C^0(W^{1,\infty}(\Omega))}$ が成り立つとする. また, h と Δt に依存しない正定数 C_1 が存在し, $U_0^\infty \Delta t \leq C_1 h_{\min}$ を満たすとする. このとき, 次式が成立する.

$$\|\phi_h\|_{l^\infty(l^2)} + \sqrt{\nu} \|\phi_h\|_{l^2(h^{1/2})} \leq c(\|u\|_{C^0(C^1(\bar{\Omega}))}, f, \phi_h^0). \tag{26}$$

ここに,

$$U_0^\infty \equiv \max \left\{ |u(x, t)|_\infty; x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T] \right\}, \tag{27}$$

$$|a|_\infty \equiv \max\{|a_i|; i = 1, 2\} \quad (a \in \mathbb{R}^2), \quad (28)$$

$$\|\phi_h\|_{l^\infty(l^2)} \equiv \max_{n=0, \dots, N_T} \|\phi_h^n\|_{l^2(\Omega_h)}, \quad (29)$$

$$|\phi_h|_{l^2(h^{1'})} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \left\| \frac{\nabla_h \phi_h^n + \tilde{\nabla}_h^{(n)} \phi_h^{n-1}}{2} \right\|_{l^2(\Omega_h^{(\frac{1}{2}, 0)}) \times l^2(\Omega_h^{(0, \frac{1}{2})})}^2 \right\}^{1/2}, \quad (30)$$

である。

収束性について述べる。補題 1 の Γ_i および 補題 2 の r_i ($i = 1, 2, 3$) はそれぞれ、外力項、物質微分項、拡散項において利用できる。時空間内に位置する特性曲線；

$$(x - (t^n - t)u^n(x), t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times (t^{n-1}, t^n], \quad (31)$$

を考える。例えば、式 (10) において、

$$F(s) = F(s; x, t^n) \equiv f\left(x + \left(s - \frac{\Delta t}{2}\right)u^n(x), t^{n-1/2} + s\right), \quad \delta \equiv \Delta t, \quad (32)$$

とすると、

$$R_f^n(x) \equiv \frac{1}{2} \left\{ f^n(x) + f^{n-1}(x - u^n(x)\Delta t) \right\} - f^{n-1/2}\left(x - u^n(x)\frac{\Delta t}{2}\right) = \Gamma_1(F(\cdot; x, t^n), \Delta t), \quad (33)$$

より、 $g_0(x, t) \equiv f(x - (t^n - t)u^n(x), t)$ ($(x, t) \in \bar{\Omega} \times (t^{n-1}, t^n]$) として

$$\|R_f\|_{l^2(l^2)} \leq \frac{\Delta t^2}{8} \left\| \left\{ \int_{-1}^1 F''\left(\frac{\Delta t}{2}s; \cdot, \cdot\right)^2 ds \right\}^{1/2} \right\|_{l^2(l^2)} \leq c\Delta t^2 \left\| \frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, T; l^2(\Omega_h))} \quad (34)$$

を得る。他の項にも同様な評価を行って定理 1 と合わせると、スキーム (24) について、次の誤差評価を得る。

定理 2 (誤差評価) 流速 u および問題 (18) の解 ϕ は十分滑らかとする。定理 1 と同じ仮定の下で、次式が成り立つ。

$$\|\phi - \phi_h\|_{l^\infty(l^2)} + \sqrt{v}|\phi - \phi_h|_{l^2(h^{1'})} \leq c(u, \phi)(\Delta t^2 + h). \quad (35)$$

6 結び

我々は特性曲線有限差分法の離散 L^2 理論を構築した。本稿では、特性曲線有限差分法の安定性・収束性評価に有用な道具について述べ、その適用例を示した。特性曲線有限差分法では積分は現れない。

参考文献

- [1] J. Douglas Jr. and T.F., Russell, Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.19 (1982), pp.871–885.
- [2] H. Notsu, Numerical computations of cavity flow problems by a pressure stabilized characteristic-curve finite element scheme, *Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science*, Online ISSN: 1347-8826 (2008).
- [3] H. Notsu, H. Rui and M. Tabata, A second-order characteristics finite difference method for convection-diffusion problems, in preparation.
- [4] H. Notsu and M. Tabata, Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化・特性曲線法結合有限要素スキーム, 日本応用数理学会論文誌, Vol.18 (2008), pp.427–445.
- [5] H. Notsu and M. Tabata, A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Scientific Computing*, Vol.38 (2009), pp.1–14.
- [6] O. Pironneau, *Finite Element Methods for Fluids*, John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [7] O. Pironneau and M. Tabata, Stability and convergence of a Galerkin-characteristics finite element scheme of lumped mass type, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.64 (2010), pp.1240–1253.
- [8] H. Rui and M. Tabata, A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems, *Numerische Mathematik*, Vol.92 (2002), pp.161–177.
- [9] M. Tabata, Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.199 (2007), pp.424–431.
- [10] M. Tabata and S. Fujima, Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment, In C. Groth and D. W. Zingg, editors, *Computational Fluid Dynamics 2004*, Springer, pp.177–182, 2006.