

$SU(2,2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

平賀 郁 (Iku Hiraga)

京都大学

§0 INTRODUCTION

G を $SL_2(\mathbb{R})$ とし、 Γ を $SL_2(\mathbb{R})$ の cocompact かつ torsion free な discrete subgroup とする。このとき、重さ k の保型形式 $S_k(\Gamma)$ の次元について、次のことが知られていた。

$$(0.1) \quad \dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} \text{Vol}(\Gamma \backslash G) \frac{k-1}{\sqrt{2}\pi}, & k \geq 3 \\ \text{Vol}(\Gamma \backslash G) \frac{1}{\sqrt{2}\pi} + 1, & k = 2 \end{cases}$$

重さが 2 のときには、重さ 3 以上のものと比べて次元が 1 増加している。よく知られているように $SL_2(\mathbb{R})$ は discrete series D_k^+ , D_k^- ($k \geq 2$) をもつ。また、 G の既約表現 π に対し、 m_π を G の $L^2(\Gamma \backslash G)$ への右正則表現における π の重複度とすると、 $m_{D_k^-} < +\infty$ であり、しかも $\dim S_k(\Gamma) = m_{D_k^-}$ が成り立っている。 G 上の適当な関数に跡公式を適用すると、

$$(0.2) \quad \begin{cases} m_{D_k^-} = \text{Vol}(\Gamma \backslash G) \frac{k-1}{\sqrt{2}\pi}, & k \geq 3 \\ m_{D_2^-} - m_{\text{Trivial}} = \text{Vol}(\Gamma \backslash G) \frac{1}{\sqrt{2}\pi}, & k = 2 \end{cases}$$

が成立することがわかる。 m_{Trivial} は明らかに 1 なので、(0.1) の式における重さ 2 の場合の +1 の変化は、 m_{Trivial} によることがわかる。ここで、 D_2^- は Harish-Chandra parameter が最も wall に近い discrete series representation である。 (D_2^+) も同様であり、 D_2^+ に対しても、(0.2) と同様の式が成立する。) また、trivial representation は D_2^- と同じ infinitesimal character をもつ non-tempered な unitary representation であった。つまり、discrete series の Harish-Chandra parameter が wall に近いときに、non-tempered な representation の寄与があるのである。

$G = SU(2,2)$ の場合に、以上と同様の現象を調べることが、我々の目標である。

平賀 郁

§1. ADMISSIBLE REPRESENTATIONS OF $SU(2, 2)$ 1.1 Discrete Series Representations of $SU(2, 2)$.

G が discrete series もつための条件は次の定理により与えられる。

Theorem 1.1. (Harish-Chandra)

G を connected semi-simple Lie group とする。このとき、 G が discrete series をもつことと、 G に compact Cartan subgroup T が存在することとは同値である。

いま、 G が discrete series をもつとする。このとき、 K を G の maximal compact subgroup とすると、 G の compact Cartan subgroup T を K の subgroup からとることができる。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, T, K の Lie algebra とする。 $\lambda \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ が、ある T の character Λ の微分に等しいとき、 λ は analytically integral であるという。また、 λ が regular のとき、

$$\Delta_{\lambda}^{+}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \mid \operatorname{Re}\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle > 0\}$$

$$\rho_{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{\lambda}^{+}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \alpha$$

$$\rho_{\lambda, c} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{\lambda}^{+}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})} \alpha$$

とおく。

Theorem 1.2. (Harish-Chandra)

G が discrete series をもつとする。 $\lambda \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ が regular であつ $\lambda + \rho_{\lambda} - 2\rho_{\lambda, c}$ が analytically integral ならば discrete series representation D_{λ} が存在する。逆に、 G の discrete series は、このようなもので尽くされる。また、

$$D_{\lambda} \cong D_{\lambda'} \iff \exists w \in W(K, T) \text{ s.t. } \lambda' = w\lambda$$

が成り立つ。

Remark.

- (1) λ は Harish-Chandra parameter と呼ばれる。
- (2) D_{λ} の infinitesimal character は χ_{λ} である。
- (3) D_{λ} は highest weight $\lambda + \rho_{\lambda} - 2\rho_{\lambda, c}$ の minimal K -type を multiplicity 1 でもつ。
- (4) $\lambda + \rho_{\lambda} - 2\rho_{\lambda, c}$ は Blattner parameter と呼ばれる。

$SU(2, 2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

$SU(2, 2)$ の場合.

$$G = \{g \in SL_4(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} J g = J\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & \\ & u_2 \end{pmatrix} \mid u_i \in U(2), \det u_1 \cdot \det u_2 = 1 \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & e^{i\theta_3} & \\ & & & e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \mid \prod_{k=1}^4 e^{i\theta_k} = 1 \right\}$$

T は明らかに、 G の compact Cartan subgroup なので、theorem 1.1 により、 $SU(2, 2)$ は discrete series をもつことがわかる。ここで、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & \\ & i\theta_2 & & \\ & & i\theta_3 & \\ & & & i\theta_4 \end{pmatrix} \mid \sum_{k=1}^4 \theta_k = 0 \right\}$$

とし、 $\lambda = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^* \ (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0)$ を

$$\lambda \left[\begin{pmatrix} i\theta_1 & & & \\ & i\theta_2 & & \\ & & i\theta_3 & \\ & & & i\theta_4 \end{pmatrix} \right] = i \sum_{k=1}^4 n_k \theta_k$$

により定義する。このとき、容易に

$$\lambda \text{ が analytically integral} \iff \forall i, j \quad n_i - n_j \in \mathbb{Z}$$

であることがわかる。

また、 $W(K, T)$ は

$$w_1(n_1, n_2, n_3, n_4) = (n_2, n_1, n_3, n_4)$$

$$w_2(n_1, n_2, n_3, n_4) = (n_1, n_2, n_4, n_3)$$

により生成されることもわかる。

Theorem 1.2 により、 $SU(2, 2)$ の discrete series は次のようになる。

平賀 郁

$$D_I : \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_2 > n_3 > n_4\}$$

$$D_{II} : \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_3 > n_2 > n_4\}$$

$$D_{III} : \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_3 > n_4 > n_2\}$$

$$D_{IV} : \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_3 > n_1 > n_2 > n_4\}$$

$$D_V : \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_3 > n_1 > n_4 > n_2\}$$

$$D_{VI} : \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_3 > n_4 > n_1 > n_2\}$$

1.2 Standard Representations of $SU(2, 2)$.

$SU(2, 2)$ の Borel subgroup P_0 をその Lie algebra が

$$\mathfrak{p}_0 = \text{Ad} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \right] \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

となるものすると、 P_0 を含む G の cuspidal parabolic subgroup は P_0 と、long root に対応する parabolic subgroup P_1 と G 自身である。またそれぞれの Langlands 分解は、次のようになる。

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \\ A_0 &= \text{Ad} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \right] \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{pmatrix} \middle| a_i \in \mathbb{R} \right\} \\ M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x_{11} & x_{12} & \\ & & 1 & \\ & x_{21} & x_{22} & \end{pmatrix} \middle| \{x_{ij}\} \in SU(1, 1) \right\} \\ A_1 &= \text{Ad} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \right] \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $[\pm] \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right] = \pm 1$, $\chi_n \left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \right] = e^{ni\theta}$ とすれば、 M_0 の character は $[\pm] \otimes \chi_n$ と書け、 A_0 の quasi-character は、 $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ として、

$SU(2,2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

$e^\nu(A) = a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2}$ と書ける。また、 M_1 の (Limit of) discrete series representation は $\chi_n \otimes D_k^\pm$, A_1 の quasi-character は $e^\nu(A) = a^\nu$ と書ける。このとき、誘導表現 $\text{Ind}_{P_0}^G(([\pm] \otimes \chi_n) \otimes e^\nu \otimes 1)$, $\text{Ind}_{P_1}^G((\chi_n \otimes D_k^\pm) \otimes e^\nu \otimes 1)$ の Langlands quotient が存在すれば、それを、それぞれ $J(P_0; \pm, n; \nu_1, \nu_2)$, $J(P_1; n, D_k^\pm; \nu)$ と書くことにする。

表現 $\text{Ind}_{P_0}^G(([\pm] \otimes \chi_n) \otimes e^\nu \otimes 1)$, $\text{Ind}_{P_1}^G((\chi_n \otimes D_k^\pm) \otimes e^\nu \otimes 1)$, discrete series representation D_λ 及び、Limit of discrete series (λ が singular の場合に相当する tempered representation) が $SU(2,2)$ の standard representation である。

§3. MULTIPLICITY OF DISCRETE SERIES REPRESENTATION

$C_c^\infty(G, K)$ を両側 K -finite な G 上 smooth で compact support な関数の集合とする。 $\Gamma \subset G$ を cocompact な discrete subgroup とする。このとき、 $\varphi \in C_c^\infty(G, K)$ の $L^2(\Gamma \backslash G)$ への作用は、trace をもち、次の式が成り立つ。

$$(3.1) \quad \sum_{\pi: \text{irreducible unitary}} m_\pi \text{tr } \pi(\varphi) = \sum_{\{\gamma\} \Gamma} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} \varphi(g^{-1} \gamma g) dg$$

ただし、右辺は、 Γ の conjugacy class について和をとっている。Discrete series representation D_λ に対し、左辺を m_{D_λ} としたければ、次のような関数があれば良い。

Problem 3.1.

関数 $\varphi \in C_c^\infty(G, K)$ で次の条件を満たすものは存在するか？

$$\begin{cases} \text{tr } D_\lambda(\varphi) = 1 \\ \text{tr } \pi(\varphi) = 0, \quad \pi \not\simeq D_\lambda, \pi: \text{irreducible unitary} \end{cases}$$

残念ながら、一般的には、このような関数は存在しない。代りに、次のような関数を考える。

Definition 3.2.

関数 $\varphi \in C_c^\infty(G, K)$ が次の条件を満たすとき、 D_λ の pseudo-coefficient であるという。

$$\begin{cases} \text{tr } D_\lambda(\varphi) = 1 \\ \text{tr } \pi(\varphi) = 0, \quad \pi \not\simeq D_\lambda : \text{standard representation} \end{cases}$$

Pseudo-coefficient については、次の結果が基本的である。

Theorem 3.3. (Clozel-Delorme [C-D2])

$\mathbb{G}$ を $\mathbb{R}$ 上定義された connected reductive algebraic group とし、 $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$ が discrete series をもつとする。このとき、 G の任意の discrete series representation D_λ にたいし、pseudo-coefficient φ_λ が存在する。

Pseudo-coefficient φ_λ は D_λ 以外の standard representation に対しては、 $\text{tr } \pi(\varphi) = 0$ だが、我々は、既約表現 π に対する $\text{tr } \pi(\varphi_\lambda)$ の値を知りたい。それには、standard representation の composition factor がわかれば良い。

平賀 郁

Theorem 3.4. (Vogan [V1])

G が infinitesimal character χ_μ の有限次元表現を持つならば、infinitesimal character χ_μ の場合の Kazhdan-Lusztig conjecture は正しい。

この theorem により、standard representation の composition factor を計算することができる。また、 $SU(2, 2)$ の unitary representation が、Knapp-Speh ([K-S]) により、決定されている。以上により、跡公式の spectral side が計算できる。跡公式の geometric side については、Harish-Chandra による結果 ([H-C1]) を使って計算することができる。まず、 $\mu = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ とし、infinitesimal character χ_μ の場合の結果を述べる。Infinitesimal character χ_μ の discrete series representation はそれぞれの系列にひとつずつで、それを、 $D_I, \dots, D_{VI}$ とする。また、それ以外の infinitesimal character χ_μ の irreducible representation は、

$$\begin{aligned} F_1^\pm &= J(P_1; 4, D_2^\pm; 1) \\ F_2^\pm &= J(P_1; 2, D_3^\pm; 2) \\ F_3^\pm &= J(P_1; 0, D_2^\pm; 3) \\ F_4^\pm &= J(P_1; -4, D_2^\pm; 1) \\ F_5^\pm &= J(P_1; -2, D_3^\pm; 2) \\ F_6^\pm &= J(P_1; 0, D_4^\pm; 1) \\ P_1^\pm &= J(P_0; \pm, 0; 3, 1) \\ P_2^\pm &= J(P_0; \pm, -4; 1, 1) \\ P_3^\pm &= J(P_0; \pm, -2; 2, 2) \end{aligned}$$

であり、infinitesimal character χ_μ の irreducible representation は 24 存在する。($J(\dots)$ とかくと、長くなるので、以下 F_1^+ などの記号を使う。) この内、unitarizable でないものは、 $F_3^\pm, P_1^-, P_2^-, P_3^\pm$ である。また、trivial representation は P_1^+ である。

Δ^+ を simple root が $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ である positive root system とし、これに対応する Weyl denominator を $D(t) = \xi_\rho(t) \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \xi_\alpha(t)^{-1})$ とする。また、 $\mathfrak{g}$ 上の real symmetric bilinear form B を $B(X, Y) = \text{Re}[\text{tr } XY]$ とし、[H-C1] pp.114-115 に従い、 G の measure を決める。

Theorem 3.5.

$$\sum m_\pi \text{tr } \pi(\varphi_\lambda) = \begin{cases} m_{D_I} - m_{F_6^-} + m_{F_2^-} + m_{F_5^-} + m_{P_1^+} \\ m_{D_{II}} - m_{F_1^-} - m_{F_4^-} - m_{F_6^-} + m_{F_2^-} + m_{F_5^-} + m_{P_2^+} + m_{P_1^+} \\ m_{D_{III}} - m_{F_1^+} - m_{F_4^+} + m_{F_2^+} + m_{F_5^-} + m_{P_2^+} + m_{P_1^+} \\ m_{D_{IV}} - m_{F_1^-} - m_{F_4^+} + m_{F_2^-} + m_{F_5^+} + m_{P_2^+} + m_{P_1^+} \\ m_{D_V} - m_{F_1^+} - m_{F_4^+} - m_{F_6^+} + m_{F_2^+} + m_{F_5^+} + m_{P_2^+} + m_{P_1^+} \\ m_{D_{VI}} - m_{F_6^+} + m_{F_2^+} + m_{F_5^+} + m_{P_1^+} \end{cases}$$

$SU(2, 2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

また、 $\lambda = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ とし、

$$\lambda^1 = w_1 \lambda = (n_2, n_1, n_3, n_4)$$

$$\lambda^2 = w_2 \lambda = (n_1, n_2, n_4, n_3)$$

$$\lambda^{12} = w_1 w_2 \lambda = (n_2, n_1, n_4, n_3)$$

とおく。

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } D_I, D_{III}, D_{IV}, D_{VI} \\ -1 & \text{if } D_{II}, D_V \end{cases}$$

$$\tau[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4] = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & e^{i\theta_3} & \\ & & & e^{i\theta_4} \end{pmatrix}$$

Semisimple で elliptic な G の conjugacy class の代表元は

$$\tau[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]$$

$$\tau[\theta, \theta, \theta_3, \theta_4]$$

$$\tau[\theta_1, \theta, \theta, \theta_4]$$

$$\tau[\theta_1, \theta_2, \theta, \theta]$$

$$\tau[\theta, \theta, \theta, -3\theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, i, -1, -i$$

$$\tau[-3\theta, \theta, \theta, \theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, i, -1, -i$$

$$\tau[\theta, \theta, -\theta, -\theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, -1$$

$$\tau[\theta, \theta, -\theta + \pi, -\theta + \pi] \quad e^{i\theta} \neq i, -i$$

$$\tau[\theta, -\theta, -\theta, \theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, -1$$

$$\tau[\theta, -\theta + \pi, -\theta + \pi, \theta] \quad e^{i\theta} \neq i, -i$$

$$I_4, iI_4, -I_4, -iI_4$$

となる。ただし、 $e^{i\theta} \neq e^{i\theta_k}, e^{i\theta_j} \neq e^{i\theta_k} (j \neq k)$ である。

また、それぞれの τ にたいし、

$$\tilde{D}_\tau = \frac{D}{\prod_{\alpha \in \Delta^+, \alpha(\tau)=1} (1 - \xi_\alpha^{-1})}$$

$$= \xi_\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+, \alpha(\tau) \neq 1} (1 - \xi_\alpha^{-1})$$

と定義する。

平賀 郁

Theorem 3.6.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} \varphi_\lambda(g^{-1}\gamma g) dg \\
&= \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} [\xi_{-\lambda}(\tau) - \xi_{-\lambda^1}(\tau) - \xi_{-\lambda^2}(\tau) + \xi_{-\lambda^{12}}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta, \theta, \theta_3, \theta_4]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{-1}{2} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} (n_1 - n_2) [\xi_{-\lambda}(\tau) + \xi_{-\lambda^1}(\tau) - \xi_{-\lambda^2}(\tau) - \xi_{-\lambda^{12}}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta_1, \theta, \theta, \theta_4]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{-1}{2\sqrt{2}} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} \\
&\quad \times [(n_3 - n_2)\xi_{-\lambda}(\tau) + (n_1 - n_3)\xi_{-\lambda^1}(\tau) + (n_2 - n_4)\xi_{-\lambda^2}(\tau) + (n_4 - n_1)\xi_{-\lambda^{12}}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta_1, \theta_2, \theta, \theta]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{-1}{2} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} (n_3 - n_4) [\xi_{-\lambda}(\tau) - \xi_{-\lambda^1}(\tau) + \xi_{-\lambda^2}(\tau) - \xi_{-\lambda^{12}}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta, \theta, \theta, -3\theta]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{1}{16\sqrt{2}\pi^2} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} \\
&\quad \times [-2(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)(n_1 - n_3)\xi_{-\lambda}(\tau) + 2(n_1 - n_2)(n_1 - n_4)(n_2 - n_4)\xi_{-\lambda^2}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[-3\theta, \theta, \theta, \theta]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{1}{16\sqrt{2}\pi^2} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} \\
&\quad \times [-2(n_2 - n_3)(n_3 - n_4)(n_2 - n_4)\xi_{-\lambda}(\tau) + 2(n_1 - n_3)(n_3 - n_4)(n_1 - n_4)\xi_{-\lambda^2}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta, \theta, -\theta, -\theta]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} [4(n_1 - n_2)(n_3 - n_4)\xi_{-\lambda}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta, \theta, -\theta + \pi, -\theta + \pi]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} [4(n_1 - n_2)(n_3 - n_4)\xi_{-\lambda}(\tau)] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta, -\theta, -\theta, \theta]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{1}{8\pi^2} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} \\
&\quad \times [(n_1 - n_4)(n_2 - n_3)(\xi_{-\lambda}(\tau) + \xi_{-\lambda^{12}}(\tau)) - (n_1 - n_3)(n_2 - n_4)(\xi_{-\lambda^1}(\tau) + \xi_{-\lambda^2}(\tau))] \\
&+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \sim \tau[\theta, -\theta + \pi, -\theta + \pi, \theta]} \text{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{1}{8\pi^2} \frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)} \\
&\quad \times [(n_1 - n_4)(n_2 - n_3)(\xi_{-\lambda}(\tau) + \xi_{-\lambda^{12}}(\tau)) - (n_1 - n_3)(n_2 - n_4)(\xi_{-\lambda^1}(\tau) + \xi_{-\lambda^2}(\tau))] \\
&+ \sum_{\gamma = \pm I_4, \pm iI_4} \text{Vol}(\Gamma \backslash G) \frac{1}{128\pi^4} \epsilon \\
&\quad \times [(n_1 - n_2)(n_1 - n_3)(n_1 - n_4)(n_2 - n_3)(n_2 - n_4)(n_3 - n_4)\xi_{-\lambda}(\gamma)]
\end{aligned}$$

一般の infinitesimal character χ_μ , $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ ($\sum \mu_k = 0$, $\mu_j - \mu_k \in \mathbb{Z}$, $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \mu_4$) については theorem 3.5 の式の中で、次の項があらわれる。

$SU(2, 2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_1^\pm & \text{if } \mu_1 - \mu_2 = 1 \\ F_6^\pm & \text{if } \mu_2 - \mu_3 = 1 \\ F_4^\pm & \text{if } \mu_3 - \mu_4 = 1 \\ F_2^\pm; F_1^\pm, F_6^\pm & \text{if } \mu_1 - \mu_2 = \mu_2 - \mu_3 = 1 \\ F_5^\pm; F_4^\pm, F_6^\pm & \text{if } \mu_2 - \mu_3 = \mu_3 - \mu_4 = 1 \\ P_2^+; F_1^\pm, F_4^\pm & \text{if } \mu_1 - \mu_2 = \mu_3 - \mu_4 = 1 \\ \text{all} & \text{if } \mu = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} F_1^\pm &= J(P_1; 2\mu_1 + 2\mu_2, D_{\mu_3 - \mu_4 + 1}^\pm; 1) \\ F_6^\pm &= J(P_1; 2\mu_2 + 2\mu_3, D_{\mu_1 - \mu_4 + 1}^\pm; 1) \\ F_4^\pm &= J(P_1; 2\mu_3 + 2\mu_4, D_{\mu_1 - \mu_2 + 1}^\pm; 1) \\ F_2^\pm &= J(P_1; 2\mu_1 + 2\mu_3, D_{\mu_2 - \mu_4 + 1}^\pm; 2) \\ F_5^\pm &= J(P_1; 2\mu_2 + 2\mu_4, D_{\mu_1 - \mu_3 + 1}^\pm; 2) \\ P_2^+ &= J(P_0; (-1)^{2\mu_3 + 2\mu_4}, 2\mu_3 + 2\mu_4; 1, 1) \end{aligned}$$

いま、 $\mu = \rho + \delta$ とする。また、 D_λ を infinitesimal character χ_μ の discrete series representaiton とし、 Δ^+ の positive compact root が $\Delta_\lambda^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \text{Re}\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle > 0\}$ に含まれるように、 λ をとる。 D_λ に近い wall を次のように定義する。

$$\text{Wall}(D_\lambda) = \left\{ \alpha \in \Delta_\lambda^+ \left| \begin{array}{l} \text{i.) } \alpha: \text{ non-compact} \\ \text{ii.) } \text{Re}\langle \lambda - \rho_\lambda, \check{\alpha} \rangle \leq 0 \end{array} \right. \right\}$$

また、 D_λ の minimal K -type を Λ_λ とし、

$$T_\lambda = \left\{ \Lambda = \Lambda_\lambda - \sum_{\alpha \in \text{Wall}(D_\lambda)} \epsilon_\alpha \alpha \left| \begin{array}{l} \text{i.) } \epsilon_\alpha = 0, 1 \\ \text{ii.) } \Lambda: \text{ dominant for positive compact roots.} \end{array} \right. \right\}$$

と定義する。

いま、 π を infinitesimal character χ_μ の irreducible unitary representaiton とし、 F_δ を highest weight δ の 有限次元表現とすると、

$$H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes \check{F}_\delta) \cong \text{Hom}_K(\wedge^{p,q} \mathfrak{p} \otimes F_\delta, \pi)$$

である。

Theorem 3.7. ($[V-Z]$)

τ を $\wedge^{p,q} \mathfrak{p} \otimes F_\delta$ の K -type とする。このとき、infinitesimal character χ_μ の irreducible unitary representaiton π_τ で、次の条件をみたすものは、存在しても、同値を除いて 1 つである。

- (1) $H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes \check{F}_\delta) \neq 0$
- (2) τ は $\wedge^{p,q} \mathfrak{p} \otimes F_\delta$ と π の共通の K -type.

平賀 郁

T_λ を K -type の集合とみて、

$$T_\lambda^{\text{coh}} = \{\tau \in T_\lambda \mid \text{theorem 3.7 の条件を満たす } \pi_\tau \text{ が存在する。}\}$$

とし、 $\tau \in T_\lambda^{\text{coh}}$ について、 $d_\tau = \prod_{\alpha \in \text{Wall}(D_\lambda)} (-1)^{\epsilon_\alpha}$ とおく。

最終的に次の定理が得られる。

Theorem 3.8.

$$\sum_{\tau \in T_\lambda^{\text{coh}}} d_\tau m_{\pi_\tau} = \text{orbital integral of theorem 3.6}$$

この定理は一般の discrete series representaion をもつ semisimple algebraic group についても成立すると予想される。

List of irreducible unitary representations with infinitesimal character χ_ρ .

π	$H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; \pi) \neq 0$	K -type	Length
D_I	$H^{4,0}$	$(2, 2, -2, -2)$	0
D_{II}	$H^{3,1}$	$(2, 0, 0, -2)$	0
D_{III}	$H^{2,2}$	$(2, -2, 0, 0)$	0
D_{IV}	$H^{2,2}$	$(0, 0, 2, -2)$	0
D_V	$H^{1,3}$	$(0, -2, 2, 0)$	0
D_{VI}	$H^{0,4}$	$(-2, -2, 2, 2)$	0
F_1^+	$H^{1,2}, H^{2,3}$	$(1, -2, 1, 0)$	1
F_1^-	$H^{2,1}, H^{3,2}$	$(1, 0, 1, -2)$	1
F_4^+	$H^{1,2}, H^{2,3}$	$(0, -1, 2, -1)$	1
F_4^-	$H^{2,1}, H^{3,2}$	$(2, -1, 0, -1)$	1
F_6^+	$H^{0,3}, H^{1,4}$	$(-1, -2, 2, 1)$	1
F_6^-	$H^{3,0}, H^{4,1}$	$(2, 1, -1, -2)$	1
F_2^+	$H^{0,2}, H^{1,3}, H^{2,4}$	$(0, -2, 1, 1)$	2
F_2^-	$H^{2,0}, H^{3,1}, H^{4,2}$	$(1, 1, 0, -2)$	2
F_5^+	$H^{0,2}, H^{1,3}, H^{2,4}$	$(-1, -1, 2, 0)$	2
F_5^-	$H^{2,0}, H^{3,1}, H^{4,2}$	$(2, 0, -1, -1)$	2
P_2^+	$H^{1,1}, H^{2,2}(\dim H^{2,2} = 2), H^{3,3}$	$(1, -1, 1, -1)$	2
P_1^+	$H^{0,0}, H^{1,1}, H^{2,2}(\dim H^{2,2} = 2), H^{3,3}, H^{4,4}$	$(0, 0, 0, 0)$	4

$SU(2, 2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

The Kazhdan-Lusztig polynomials (infinitesimal character χ_ρ).

$$C_{F_1^+} = F_1^+ + D_{\text{III}} + D_{\text{V}}$$

$$C_{F_1^-} = F_1^- + D_{\text{II}} + D_{\text{IV}}$$

$$C_{F_4^+} = F_4^+ + D_{\text{IV}} + D_{\text{V}}$$

$$C_{F_4^-} = F_4^- + D_{\text{II}} + D_{\text{III}}$$

$$C_{F_6^+} = F_6^+ + D_{\text{V}} + D_{\text{VI}}$$

$$C_{F_6^-} = F_6^- + D_{\text{I}} + D_{\text{II}}$$

$$C_{F_2^+} = F_2^+ + F_1^+ + F_6^+ + D_{\text{III}} + D_{\text{V}} + D_{\text{VI}}$$

$$C_{F_2^-} = F_2^- + F_1^- + F_6^- + D_{\text{I}} + D_{\text{II}} + D_{\text{IV}}$$

$$C_{F_5^+} = F_5^+ + F_4^+ + F_6^+ + D_{\text{IV}} + D_{\text{V}} + D_{\text{VI}}$$

$$C_{F_5^-} = F_5^- + F_4^- + F_6^- + D_{\text{I}} + D_{\text{II}} + D_{\text{III}}$$

$$C_{P_2^+} = P_2^+ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + D_{\text{II}} + D_{\text{III}} + D_{\text{IV}} + D_{\text{V}}$$

$$C_{F_3^+} = F_3^+ + P_2^+ + F_5^+ + F_2^+ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^+ \\ + D_{\text{II}} + D_{\text{III}} + D_{\text{IV}} + D_{\text{V}} + (q+1)D_{\text{VI}}$$

$$C_{F_3^-} = F_3^- + P_2^+ + F_5^- + F_2^- + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^- \\ + (q+1)D_{\text{I}} + D_{\text{II}} + D_{\text{III}} + D_{\text{IV}} + D_{\text{V}}$$

$$C_{P_3^-} = P_3^- + F_2^+ + F_2^- + F_5^+ + F_5^- + P_2^+ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^+ + F_6^- \\ + D_{\text{I}} + D_{\text{II}} + (q+1)D_{\text{III}} + (q+1)D_{\text{IV}} + D_{\text{V}} + D_{\text{VI}}$$

$$C_{P_1^+} = P_1^+ + P_3^- + F_3^+ + F_3^- + P_2^+ + F_2^+ + F_2^- + F_5^+ + F_5^- \\ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^+ + F_6^- + D_{\text{I}} + D_{\text{II}} + D_{\text{III}} + D_{\text{IV}} + D_{\text{V}} + D_{\text{VI}}$$

$$C_{P_2^-} = P_2^-$$

$$C_{P_3^+} = P_3^+ + P_2^-$$

$$C_{P_1^-} = P_1^- + P_3^+$$

平賀 郁

REFERENCES

- [A] J. Arthur, *A Trace Formula for Reductive Groups I*, Duke Math. J. **45** (1978), 911–952.
- [B-W] A. Borel and N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups.*, Princeton University Press, 1980.
- [C-D1] L. Clozel and P. Delorme, *Le Théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, Invent. math. **77** (1984), 427–453.
- [C-D2] L. Clozel and P. Delorme, *Le Théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t.23 (1990), 193–228.
- [D-L] M. Duflo et J.-P. Labesse, *Sur la formule des traces de Selberg*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t.4 (1971), 193–284.
- [G-G-P] I. M. Gel’fand, M. I. Graev and I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and Automorphic Functions*, ACADEMIC PRESS, 1968.
- [H-C1] Harish-Chandra, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups I*, Jour. of Functional Analysis **19** (1975), 104–204.
- [H-C2] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups II*, Acta Math. **116** (1966), 1–111.
- [K] A. W. Knap, *Representation Theory of Semisimple Groups*, Princeton University Press, 1986.
- [K-S] A. W. Knap and B. Speh, *Irreducible Unitary Representations of $SU(2, 2)$* , Journal of Functional Analysis **45** (1982), 41–73.
- [L] R. P. Langlands, *Dimension of spaces of automorphic forms*, Proc. Sym. in Pure Math. **9** (1966), 253–257.
- [V1] D. A. Vogan, Jr., *Irreducible Characters of Semisimple Lie Groups III*, Invent. math. **71** (1983), 381–417.
- [V2] D. A. Vogan, Jr., *The Kazhdan-Lusztig conjecture for real reductive groups*, Representation Theory of Reductive Groups, vol. 40, Birkhäuser, 1983.
- [V-Z] D. A. Vogan Jr. and G. J. Zuckerman, *Unitary Representations with non-zero cohomology*, Comp. Math. **53** (1984), 51–90.