

橋脚前面の渦の機構に関する実験的研究

宇 民 正

EXPERIMENTAL STUDY ON THE STRUCTURE OF THE VORTEX JUST UPSTREAM OF BRIDGE PIER

By Tadashi UTAMI

Synopsis

The horse shoe vortex arising just upstream of the bridge pier plays an important role in local scour. In order to make clear the structure of the vortex, it is important to estimate each term of the basic equation of motion and to make clear what kind of non-dimensional value is effective for the vortex motion. On the result of the investigation of these matter, the dimension of the vortex and the position of the axis of the vortex are made clear by dimensional analysis of experimental data. That is, it is shown that these values are expressed by function of the radius of the pier, water depth and shear velocity.

On the basis of the result, it is also shown that the vertical expansion of the region of the vortex can be analysed by use of the shear velocity as a parameter.

1. 概 説

橋脚前面の水路床近くに橋脚をとり囲む形で水平軸をもついわゆる馬蹄型渦が発生し、この渦により橋脚前面の水路床近くではかなり強力な逆流が生じ、橋脚周辺の深堀れの原因になっている。このような流れは三次元的でしかも境界条件が複雑であるため現象把握においてもまたその解析においても非常に困難なものとなっている。その流れの機構を明らかにする目的で著者はできるだけ簡単な境界条件の下で現象に作用する要因もなるべく少なくするという観点から、平滑固定床をもつ一様な長方形断面水路の中心に一本の橋脚を設定し、また流れも層流状態とした場合について実験的かつ解析的に研究してきた。すなわち著者はこのような流れについての詳細な実験による現象把握の結果にもとづいて一つのモデル設定の下に近似的に解析することを試み、その結果は実測値とかなりよく一致することを示した。¹⁾ その際に水路床面における逆流域の大きさ $\bar{r}_0$ を初期水深 h_0 で割った二次元量 $\bar{r}_0/h_0$ をモデル構成上の重要な要素として導入した。本報告はその値を乱流の場合について実験的に定めることによりその場合の逆流域の大きさを明らかにするとともに渦軸の位置についても検討を行なったものである。このように平滑な固定床に設置された橋脚周辺の逆流域の大きさを明らかにすることは、工学的には橋脚周辺の深堀れ防止のための保護工の施工範囲を明らかにする意義をもつ。

このような渦について小川²⁾はその大きさを実験的に求め、その結果を次元解析的に処理している。また Roper³⁾らは渦の強さについて検討を加えている。すなわち、小川は次元解析の結果つぎのような関係式を導き出した。

$$\frac{\bar{r}_0}{h_0} = 2.16 \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^{4/5} \cdot \left(\frac{u_*}{u_0} \right)^{1/3} \cdot F_{r_0}^{-2/5} \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

ここで、 r_0 は橋脚の半径、 u_* は $\sqrt{g h_0 I}$ で定義されたまさつ速度、 I は水面こう配、 u_0 は平均流速、 $F_{r_0} = u_0 / \sqrt{g h_0}$ である。ところがこの式を用いると、 r_0/h_0 がほぼ35に等しいところで $\bar{r}_0 = r_0$ となり、 r_0/h_0 がさらに大きくなると $\bar{r}_0 < r_0$ すなわち逆流域の範囲が橋脚の断面より小さくなるという矛盾を含んでいる。

一方, Roper らはせん断流中にすでに存在していた渦糸が橋脚によって集中させられた結果として馬蹄型渦が発生することを指摘し, stagnation 平面内での渦度の積分値を検討することにより渦の強さを求めようとした。すなわち, Fig. 1 の ABCD 面内の渦度の積分値 Γ はその周に沿う流速ベクトル $\mathbf{V}$ の循環に等しいから, BC に沿っては流速はポテンシャル流の流速分布を仮定し, DC および AD に沿っては流速は 0 であるとして, 円柱橋脚の場合については次式を導き出した。

$$\Gamma \equiv \oint \mathbf{V} d\mathbf{s} = u_s x - \frac{u_s r_0 x}{r_0 + x_0} \quad (1.2)$$

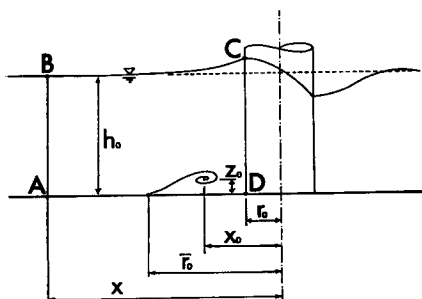


Fig. 1 Definition sketch.

ここで, ds は周に沿うベクトルを意味し, u_s は橋脚より十分上流における水面での接近流速, x は BC あるいは AD の長さである。橋脚が設置されない場合の Γ の値は $u_s x$ で与えられるので, 上式右辺の第二項が橋脚を設置したために生じる Γ の増分 $\Delta\Gamma$ と考えられ, この値の $x \rightarrow \infty$ における値 $r_0 u_s$ が渦の核の強さを規定する量と見てこのことから核の強さは円柱の半径と接近流速を用いたレイノルズ数 $r_0 u_s / \nu$ の関数であるとした。

以上に述べた Roper らの考え方は渦度の概念から馬蹄型渦の強さを見積る指標をえようとした点で注目すべきものであるが, 結論の所で疑問を残している。すなわち, D 点をわずかに検査面の内側にずらせて $\Delta\Gamma$ を検討してみると, CD に沿ってはかなりの強さの下降流があり, また DA に沿っては同様に逆流がある。したがって $\Delta\Gamma$ の値は Roper らが考えたものよりずっと大きくなるはずであり, しかもこれらの下降流や逆流は r_0 や u_s 以外の要素にも影響されるので $\Delta\Gamma$ の値は依と然して未知である。いいかえるならば, Roper らによって与えられた $\Delta\Gamma$ は馬蹄型渦による渦度の他に橋脚の前面および水路床面に沿って生成された境界層中に含まれる渦度をも含めたものになっている。

2. 実験方法と実験条件

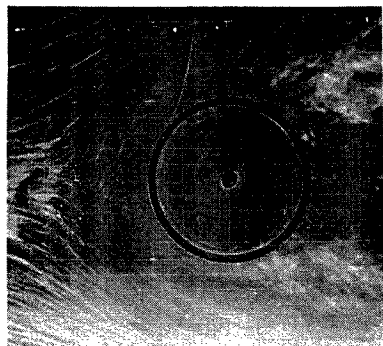
実験は幅 40cm こう配 1/1000 の一様なアクリル樹脂製の水路の中央に円柱断面をもつアクリル樹脂製の橋脚を一本設置した状態で行なった。逆流域の測定は, Table 1 に示すように流量については 5 段階, 水路下流端におけるせき上げ状態については 5 種類設定し, その組合せによる 15 種類の流況の下で, かつ各流況の下で円柱の直径を 1.49cm から 10.506cm まで 7 種類 ($r_0 = 0.745, 1.015, 1.265, 2.013, 3.013, 4.013, 5.253\text{cm}$) ないし 11 種類 (以上の他に $r_0 = 1.518, 1.763, 2.495, 3.500\text{cm}$) 変化させて行なった。また渦軸の

Table 1 Cases of experiment and the conditions.

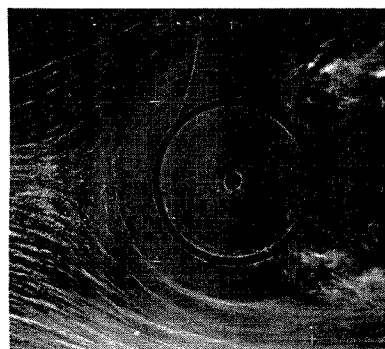
Discharge $Q(l/\text{sec})$		0.77	9.43	20.0	30.0	40.0
Flow regulation at down stream end	Free overfall	G 1-0	G 10-0	G 20-0	G 30-0	G 40-0
	Weir 1.5 cm high		G 10-1.5			
	" 3.0 "		G 10-3	G 20-3	G 30-3	G 40-3
	" 8.0 "		G 10-8	G 20-8	G 30-8	G 40-8
	" 14.0 "			G 20-14		

位置の測定は上記のうち $Q=9.43, 20.0, 30.0, 40.0$ (l/sec) の流量で、下流端条件は自由落下の場合と 3cm および 8cm のせき上げの場合の組合せによる12種の流況について、また各流況毎に月柱橋脚は7種類のものを設置して行なった。

逆流域の測定はつぎのようにして行なった。すなわち、微細なプラスチックの粉末を橋脚より上流で流れの中に散布するとそれが流れに従って水路床上を流下するが、逆流域の部分はそれが排除された形になる。



(a)



(b)



(c)

Photo. 1 Movement of plastic powder due to vortex flow.

その様子を水路の下から写真撮影し、その結果をよみとった。その一例を示したものが **Photo. 1** である。この写真で (a) は粉末をまいた直後の逆流域の様子を示しているが、粉末が排除される領域の境界線が2~3重になっていることが認められる。ところがその境界線はわずかな時間の経過とともに (b) に示すように外の方へおしやられ、最終的に (c) で示す形になる。本報告で逆流域の大きさとよんでいるものは (c) で示されている状態での排除範囲の大きさを意味している。このような逆流域の形成状態を、流れの中に注入された染料の流下状態から観察される渦の形成状態と関連して考えてみる。**Fig. 1** に stagnation 平面内の渦の状態を模式的に示したが、実際には平均的な流線の模様は **Fig. 2** に示すように回転方向の異なる複数個の渦が同時に発生しており、しかもこれらの渦が互に干渉しあって消長している。**Photo. 1** (a) あるいは (b) で示される境界線は、互に回転方向が逆でしかも相接している二つの渦の境界線が水路床に達する所で形成されるものであり、それが渦の消長にともなって強さが卓越する渦によって外側へおしやられていることが観察される。

渦軸の位置の測定は、流れの中に注入された染料が渦にまきこまれる様子から渦軸の平均的な位置を水路床と円柱に刻みこんだ尺度から読みとることによったが、上述したように渦は複数個でかつ非常に不安定であるので、ここでは強さがもっとも卓越する渦軸の位置を測定したが測定誤差がかなりあると思われる。

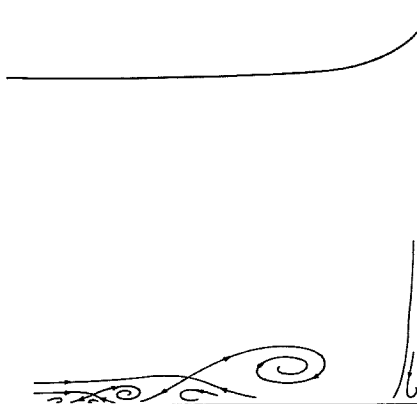


Fig. 2 Mean stream-line pattern in stagnation plane.

3. 実験結果とその考察

3.1 運動方程式中の各項の比較

実験結果を次元解析法を用いて検討するにあたり、運動方程式中の各項のオーダーを見積もって、どの項がどういう形で渦中の流れを規定しているかを明らかにしておく必要がある。長さの代表量を L 、流速の代表量を U で表わすと、主流については L は水深 h_0 あるいは橋脚の半径 r_0 に相当し、 U は主流の断面平均流速に相当する。一方渦内の流れについては L は逆流域の大きさ $r_0 - r_0$ あるいは渦軸の位置を与える $x_0 - r_0$ と z_0 に相当する。ここでは簡単のためにこれら $r_0 - r_0$, $x_0 - r_0$ あるいは z_0 を l_0 という記号で代表させておく。また渦内の U は記号 v_0 で代表させることにする。以上の記号を用いて cm-sec 単位で運動方程式中の各項のオーダーを著者の実験条件の範囲において見積ったものが Table 2 である。

Table 2 Order estimation of the each term in the basic equatin of motion.

		Main flow	Vortex flow
Length	L	$h_0, r_0 \sim 10^1$	$l_0 \sim 10^0$
Velocity	U	$u_0 \sim 10^{1-2}$	$v_0 \sim 10^1$
Convection term	U^2/L	$u_0^2/h_0, u_0^2/r_0 \sim 10^{1-3}$	$v_0^2/l_0 \sim 10^2$
Body force term	X	$g \sim 10^3$	$g \sim 10^3$
Normal stress term	$P/\rho L$	$g \sim 10^3$	$gh_0/l_0 \sim 10^4$
Shear stress term	$\nu U/L^2$	$\nu u_0/h_0^2 \sim 10^{-2-3}$	$\nu v_0/l_0^2 \sim 10^{-1}$

この表より渦内の流れについては、外力項は一定値だから考察の対称から除外するならば、慣性項と圧力項が卓越して大きく、せん断力項は無視しうるほど小さいことが明らかである。したがって、ここでは、オーダーが最も大きい圧力項の無次元量 l_0/h_0 , すなわち、 $(r_0 - r_0)/h_0$, $(x_0 - r_0)/h_0$ および z_0/h_0 をそれぞれ主流の圧力項の無次元量 r_0/h_0 に関係づけてみて、そこでえられた実験係数を慣性項の無次元量と関係づけて求めるという方法をとる。

慣性項の無次元量としては上表から $v_0^2/g l_0$ がえられ、これはいうならば「局所フルード数」という意味をもつ量であるが、上述の資料整理の方法においてはそこに含まれる v_0 が未知数であるためこの量を慣性項の無次元量として用いることはできない。したがってここでは渦中の慣性項の無次元量を主流のそれから求めてみる。

円柱橋脚の中心に原点をおき、主流の流下方向に x 軸、水路床面に垂直かつ上向きに z 軸を設定するとき、慣性項のうちとくにその値が大ききものは $u \cdot \partial u / \partial x$ および $u \cdot \partial u / \partial z$ であるが、 $u \cdot \partial u / \partial x$ は円柱周辺の流れにおいては x/r_0 の関数であり、この量との関数関係の検討は圧力項の検討で済んだものとみなされる。そこで $u \cdot \partial u / \partial z$ の無次元量をつぎに求める。橋脚よりずっと上流で接近流速は対数分布則に従うとすれば次式が成立つ。

$$\frac{u}{u_*} = A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} \quad (3.1)$$

ここで u_* はまざつ速度、 A_s および κ は定数である。上式を用いると、 $u \cdot \partial u / \partial z$ を u_0^2/h_0 でわって無次元化した量は、

$$\begin{aligned} \frac{h_0}{u_0^2} \cdot u \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\kappa} \frac{u_*^2}{u_0^2} \left(A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} \right) \frac{h_0}{z} \\ &= \frac{1}{\kappa} \frac{A_s + (1/\kappa) \ln(u_* z/\nu)}{\{A_s - (1/\kappa) + (1/\kappa) \ln(u_* h_0/\nu)\}^2} \frac{h_0}{z} \quad (3.2) \end{aligned}$$

となり、慣性項は $u_* h_0 / \nu$, $\mu_* z / \nu$ および z / h_0 の関数となる。ここに含まれている z は、主流の流線のうち渦にまきこまれるものの水路床から高さを意味するが、簡単のためこれを h におきかえると、結局慣性項は $u_* h_0 / \nu$ のみの関数となる。

3.2 逆流域の大きさ

上述の考察にもとづいて、 $\bar{r}_0 - r_0$ を水深 h_0 で割って無次元化し、 r_0 / h_0 と関係づけた。この方法によれば、先に指摘した小川の資料整理の方法上の矛盾を避けることができる。その結果を Fig. 3 に示す。この図から、同じ流況の下で設置する橋脚の半径だけを変化させると、逆流域の大きさの無次元量 $(\bar{r}_0 - r_0) / h_0$

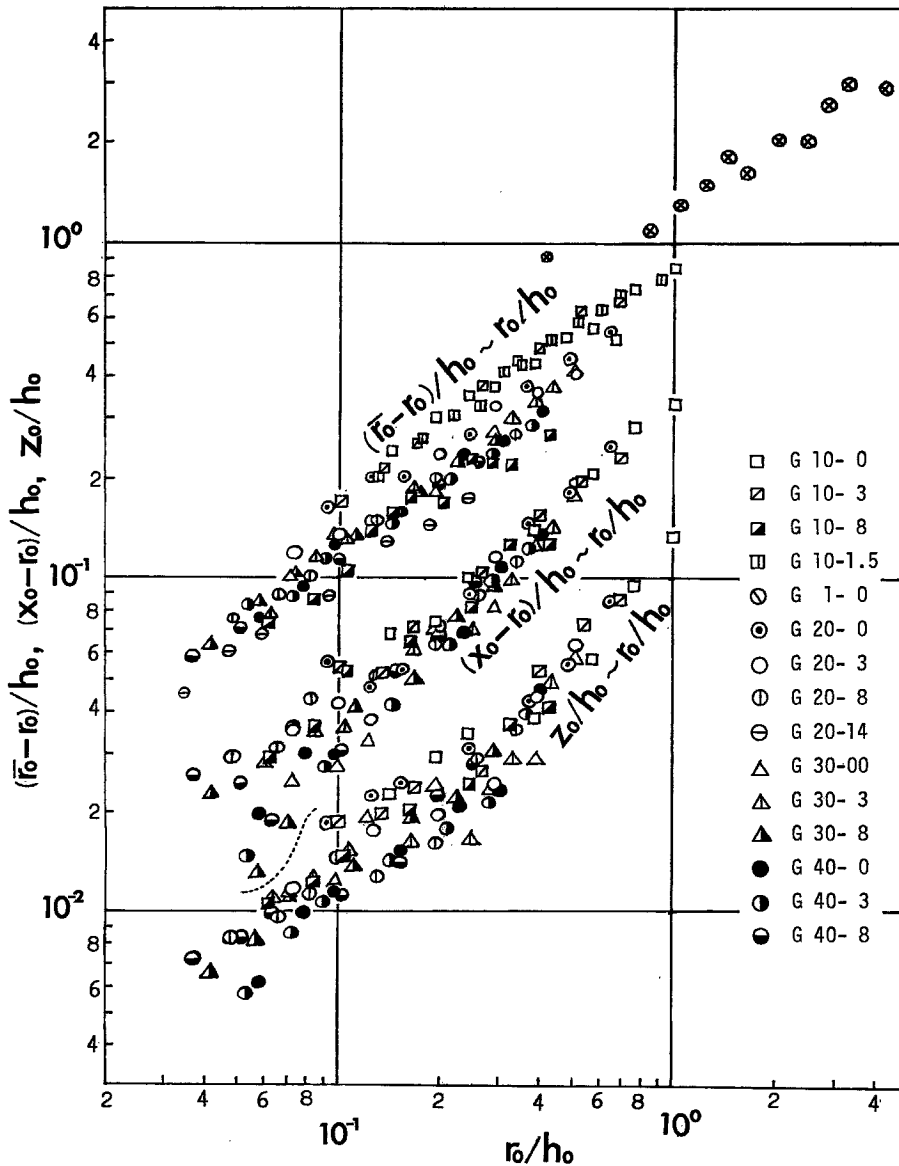


Fig. 3 Scale of back-flow region and position of vortex axis.

は r_0/h_0 の変化に従って両対数紙上でほぼ直線的に変化することが認められる。そこで、

$$(\bar{r}_0 - r_0)/h_0 = \alpha_1 (r_0/h_0)^{m_1} \dots \dots \dots (3.3)$$

とにおいて α_1 と m_1 を求め、これをやはり前項の考察に基づき $u_* h_0/\nu$ と関係づけた。その結果を Fig. 4 および Fig. 5 に示す。ただし図においてプロットされた点は資料整理の結果えられた最確値であり、各点を通して縦方向に引かれた線分は各変動範囲を示している。底面におけるせん断応力を τ_0 とすると、レイノルズ数中に含まれているまさつ速度 u_* は $\sqrt{\tau_0/\rho}$ で定義されるから本来ならば

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gR \left\{ i + \left(\frac{h_c^3}{h^3} - 1 \right) \frac{dh}{dx} \right\}} \dots \dots \dots (3.4)$$

で計算されるべきである。ここで ρ は水の密度、 i は水路床こう配、 R は径深、 h_c は限界水深を表わす。しかし dh/dx を i の値に対応する精度で実測することが困難なのでここでは

$$u_* = \sqrt{gRI} \dots \dots \dots (3.5)$$

として、Fig. 4 (a) では I に 水路床こう配 i を用いて計算したレイノルズ数 R_{ei} を、Fig. 4 (b) ではマニングの平均流速公式が不等流の場合においてもエネルギーこう配を用いれば成立つと仮定してエネルギー

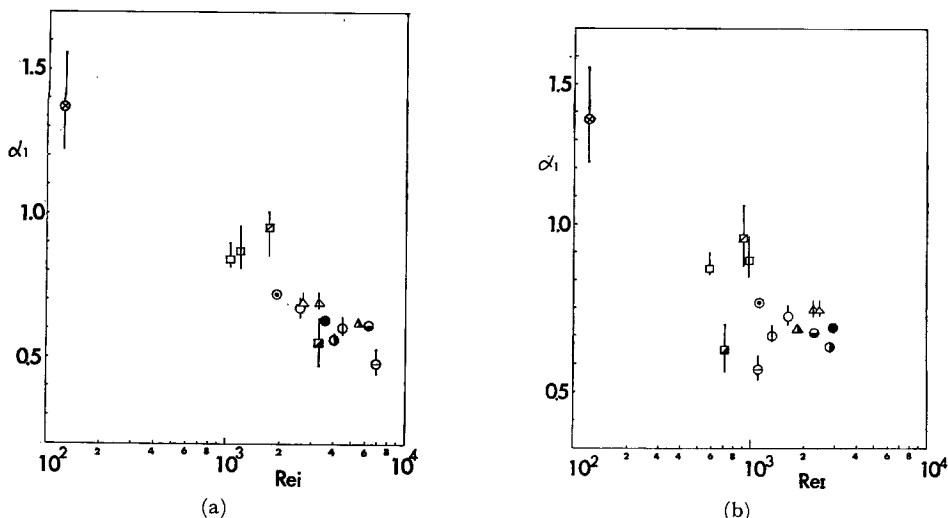


Fig. 4 Variation of m with (a) R_{ei} and (b) R_{eI} .

こう配を流量と水深から逆算したものを用いて計算したレイノルズ数 R_{eI} を用いた。Fig. 4 の (a) と (b) とを比較すると (a) の方がばらつきが少なく α が $u_* h_0/\nu$ とともに減少する傾向が明確に認められるが、このレイノルズ数は

$$u_* h_0/\nu = h_0^{3/2} \sqrt{gi}/\nu \dots \dots \dots (3.6)$$

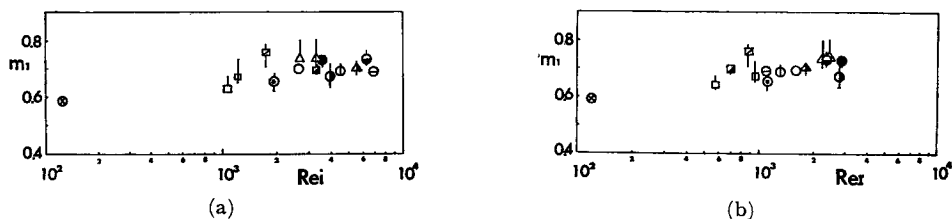


Fig. 5 Variation of α with (a) R_{ei} and (b) R_{eI} .

となり、 $\sqrt{gi/\nu}$ は各実験ケースを通じて一定なので、Fig. 4 の結果は α が水深 h_0 の関数として与えられることを意味しており、その水理学的意味については今後の検討にまきたい。

一方 m についても α と同様に Fig. 5 (a) においては水路床こう配を用い、(b) においてはマンシングの式から逆算したエネルギーこう配を用いてまざつ速度を算出し、それぞれと水深 h_0 を用いて計算したレイノルズ数、 Re_i と Re_t 、と関係づけたが、いずれのレイノルズ数とも無関係に m はほぼ一定の値 (約 0.7) をとることが認められた。

3.3 渦軸の位置

渦軸の橋脚中心軸からの距離を x_0 、水路床面からの高さを z_0 とし、 $(x_0 - r_0)/h_0$ および z_0/h_0 をそれぞれ r_0/h_0 と関係づけた。その結果を Fig. 3 に示す。図において資料のバラツキが大きく明らかな関数関係を

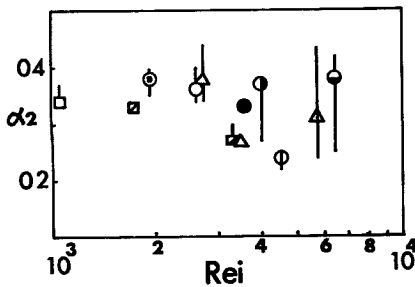


Fig. 6 $\alpha_2 \sim Re_i$

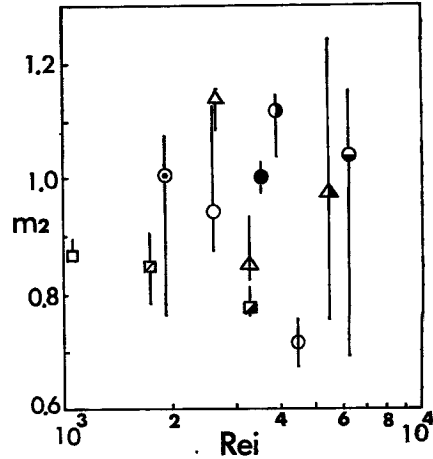


Fig. 7 $m_2 \sim Re_i$

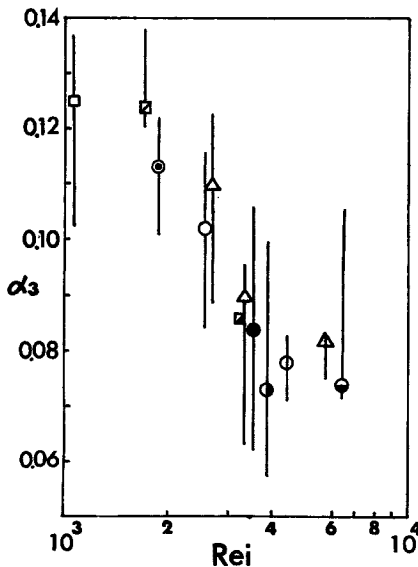


Fig. 8 $\alpha_3 \sim Re_i$

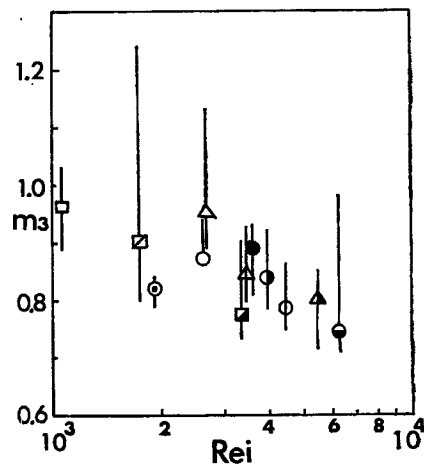


Fig. 9 $m_3 \sim Re_i$

つかみにくい、ここでは先に検討した逆流域の大きさと同様に次式を設定して各係数を定めてみる。

$$\frac{x_0 - r_0}{h_0} = \alpha_2 \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^{m_2} \quad (3.7)$$

$$\frac{z_0}{h_0} = \alpha_3 \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^{m_3} \quad (3.8)$$

すなわち、上式中に含まれる α_2 , m_2 , α_3 および m_3 をそれぞれ Re_i と関係づけ、その結果 Fig. 6 から Fig. 9 までに示す関係がえられた。これらの図から、つぎのことが結論的にいうことができる。すなわち、 α_2 はほぼ 0.35 で一定である。 m_2 は Re_i に無関係でほぼ 0.95 を中心に分布している。 α_3 は Re_i とともに減少する。 m_3 もまた Re_i とともに減少する。

4. 円柱橋脚前面の逆流域の決定

著者¹⁾は層流中におかれた橋脚周辺の逆流をふくむ流れをモデル設定の下に解析した。同様の解析法を乱流の場合に適用してみる。

流れの場を水路床に平行な平面で切ったとき、その平面内に含まれる流速ベクトルは橋脚表面から水路の単位幅あたりにして m_0 の強さの湧出しがある場合のポテンシャル流で与えられると仮定する。円柱橋脚の場合は上述の仮定の下で逆流域は円柱橋脚と同心の円周で与えられ、その半径は接近流速を u とすると次式のようになる。

$$\bar{r}_0 = r_0 \sqrt{1 + (m_0/u)} \quad (4.1)$$

水平断面内の円柱橋脚の上流側半分の表面からの湧出量の総和は $2m_0r_0$ であるから、全水深にわたる円柱橋脚前面からの総湧出量は $\int_0^{h_0} 2m_0r_0 dz$ となるが、連続の条件からこの値は 0 とならなければならない。すなわち次式が成立する。

$$\int_0^{h_0} m_0 dz = 0 \quad (4.2)$$

乱流の場合、底面に接する部分を除いては渦領域の実測が困難であるので、層流の場合から類推して乱流の場合も渦領域が水結床からの高さ z とともに線型的に変化するとし、次式を仮定する。

$$\frac{r_0}{h_0} = \alpha - \beta \frac{z}{h_0} \quad (4.3)$$

上式と(4.1)式から m_0 について次式をえる。

$$m_0 = u \left\{ \left(\frac{h_0}{r_0} \right)^2 \left(\alpha - \beta \frac{z}{h_0} \right) - 1 \right\} \quad (4.4)$$

接近流速 u については対数分布則を用いると、つぎのようになる。

$$\frac{u}{u_*} = A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} \quad (4.5)$$

以上の二式を(4.2)式に代入すると、

$$u_* \int_0^H \left(A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} \right) \left\{ \left(\alpha - \beta \frac{z}{H} \right)^2 - 1 \right\} dz = 0 \quad (4.6)$$

をえる。上式の計算にあたって、対数の積分においては積分の下限を層流底層の上限とし、そこでの $\ln(u_* z/\nu)$ の値を 0 と近似すると、結局次式がえられる。

$$(\alpha^2 - 1) \left(u_{\max}' - \frac{1}{\kappa} \right) - \alpha \beta \left(u_{\max}' - \frac{1}{2\kappa} \right) + \beta^2 \left(\frac{u_{\max}'}{3} - \frac{1}{9\kappa} \right) = 0 \quad (4.7)$$

ここで、 $u_{\max}'$ は水面における u/u_* の値であり次式で与えられる。

$$u_{\max}' = A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} \quad (4.8)$$

$\kappa=0.4$ として上式から α と β の関係を $u_{\max}'$ をパラメーターとして求めると Fig. 10 のようになる。

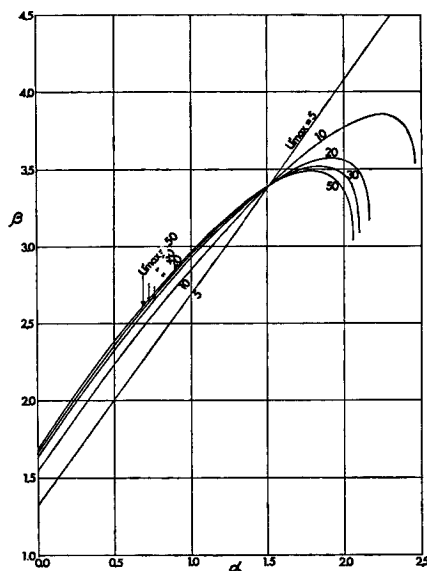


Fig. 10

5. 結 論

円柱橋脚前面に発生する渦の機構を知るため、まず運動方程式中の各項のオーダーを見積り、それらがどのような形の無次元量で渦の大きさに作用するかを明らかにした。ついでその結果に基づいて逆流域の水路底面における値と渦軸の位置を次元解析の手法を用いて求めた。そこで得た結論はつぎのようである。すなわち、これらの諸量は

$$\frac{\bar{r}_0 - r_0}{h_0} = \alpha_1 \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^{m_1}$$

$$\frac{x_0 - r_0}{h_0} = \alpha_2 \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^{m_2}$$

$$\frac{z_0}{h_0} = \alpha_3 \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^{m_3}$$

の形で表示され、上式中の $\alpha_1 \sim \alpha_3$ および $m_1 \sim m_3$ はまさつ速度と水深を用いたレイノルズ数の関数あるいは定数として与えられる。すなわち、 α_1 はこのレイノルズ数の増加とともに減少し、 α_2 は0.35でほぼ一定、 α_3 は減少する。 m_1 は0.7でほぼ一定、 m_2 は0.95前後に分布し、 m_3 は減少する傾向を示している。

最後に、逆流域の立体的な大きさを知るために、逆流域の水路床に平行な断面の大きさがその断面の水路床からの高さに従って線型に変化するとその変化率を求めた。その結果この値は接近流速の水面での値を u_* で割って無次元化した量をパラメーターとして水路底面における逆流域の大きさの関数として与えられることが示された。

未筆になりますが、本研究を行なうにあたり有益な御助言をいただいた石原安雄教授に深甚の謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 宇民 正：開水路中におかれた障害物前面の渦の機構について、京都大学防災研究所年報，第15号B，昭47.4，pp. 475-484.

- 2) 小川芳昭：橋脚のまわりの流れに関する一実験的考察，北海道開発局土木試験所月報，第 182 号，昭 43.7，pp. 15～25.
- 3) Roper, A. T., V. R. Schneider and H. W. Shen: Analytical approach to local scour, 12th Proc. of IAHR, Vol. 3, Colorado State University, USA, 1967, pp. 151-161.