

半群における或る非極大 Order に関する

Arithmetic と正則集合の分解について

山口大 理 村田憲太郎

半群の Asano order は, 環のそれの一般化として考えられ, それに関する研究がなされている ([1], [3] 等). いま E を半群の bounded order とし, E に含まれる E と対等な order を σ とする. σ 両側 ideal の modular closure を考え, [2] に基づいて, σ の E に関する conductor を定義し, それに対する regular ideal およびその拡張としての正則集合を導入してその一意分解をのべる.

§1 Modular Closure

σ を半群 S の bounded order とする. σ 両側 ideal を単に σ -ideal という. σ -ideal 全体からそれ自身への写像 $\alpha \mapsto \alpha'$ が, 包含, 単調, 中等で, さらに $\sigma' = \sigma$, $\alpha'b' \leq (\alpha b)'$ をみたすものとする. $\alpha' = \alpha$ なる ideal α を closed ideal 又は c-ideal という. c-ideal の全体が modular 束をなすとき, α を modular closure という.

たとえば, σ の exchange property がある; σ はこのように closure である. (トイフ文法は σ -ideal を示す)

$$1 \in (\sigma \cup b)', 1 \notin \sigma \Rightarrow \exists d \subseteq b' \text{ s.t. } (\sigma \cup 1)' = (\sigma \cup d)'$$

いま $\sigma_1, \sigma_2, b \in (\sigma_1 \cup b)' = (\sigma_2 \cup b)', \sigma_1 \not\subseteq \sigma_2$ なる C -ideal とする. $C \notin \sigma_1, C \in \sigma_2$ なる元 C がある; σ は bounded であることから $C \in 1, 1 \in (\sigma_1 \cup b)', 1 \in \sigma_2$ なる 1 がある. したがって $\gamma \in \sigma_2 \cap b \cap \sigma$ なる正則元 γ がある. $1 = (\sigma \cup \sigma \cup \sigma \gamma \sigma)'$ と示す. $1 \notin \sigma_1$ であるから $(\sigma_1 \cup 1)' = (\sigma_1 \cup d)', d \subseteq b$ なる d が存在する. $d \subseteq (\sigma_1 \cup 1)' \subseteq (\sigma_1 \cup \sigma_2)' = \sigma_2$ であるから, $d \subseteq \sigma_2 \cap b$ である. $d \not\subseteq \sigma_1 \cap b$ は自明である. よって $'$ は modular closure である.

たとえば, R は環とし, $\sigma \in R$ の環としての order とする. 半群としての σ 両側 ideal σ に対して, σ から生成される環としての ideal を σ' と示す; σ は exchange property をもつ. この他にも種々の例を挙げることができる.

§2 Regular Ideal

$E \in S$ の bounded maximal order とする. $\sigma \in E$ に含まれる S の order μ $\lambda E \mu \subseteq \sigma$ なる正則元 λ がある μ が存在するものとする. このとき, E 両側 ideal は σ 両側

ideal である。

さて, σ の modular closure σ $E' = E$ とするもの
 とる. $f = \{x \in S \mid ExE \subseteq \sigma\}$ は σ に含まれる closed
 な E -ideal (c - E -ideal) として unique maximal な
 ものである. これは σ の E に關する conductor である.
 以下について, 下記の補題が成り立つ.

補題 1. $\sigma \in (\sigma \cup f)' = \sigma$ なる σ -ideal とすれば,
 $(E\sigma E)'$ は c - E -ideal σ $(E\sigma E)' = (E\sigma)' =$
 $(\sigma E)'$, $(E\sigma E \cup f)' = E$, $(E\sigma E \cap \sigma)' = \sigma'$ が成
 り立つ. 逆に $\sigma \in (\sigma \cup f)' = E$ なる E -ideal とすれば,
 $\sigma \cap \sigma = \sigma$ は σ -ideal σ , $((\sigma \cap \sigma) \cup f)' = \sigma$,
 $(E(\sigma \cap \sigma)E)' = \sigma'$ が成り立つ.

$(\sigma \cup f)' = \sigma$ なる c - σ -ideal σ の全体 K は包含
 関係と積 $(\sigma\tau)'$ ($\sigma, \tau \in K$) によって束縛群である. また
 $(\sigma \cup f)' = E$ なる c - E -ideal σ の全体 L についても
 同様で, $\varphi: K \rightarrow L; \sigma \mapsto \varphi(\sigma) = (E\sigma E)'$ は束縛群
 としての同型対応を与え, φ によって素 ideal に素 ideal
 が対応する.

c - σ -ideal σ に対して $(\sigma\sigma)' \in K$ なる $\sigma \in K$ が存在
 するとき, σ は regular ideal である. この定義は $(\sigma\sigma)'$
 $\in K$ なる $\sigma \in K$ が存在するときとしてもよい. これは下記の

の補題によって保証される。

補題 2. σ は regular ideal とする。 $b\sigma \leq \sigma$ なる任意の $b \in K$ に対して $(\sigma b)' \in K$, $(b\sigma)' \in K$ である。

2つの σ -ideal σ, b の左右の residual をそれぞれ $\sigma/b = \{x \in S \mid x b \leq \sigma\}$, $b \backslash \sigma = \{x \in S \mid b x \leq \sigma\}$ によって定める。

いま σ, b 共に regular ideal とする。 $(1\sigma)', (\sigma 1)' \in K$ なる $1, \sigma \in K$ であるから、 $(\sigma 1)', (b\sigma)' \in K$ であり、 $b(\sigma 1\sigma) \leq \sigma$ より、 $\sigma 1\sigma \leq b \backslash \sigma$ 。 したがって

$$\sigma b(\sigma 1\sigma) 1 \leq \sigma b(b \backslash \sigma) 1 \leq \sigma 1\sigma \leq \sigma.$$

よって $(\sigma b(\sigma 1\sigma) 1)' \in K$ であるから $(\sigma b(b \backslash \sigma) 1)' \in K$ 。よって $((b \backslash \sigma) 1 \cdot \sigma b)' \in K$ 、つまり $b \backslash \sigma$ は regular である。同様に σ/b も regular である。 以上より

補題 3. regular ideal の全体 $\mathbb{T}$ は residuated lattice を作る。 $\sigma/\sigma = \sigma \backslash \sigma = \{x \in S \mid \sigma x \sigma \leq \sigma\} = \sigma^{-1}$ が成り立つ。

また、 $\sigma \in \mathbb{T}$ に対して $\sigma^* = (\sigma^{-1})^{-1}$ とする。 $\sigma^* \in \mathbb{T}$ 。 したがって $\sigma \in K$ ならば $\sigma^* \in K$ である。 $\sigma^* = \sigma$ なる σ は $*$ -closed ideal といい、いま $\sigma \sim b$ と $\sigma^* = b^*$ によって定義する。 このとき $G = \mathbb{T}/\sim$ は自然の積と順序 $(\sigma) \leq (b) \iff \sigma^* \leq b^*$ によって条件完備半束群を作る。

ここに $C(\alpha)$ は α を含む類を示す. よって G は abel 群で, 強分配束となる. $\alpha \in K$ のとき, $\alpha \sim \alpha$ なる α は K の元である. このとき $C(\alpha)$ を 整 という.

一般に modular 束群において, 2つの束商 a/c と b/d が変換的であれば, $b \leq a$ とし, $a^{-1}c = (c \cup b)^{-1}c = (c^{-1} \cap b^{-1})c = c \cap b^{-1}c = b^{-1}(c \cap b) = b^{-1}d$ であるから, a/c と b/d が射影的のとき $a^{-1}c = b^{-1}d$ が成り立つ. そこで, このことと modular 束における JHS 定理を用いて, G の整元に関する細分定理, また $\alpha^* = \alpha$ なる K 元の細分定理を求めることができる. [1], [5].

§3. 半群の Asano Order に含まれる α と対等な Order に属する正則集合の分解.

この節ではつぎの3つの条件を設定する.

- (1) 整なる C -E-ideal に関して極大条件が成立する.
- (2) 素なる C -E-ideal はすべて極大である.
- (3) 素なる C -E-ideal は $*$ -closed ideal を含む.

このとき " $\sim$ " は " $=$ " となり, E は Asano order となる.

[1]. この場合 $\mathbb{L}$ 元の素 ideal への分解は $\mathbb{L}$ の範囲内で得られるから, $\varphi^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cap \sigma$ によって K 元の素 ideal 分解が K の範囲内で得られる. よってつぎが成り立つ.

群 $G (= \mathbb{T})$ は素数 regular ideal を生成元とする無限巡回群の制限直積である。つまり各 regular ideal α は、積の可換性を無視して、素数 regular ideal の中積 (正, 負) とし一意的に表わされる:

$$\alpha = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p(\alpha)} \right)'$$

ここで p は素数 regular ideal の全体 $\mathbb{P}$ を走り, $\sigma_p(\alpha)$ は有理整数で, ほとんどの p について $\sigma_p(\alpha) = 0$ である。この小論の目的は, この分解定理の拡張である。

S の部分集合 m が 正則な両側集合 (略して 正則集合) とは, 次の2つの条件をみたすときである。

(1) m の各元 α に対して $\alpha \in \alpha$, $\alpha \subseteq m$ なる regular ideal α が存在する。

(2) $\alpha, \beta \in m$ に含まれる任意の regular ideal とすれば $(\alpha \cup \beta)'$ も m に含まれる。

さて $\sigma_p(m) = \inf \{ \sigma_p(\alpha) \mid \alpha \subseteq m, \alpha: \text{regular} \}$ によって $\sigma_p(m)$ を定義する。いま $\sigma: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ なる map で ほとんどの p について $p \in \mathbb{P}$ に対して $\sigma(p) \leq 0$ とするような σ の全体を $\mathcal{S}$ とする。 $\sigma_p(m) \in \sigma_m(p)$ と書きかえて, σ を $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ への map とみると $\sigma_m \in \mathcal{S}$ である。各 $p \in \mathbb{P}$ を素点として vector $(\dots, \sigma(p), \dots)$

の全体を V とし, $\text{Min}(\sigma(p), \tau(p)), \text{Max}(\sigma(p), \tau(p))$ を p 座標にもつ vector と, それぞれ, $\text{vector}(\dots, \sigma(p), \dots)$ と $(\dots, \tau(p), \dots)$ の結, 交 とするに; 二小と通常の加法に関して, V は $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ 上の束半群となる.

つまり, 2つの正則集合 m_1 と m_2 の積を

$$m_1 \cdot m_2 = \bigcup \{(\sigma_1, \sigma_2)' \mid \sigma_i \leq m_i\}$$

によって定義すれば, すべての正則集合 m は, 包含関係とこの積に関して束半群となる.

補題 4. 2つの束半群 m と V は map

$$f: m \mapsto f(m) = (\dots, \sigma_m(p), \dots)$$

によって, 束半群としての同型である.

任意の $m \in m$ について $f(m)$ を 3つの vector の和に分ける:

$$f(m) = v_+(m) + v_-(m) + v_{-\infty}(m).$$

ここに $v_+, v_-, v_{-\infty}$ はそれぞれ成分がすべて $\sigma_m(p) \geq 0$, $\sigma_m(p) \leq 0$ ($\sigma_m(p) \neq -\infty$), $\sigma_m(p) = -\infty$ とするものである. $P_+ = P_+(m) = \{p \in \mathbb{P} \mid \sigma_m(p) > 0\}$, $P_- = P_-(m) = \{p \in \mathbb{P} \mid 0 \geq \sigma_m(p) \neq -\infty\}$, $P_{-\infty} = P_{-\infty}(m) = \{p \in \mathbb{P} \mid \sigma_m(p) = -\infty\}$ と記号を用いる.

$$f^{-1}(v_+(m)) = (\prod_{p \in P_+} p^{\sigma_m(p)})'$$

および

$$f^{-1}(v_{-}(m)) = \bigcup_{p \in P} (\prod_{p \in P} p^{\sigma_m(p)})'$$

が示される。ここに $\prod$ は有限積で、 $\bigcup$ はあらゆる有限積についての和集合である。

素子 regular ideal の任意の集合 P とし

$$\sigma_P = \bigcup \{ (\prod_{p \in P} p^m)' \mid p \in P, m \geq 0 \}$$

によって σ の P 成分を定義する。この記法は通常のそれと違う。通常は、 P の P における余集合を P^c とすると、上式の右辺を σ_{P^c} で表わす。しかしわれわれの場合は、上記の記法が便利である。 $\sigma_P \in \mathcal{M}$ であることが分る。

補題 5 $f^{-1}(v_{-\infty}(m)) = \sigma_{P_{-\infty}(m)}$

この証明には [4] におけると同様の準備をすればよい。

以上のことから、つぎの結果を得る。

定理 半群において、Asano order に含まれるそれと対等
な、modular closure をもつ、任意の order に属するすべての
正則集合は、積の交換可能性を無視すれば、つぎのように
一意的に分解される。

$$m = (\prod_{p \in P_+} p^{\sigma_m(p)})' \cdot (\bigcup_{p \in P_-} (\prod_{p \in P_-} p^{\sigma_m(p)})') \cdot \sigma_{P_{-\infty}(m)}.$$

正則集合が積に関して半群をなすとき、それを 正則(部分)半群 という。上の定理によって、つぎの結果が導かれる。尚、これらのことはすべて環の場合に適用されるものである。

系1 正則半群 m はすべて下記の形で与えられる.

$$m = \left(\prod_{i=1}^n g_i^{\alpha_i} \right) \cdot \sigma_P \quad (\alpha_i > 0)$$

ただし, $g_i \in \mathbb{P}$, $P \subseteq \mathbb{P}$, $\{g_1, \dots, g_n\} \cap P = \emptyset$ である. とくに, σ を含む正則半群は, $\mathbb{P}$ の任意の部分集合 P とするときは, σ_P で与えられる, それ以外には無い. ただし $\sigma_P = S$ とし, $\sigma_\emptyset = \sigma$ とする.

系2 正則集合 m の P ($P \subseteq \mathbb{P}$) 成分 $m_P = (m\sigma_P)'$ は下記のよう分解される.

$$m_P = \left(\prod_{g \in \mathbb{P} \setminus P} g^{\sigma_m(g)} \right)' \cdot \left(\bigcup_{g \in P \setminus \emptyset} \left(\prod_{g \in P \setminus \emptyset} g^{\sigma_m(g)} \right)' \cdot \sigma_{P \setminus \{g\} \cup P} \right)$$

系3 $\mathbb{P}$ の任意の部分集合 P に対し $\mathbb{G}$ から $\mathcal{M}$ の中への写像 $\varphi_P: \sigma \mapsto \varphi_P \sigma = \sigma_P$ は $\sigma \leq \varphi_P \sigma$ をみたす半群としての準同型写像である. 逆に, 写像 $\varphi: \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{M}; \sigma \mapsto \varphi \sigma$ が $\varphi(\sigma\tau)' = (\varphi\sigma\varphi\tau)'$ および $\sigma \leq \varphi\sigma$ をみたすならば $\varphi = \varphi_P$ なる $P \subseteq \mathbb{P}$ が存在する.

以上のことから, 種々の結果が導かれる. たとえば, 最近の Rehm による一連の結果を精しくしなり, さらにそれらの一般化など. しかし, それらについて他機会にゆずることにする. (1980年7月20日)

文 献

- [1] Asano, K. and Murata, K., Arithmetical ideal theory in semi-groups, J. Inst. Polytec., Osaka City Univ., 4 (1953) 9-33.
- [2] Asano, K. and Ukegawa, T., Ergänzende Bemerkungen ueber die Arithmetik in Schieftringen, Ibid., Osaka City Univ., 3 (1951) 1-7.
- [3] Maury, Guy, La condition "intégrlement clos" dans quelques stuctures algébriques, Ann. scient. Ec. Norn. Sup., 3^e série, 78 (1961) 31-100.
- [4] Murata, K., On lattice ideals in a conditionally complete lattice-ordered semigroup, Algebra Universalis, 8 (1978) 111-122.
- [5] Murata, K., A note on arithmetics in semigroups, Proc. Japan Acad., 56 (1980) 133-135.