

線型同型な関数空間について

足利工業大学 共通課程

森下和彦 (Kazuhiko Morishita)

本稿では、空間は全て Tychonoff とする。記号 $C_p(X)$ で、空間 X 上の実数値連続関数全体からなる集合に pointwise convergent topology を導入した空間をあらわすこととする。このとき $C_p(X)$ は局所凸線型位相空間となる。また 2 つの線型位相空間 E と F に対し、記号 $E \sim F$ で E と F が線型位相空間として同型であることをあらわすことにする。更に compactum とは compact 距離空間を意味することとし、記号 D^n によって n -disk, 記号 $\mathbf{N}$ によって自然数全体をあらわすことにする。

(定義) 2 つの空間 X と Y に対し、

$$X \sim_l Y \iff C_p(X) \sim C_p(Y)$$

と定義し、このとき空間 X と Y は l -equivalent であると云う。

1980 年に Pavrovskii は l -equivalence と次元との関係について次の定理を発表した。

定理 1. ([3]) X, Y ; separable complete metrizable, $X \sim_l Y$,
 $\implies \dim X = \dim Y$

Miljutin の結果より, compact-open topology を持つ関数空間について

$$C_k(\{0, 1\}^\omega) \sim C_k([0, 1])$$

(但し, $\{0, 1\}^\omega$ は Cantor set, $[0, 1]$ は単位閉区間をあらわす)

であることが判るので、定理 1 は興味深く思われる。なおこの定理は、後に Pestov [4] により一般の Tychonoff 空間にまで拡張された。

定理 1 を示す上で本質的であるのが次の補題である。

補題 2. ([3]) Y ; 任意の閉集合が Baire となる空間, $X \sim_l Y$
 $\implies \forall A \subset X$ s.t. A ; Baire, $\exists$ 開集合 U of Y s.t. $U \hookrightarrow Y$
 (但し, Baire のカテゴリー定理が成立する空間を Baire であると言う)

更に Pavlovskii は定理 1 に関連して、

$\exists$ compact metric space X s.t. $\dim X = 2$, $X \not\sim_l D^2$ (2-disk)

を注意した。実際、 X として Pontryagin の連続体を考えたとき、もし $X \sim_l D^2$ であれば補題 2 より D^2 の開集合が X に埋め込まれることになり、 $\dim X^2 = 3$ に矛盾する。この事実から、次の様な問題を考えることが出来る。

(問題)

- (1) どのような空間 X に対して、 $X \sim_l D^n$ となるか？
- (2) 他の標準的な空間に対して、その空間と l -equivalent になる空間はどのような空間であるか？

問題 1 に対して、Pavrovskii 自身が 1 つの解答を示している。

Pavrovskii, 1980 [3]

X ; finite polyhedron, $\dim X = n \geq 1 \implies X \sim_l D^n$

更に Arhangel'skii はこれを拡張して次の結果を得た。

Arhangel'skii, 1989 [1]

X ; compact CW complex, $\dim X = n \geq 1 \implies X \sim_l D^n$

一方, 他の種類の空間について,

Kawamura & Morishita [2]

X ; compact topological manifold, $\dim X = n \geq 1 \implies X \sim_l D^n$

なる結果が得られている。

また問題 2 に対して, 次の結果が Valov により示されている。

$X \sim_l [0, 1]^\omega \iff X$; compactum, $[0, 1]^\omega \hookrightarrow X$

$X \sim_l \mu^n \iff X$; compactum, $\dim X = n$, $\mu^n \hookrightarrow X$

但し, $\mu^n = n$ -dimensional universal Menger compactum

この Valov による結果を示す上で, 必要性は l -equivalence により compactum であることが保たれることと, 補題 2 により $[0, 1]^\omega$ または μ^n の open subset が X に埋め込まれることを用い, 十分性は $[0, 1]^\omega$ または μ^n の univarsality から

$[0, 1]^\omega \hookrightarrow X \hookrightarrow [0, 1]^\omega$ または $\mu^n \hookrightarrow X \hookrightarrow \mu^n$

であることを用いる。ここで問題 1 との関連について云えば, これらの論法を D^n に対して適用することは出来ない。実際,

$X \sim_l D^n \implies X$; compactum, $D^n \hookrightarrow X$

は成立する。しかし μ^1 は後半の条件を全て充たすが, Valov の結果より $\mu^1 \not\sim_l D^1$ となるので逆は成立しない。

今回得られたのは問題 1 に対する 1 つの解答である。

(定義) compactum X に対し,

$$E(X) = \overline{\{x \in X \mid \text{ind}_x X = n\}}$$

定理 3. Tychonoff 空間 X と $n \in \mathbf{N}$ に対して以下は同値

(1) $X \sim_l D^n$

(2) X は n -dimensional compactum で次の 3 条件を満たす

(i) X は S -stable

(ii) $E(X)$ の non empty open subset U が存在して,

$$\forall A \subset U \text{ s.t. } \dim A = n, \text{Int}_{E(X)} A \neq \emptyset \text{ \& } D^n \hookrightarrow A$$

(iii) $\forall$ open subset V of $E(X)$, $\exists Y \subset V$ s.t. $Y \sim_l X$

ここで空間 X が S -stable であるとは, X が $X \sim_l X \times (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\})$ を満たすことである。この定理から次の系を得る。

系 4. $X \sim_l D^n \implies E(X) \sim_l X$

参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, *On linear topological classification of spaces of continuous functions in the topology of pointwise convergence*, Math. Sbornik 70 (1991), pp. 129-142.
- [2] K. Kawamura and K. Morishita, *Linear topological classification of certain function spaces on manifolds and CW complexes*, Top. Appl. 69, No. 3 (1996), pp. 265-282.
- [3] D. S. Pavlovskii, *On spaces of continuous functions*, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), pp. 34-37.
- [4] V. G. Pestov, *The coincidence of the dimensions $\dim$ of l -equivalent topological spaces*, Soviet Math. Dokl. 26 (1982), pp. 380-383.
- [5] V. M. Valov, *Linear topological classifications of certain function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1991), pp. 583-600.