

|           |                                                                                                    |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 氏 名       | 木 田 良 才                                                                                            |
| 学位(専攻分野)  | 博 士 (理 学)                                                                                          |
| 学 位 記 番 号 | 理 博 第 3069 号                                                                                       |
| 学位授与の日付   | 平 成 18 年 3 月 23 日                                                                                  |
| 学位授与の要件   | 学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当                                                                            |
| 研究科・専攻    | 理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻                                                                        |
| 学位論文題目    | The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory<br>(測度同値理論の視点からの写像類群について) |
| 論文調査委員    | (主 査)<br>助教授 泉 正 己 教 授 河 野 明 助教授 加 藤 毅                                                             |

### 論 文 内 容 の 要 旨

Gromov は、幾何学的群論における擬等長性の測度論的類似物として、離散群の測度同値の概念を導入した。以下、離散群は可算離散群を意味する。

定義 1. 離散群  $\Gamma$  と  $\Lambda$  が測度同値であるとは、 $\sigma$ -有限測度付きの標準 Borel 空間と、その上の  $\Gamma$  と  $\Lambda$  の保測的で本質的に自由な可測作用で次を満たすものが存在することを言う： $\Gamma$  と  $\Lambda$  の作用は可換であり、それぞれが測度有限の基本領域を持つ。

群の測度空間への作用の軌道同値性の概念は作用素環論との関係で古くから研究されているが、測度同値性の軌道同値性を用いた特徴付けは重要である。

二つの群の間に有限核かつ有限余核の準同型が存在するとき、それらはほとんど同型であると言う。ほとんど同型な二つの離散群は測度同値である。加算従順群は全て整数群  $\mathbb{Z}$  と測度同値である。 $\Gamma$  が Lie 群  $G$  の離散部分群で、 $G/\Gamma$  が  $G$ -不変な有限測度を持つとき、 $\Gamma$  は  $G$  の格子であると言う。Lie 群の二つの格子は測度同値な離散群の典型例であり、 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  ( $n$  は 3 以上) の格子については、Furman による測度同値性に関する剛性定理が知られている。しかしそれ以外のクラスの群については、測度同値性に関してほとんど研究がなされていなかった。本論文は、曲面の写像類群を測度同値性の観点から扱っている。

向き付け可能で連結かつコンパクトな曲面  $M$  の写像類群を  $\Gamma(M)$  と記す。以下  $M$  の種数が  $g$  で境界成分の個数が  $p$  であるとき、 $\kappa(M) = 3g + p - 4$  とおき、 $g$  が 3 以上のとき  $g_0 = g$ 、 $g$  が 2 以下のとき  $g_0 = 2$  とする。本申請論文の主要な結果は以下の定理 2、定理 3 である。

定理 2.  $M^1$  と  $M^2$  を  $\kappa(M^1)$  と  $\kappa(M^2)$  が非負である二つの曲面とする。もし二つの写像類群  $\Gamma(M^1)$  と  $\Gamma(M^2)$  が測度同値であれば  $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$  と  $g_0(M^1) = g_0(M^2)$  が成り立つ。

定理 3.  $M$  を  $\kappa(M)$  が非負である曲面とする。このとき次が成り立つ：

- (i)  $\Gamma$  を  $\Gamma(M)$  の無限部分群とし、 $G$  を階数 2 の自由群の  $n$  個の直積を部分群として含む離散群とする。このとき、 $\Gamma$  と  $G$  が測度同値ならば  $n$  は  $(3g + p - 2)/2$  以下である。
- (ii)  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  を無限群とし、 $\Gamma_1$  または  $\Gamma_2$  は無限従順部分群を含むとする。このとき  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  の直積は  $\Gamma(M)$  と測度同値にはならない。
- (iii) 無限従順群を正規部分群として含むような離散群は  $\Gamma(M)$  と測度同値にならない。
- (iv)  $\kappa(M)$  が正ならば、 $\Gamma(M)$  は (Gromov の意味での) 双曲群と測度同値にならない。

離散群  $\Gamma$  があるコンパクト空間に位相的に従順に作用するとき、 $\Gamma$  は exact であると言う。群の exactness については作用素環論において多くの研究がなされており、 $\Gamma$  が exact である必要十分条件は  $\Gamma$  の被約  $C^*$ -群環が exact であることが知られている。曲面の写像類群が exact であるかどうかは、専門家の間で懸案になっていた。上記の定理の証明では、写像

類群の Thurston 境界への作用や curve complex の Gromov 境界への作用の解析が本質的な役割を果たす。Thurston 境界への作用は位相的に従順でなく、curve complex の Gromov 境界はコンパクトでないが、これらの作用が測度論的に従順であることと、巧妙な帰納的議論により次の定理が得られている。

定理 4. 曲面の写像類群は exact である。

## 論文審査の結果の要旨

離散群の測度同値性は、幾何学的群論の第一人者である Gromov により導入された概念である。近年その研究に著しい進展があり (Gaboriau による  $l^2$ -Betti 数と測度同値性の関係の研究や, Furman による単純 Lie 群の格子と測度同値性の研究など), 離散群論の専門家間でその重要性が認識されつつある。しかし, Lie 群の格子以外の群のクラスについては, 測度同値性の研究はあまりなされていなかった。本論文の研究は, 曲面の写像類群を測度同値性の観点から扱った最初の本格的な研究であり, 木田氏はこの研究課題に関して複数の決定的な結果を得ている。特に定理 2 は, 写像類群の測度同値性でのほぼ完全な分類定理であり, その意義は大きい。

測度同値性は, 群作用の軌道同値性により特徴付けられることが知られており, その研究には, 群作用が生成する同値関係の研究が有効であることが多い。Adams は双曲群の Gromov 境界への作用の Zimmer の意味での測度論的従順性を示し, その応用として双曲群の作用が生成する同値関係に関する著しい結果を得た。曲面の写像類群と双曲群の間には多くの類似点があることが知られており, 本論文の研究でも, 写像類群の Teichmueller 空間の Thurston 境界や curve complex の Gromov 境界への作用の測度論的従順性を示すことが主定理の証明の第一歩となる。しかし, Thurston 境界には従順でない固定化群を持つ点があり, また curve complex は局所有限でない双曲空間であるため, 双曲群の場合に比べ従順性の証明には技術的な困難が伴う。木田氏は, curve complex の tight geodesic に関する Bowditch の結果を用いるというアイデアにより, この困難を見事に克服した。

分類定理である定理 2 は, 二つの種数 2 以上曲面の写像類群が測度同値であることの必要十分条件が, それらの曲面が同相であることを示しており, この方向では最終的な結果である。種数が小さい場合の分類は未完成であるが, この場合には実際に例外的な状況が生じることが知られている。定理の証明では, 上記の作用の従順性の証明以外にも独創性に富んだ議論が展開されている。木田氏は, 写像類群の canonical reduction system から着想を得て, 写像類群の作用が生成する同値関係の canonical reduction system を構成し, さらにそれを使った巧妙な組み合わせ論的議論により定理の証明を行っている。

本論文では, 測度同値性の研究成果以外にも作用素環論的に重要な研究成果 (定理 4) が得られている。離散群の exactness は作用素環論において重要な概念であり近年盛んに研究されているが, 幾何学的にも重要な応用を持つ。例えば, exact な離散群に対しては Novikov 予想が正しいことが, Higson-Roe, Yu によって証明されている。「写像類群が exact であることを証明せよ」という問題には, 複数の専門家が取り組んでいたが, 本論文の研究以前には解決されていなかった。Thurston 境界や curve complex への写像類群の作用の解析の副産物として, 木田氏は写像類群が exact であることの証明にも成功している。

以上の理由により, 大学院在学 5 年未満であるが, 本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認めた。また, 論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。