

## 縮小写像の離散不動点定理と展開形ゲーム

九州大学・大学院数理学研究院 川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)

Faculty of Mathematics, Kyushu University

kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学・大学院数理学府 吉良知文 (Akifumi Kira)

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

a-kara@math.kyushu-u.ac.jp

### 1 はじめに

Brouwer の不動点定理や角谷の不動点定理が Nash 均衡の存在を示す際に極めて強力であることは広く知られている. これらの不動点定理が連続変量の定理であることから, 離散不動点定理を用いれば離散的な (純戦略) Nash 均衡の存在を保証できると期待できる. 実際, 離散不動点定理には次の 3 タイプがあり, それぞれゲーム理論に応用されている.

1. 縮小写像の不動点定理 Robert(86), Shih-Dong(05), Richard(08), 川崎 (09)
2. Brouwer の定理を利用するもの 飯村 (03), Yang(04), 飯村-室田-田村 (05)
3. 単調写像の不動点定理 Tarski(55), Topkis(79), 佐藤-川崎 (09).

例えば, 川崎 [3] は整数区間上の縮小写像に対する離散不動点定理 (定理 5) を与え, そのゲーム論的意味を述べた (定理 6). しかしながら, その仮定は強く, 実際のゲームに対して有効であるかどうか, 2009 年の時点では不明であった. 本稿では, 展開形ゲームの分野でよく知られた Kuhn の定理が我々の離散不動点定理で説明できることを示す.

### 2 ブール代数上の縮小写像に対する離散不動点定理

本節では Robert[4] による古典的な結果を紹介する. まず, ブール代数  $\{0, 1\}$  の順序と計算規則は以下の通りである.

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1, \\ 0 \cdot 1 &= 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1, \quad 0 \leq 0 \leq 1 \leq 1, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1. \end{aligned}$$

$x, y \in \{0, 1\}^n$  と  $\lambda \in \{0, 1\}$  に対して,  $x + y$  と  $\lambda x$  を成分ごとの和と積で定義する. また, ブール代数  $\{0, 1\}$  上の行列を **ブール行列** とよぶ. 行列の和や積は通常の計算規則と同じで, それらの成分の和や積はブール代数に従うものとする. また, 固有値 ( $\in \{0, 1\}$ ) や固有ベクトルも普通に定義する. ブール行列  $B$  の最大固有値を **スペクトル半径** とよび  $\rho(B)$  と書く.

$$d(x, y) := \begin{pmatrix} |x_1 - y_1| \\ \vdots \\ |x_n - y_n| \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^n \quad \text{for } x, y \in \{0, 1\}^n.$$

写像  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$  に対して, 関係行列  $B(f) := (b_{ij})$  を次で定義する.

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i \text{ が } x_j \text{ に依存しない場合} \\ 1, & \text{その他.} \end{cases}$$

**補題 1**  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$  とブール行列  $M$  について, 成分毎の不等式  $B(f) \leq M$  は  $d(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) \quad (\forall x, y \in \{0,1\}^n)$  と同値である.

$e_i$  を第  $i$  成分が 1, それ以外が 0 のベクトルとすると, 置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  を用いて  $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$  と表される行列を置換行列とよぶ.

**補題 2** ブール行列  $B$  について, (a)(b)(c) のいずれか, ただひとつが必ず成立する.

(a)  $B$  は零行をもたない.

(b) ある置換行列  $P$  と強下半三角行列  $T$  と零行をもたない部分行列  $V$  を用いて,  $P^T B P$  は次のように表される. ただし,  $T$  も  $V$  も空でない.

|                                                                                                |                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{c} 0 \cdots 0 \\ \vdots \vdots \\ T \\ \vdots \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \cdots 0 \\ \vdots \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} * \cdots * \\ \vdots \vdots \\ * \cdots * \end{array}$                       | $V$                                                                      |

(c) 置換行列  $P$  が存在して,  $P^T B P$  は強下三角行列になる.

**補題 3** ブール行列は固有値をもつ. また,  $B \leq C$  ならば  $\rho(B) \leq \rho(C)$ .

**定理 1** ブール行列  $B$  に関して, 次の条件は互いに同値である.

- (1)  $\rho(B) = 0$ .
- (2) どの主小行列も零行をもつ. (従って  $B$  の対角要素はすべて 0 になる.)
- (3) 置換行列  $P$  が存在して,  $P^T B P$  は強下三角行列になる.
- (4) ある  $k \leq n$  があって  $B^k = 0$ .

**定理 2** (Robert 1986) 縮小写像  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$  は唯一の不動点  $a$  をもつ. また,  $\exists k \leq n$  s.t.  $f^k(x) \equiv a$ . したがって,  $f$  の反復グラフはただ一つの連結成分からなる.

### 3 Richard-Shih-Dong の不動点定理

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$  に対して,  $\bar{x}^j := (x_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n)$ .  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$  に対して, 離散微分  $f'(x) := (f'_{ij}(x))$  を次のように定義する.

$$f'_{ij}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } f_i(x) \neq f_i(\bar{x}^j) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**定理 3** (Shih-Dong [6]) 写像  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  が全ての点  $x \in \{0, 1\}^n$  で  $\rho(f'(x)) = 0$  を満たすならば,  $f$  は唯一の不動点をもつ.

離散微分は, 現在の  $x$  から 1 変数だけを動かしたときに  $f$  が変化するかどうかを表すもので, 局所的な情報である. 一方, 関係行列  $B(f)$  は大域的な情報である.

Robert の不動点定理は, 大域的な条件  $\rho(B(f)) = 0$  から「唯一の不動点の存在」と言う大域的な性質を導く. 一方, Shih-Dong の不動点定理は, 局所的な条件  $\rho(f'(x)) \equiv 0$  から「唯一の不動点の存在」を導いたもので, 数学的に深いと言える.

ところで, これらの不動点定理をゲーム理論に適用しようとする, ひとつの問題が起きる. それは, ブール代数上の写像であるため, 各プレイヤーの選択肢が 2 つしかないということである. そのため, 不動点定理を整数区間に拡張する必要がある. Richard[7] は Shih-Dong の不動点定理の拡張に成功した.

$X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を整数の有限区間で  $|X_i| \geq 2$  なるものとし,  $X := X_1 \times \dots \times X_n$  とする.  $x \in X$  に対して,  $\{x \pm e_i \mid i = 1, \dots, n\} \cap X$  を  $x$  の直近傍とよぶ.  $x + v \in X$  なる  $v \in \{\pm 1\}^n$  に対して, 離散ヤコビ行列  $f'(x, v) := (f_{ij}(x, v))_{1 \leq i, j \leq n}$  を次で定義する.

$$f_{ij}(x, v) := \begin{cases} 0, & (f_i(x) - x_i - \frac{v_i}{2})(f_i(x + v_j e_j) - x_i - \frac{v_i}{2}) \geq 0, \\ 1, & (f_i(x) - x_i - \frac{v_i}{2})(f_i(x + v_j e_j) - x_i - \frac{v_i}{2}) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

$X$  がブール代数  $\{0, 1\}^n$  の場合は,

$$x + v \in X \Leftrightarrow v_i = \begin{cases} -1 & \text{if } x_i = 1, \\ 1 & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

なので  $v$  は  $x$  に対して一意に決まり, 離散ヤコビ行列を  $f'(x)$  と書くことができる.

**定理 4** (Richard[7])  $f: X \rightarrow X$  が次の条件を満たすならば, 唯一の不動点をもつ.

$$\rho(f'(x, v)) = 0 \quad \text{if } x + v \in X. \quad (2)$$

Richard は整数区間のサイズに関する帰納法で定理を証明した. その最初のステップ  $|X_1| = \dots = |X_n| = 2$  が Shih-Dong の不動点定理であり, Richard の不動点定理は Shih-Dong の不動点定理に強く依存している. この意味で, 本稿では定理 4 を Richard-Shih-Dong の不動点定理とよぶことにする.

## 4 整数区間上の縮小写像に対する離散不動点定理

Richard-Shih-Dong の不動点定理を用いれば, Robert の不動点定理を整数区間の直積  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  に拡張することは易い.

**定理 5** (川崎[3])  $f = (f_1, \dots, f_n)$  を  $X$  から  $X$  への写像とする. ある置換  $\sigma$  があって, どの  $i = 1, \dots, n$  についても  $f_{\sigma(i)}$  が  $x_{\sigma(j)}$  ( $j \geq i$ ) に依存しなければ,  $f$  は唯一の不動点をもつ.

証明. 番号をつけかえておくことにより, 一般性を失うことなく  $\sigma = id$  としてよい. このとき, 仮定から, 関係行列  $B(f)$  は強下三角行列になる. 従って  $\rho(B(f)) = 0$  である.  $x + v \in X$  なる任意の  $x \in X, v \in \{\pm 1\}^n$  に対して, 離散ヤコビ行列は  $f'(x, v) \leq B(f)$  を満たすから,  $\rho(f'(x, v)) \leq \rho(B(f)) = 0$ . よって Richard-Shih-Dong の不動点定理により,  $f$  は唯一の不動点をもつ. ■

これを  $n$  人非協力ゲームに適用する. 戦略  $s_{-i} \in S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$  に対するプレイヤー  $i$  の最適応答集合を  $F_i(s_{-i})$  とする.

**定理 6** (川崎 [3]) 適当にプレイヤーの番号をつけかえたのち, ある  $f_i(s_{-i}) \in F_i(s_{-i})$  が  $i$  より若い番号のプレイヤーの戦略にしか依存しない, 即ち,

$$f_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) = f_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \square, \dots, \square)$$

ならば, 純戦略 Nash 均衡が存在する. また,  $F_i(s_{-i})$  が一点集合の場合は, 純戦略均衡は一意に定まる.

証明.  $f_i$  はプレイヤー  $i+1, \dots, n$  の選択に依存せず自分自身は変数から排除されているので, 定理 5 により,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  は唯一の不動点をもつ. それを  $s^* \in S$  とすると, プレイヤー  $i$  の利得関数  $r_i$  は

$$r_i(s_{-i}^*, s_i^*) = \max_{s_i \in S_i} r_i(s_{-i}^*, s_i)$$

を満たす. これは  $s^*$  が Nash 均衡であることを意味する. ■

定理 6 の仮定は強いが, 完全情報展開形ゲームの最適応答写像はこの仮定を満たす. このことから, 「完全情報ゲームは純戦略均衡をもつ」と言う Kuhn の定理を導くことができる.

## 5 完全情報展開形ゲームへの応用

**展開形ゲーム**とは, ゲームの木を用いて記述されるゲームであり, 有限の有向木 (ゲームの木とよぶ)  $K$ , プレイヤー集合  $P$ , 偶然手番の確率分布  $p$ , 情報分割  $U$ , 利得関数  $h$  の 5 つの要素からなり, それらをまとめて**ゲームのルール**とよぶ.

- **ゲームの木**は根  $O$  をもつ有限な有向木で, その葉 (頂点とよぶ) 集合を  $W$  とかく. また, 節点  $x \neq y$  について,  $O$  から  $x$  への経路上に  $y$  があるとき,  $y < x$  と定義する. 葉以外の点を**手番**といい, 手番全体を  $X$  で表す. 手番  $x$  とその直後の点を結ぶ枝を  $x$  の**選択枝**といい,  $x$  の選択枝全体を  $A(x)$  で表す. また, 根と葉を結ぶひとつの経路を**プレイ**とよぶ.
- **プレイヤー分割**: プレイヤーの集合を  $N := \{1, \dots, n\}$ . 手番全体の分割  $X = P_0 + P_1 + \dots + P_n$  を**プレイヤー分割**という.  $i \in N$  に対し,  $P_i (\neq \emptyset)$  はプレイヤー  $i$  の手番集合を表す.  $P_0$  は偶然手番の集合で,  $n$  人のプレイヤーは制御できないものとする.

- **偶然手番の確率分布** : 各  $x \in P_0$  に対して, 選択枝集合  $A(x)$  上に確率分布  $p_x$  が与えられている.
  - **情報分割** とは, プレイヤー分割の細分で, 次の条件 (i)(ii) を満たすものである.
    - (i) 情報集合  $u$  は同じプレイと 2 回以上交差しない.
    - (ii)  $x, y \in u$  ならば,  $A(x) = A(y)$  である.
- 各  $i \in N \cup \{0\}$  に対して,  $U_i = \{u_{i1}, \dots, u_{im_i}\}$  が  $P_i$  の分割  $P_i = u_{i1} + \dots + u_{im_i}$  のとき,  $U_i$  を **プレイヤー  $i$  の情報分割**,  $u_{ij}$  を **プレイヤー  $i$  の情報集合** とよぶ.
- **利得関数** は, 葉  $w$  に  $n$  人のプレイヤーの利得  $h(w) = (h_1(w), \dots, h_n(w))$  を対応させるベクトル値関数である.

全ての情報集合がただひとつの手番からなるとき, **完全情報ゲーム** とよぶ (図 1 左).

展開形ゲームの基本的な戦略が行動戦略である. 即ち, プレイヤー  $i$  は各情報集合  $u \in U_i$  でどの選択枝を選ぶかを決めなければならないが, 選択枝の集合  $A(u)$  上の確率分布 (**局所戦略** とよぶ)  $b_{iu}$  を与える戦略をプレイヤー  $i$  の **行動戦略** といい,  $b_i$  と書く. 特に,  $A(u)$  のひとつの選択枝に確率 1 を与える行動戦略を **純戦略** という. 純戦略は  $u \in U_i$  に  $A(u)$  の元を対応させる写像  $\pi_i$  ととらえることができる.

行動戦略の組  $b = (b_1, \dots, b_n)$  が与えられたとき, 葉  $w$  に到達する確率が定まる. それを **実現確率** といい  $p(w|b)$  と書く. この実現確率でプレイヤー  $i$  の利得  $h_i(w)$  の期待値をとつたものを  $H_i(b)$  と書き, 次の不等式を満たす行動戦略  $b^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$  を **均衡** とよぶ.

$$H_i(b^*) \geq H_i(b_i, b_{-i}^*) \quad \forall b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

**定理 7** (Kuhn 1953) 完全情報ゲームには純戦略均衡が存在する.

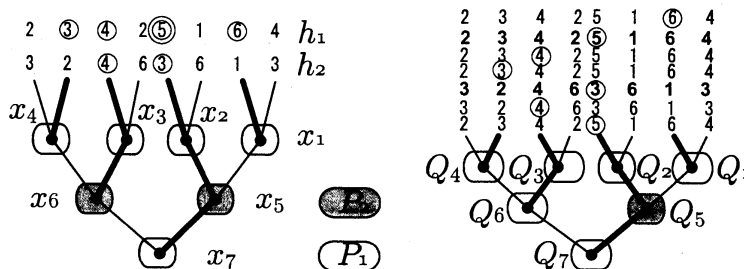


図 1: 左:  $P_1, P_2$  の完全情報ゲーム. 右:  $Q_1, \dots, Q_7$  の展開形ゲーム

証明. ゲームの木の順番について, 半順序  $x < y$  の極大元を順次選ぶことにより,  $x_1, \dots, x_m$  と番号を振り, 手番  $x_j$  のプレイヤーを  $Q_j$  とする (図 1 右). 偶然手番を除けば,  $Q_j$  は本来のプレイヤーのどれかひとつ  $P_i$  と手番  $x_j$  を共有するので,  $Q_j$  の先にある葉には  $Q_j$  の

利得として  $P_i$  と同じ利得を与える. この展開形ゲームにおいて, 手番  $x_j$  は  $x_{j+1}, \dots, x_m$  より大きい比較不可能なので, 戦略  $s_{-j} \in S_{-j} = \prod_{k \neq j} S_k$  により手番  $x_j$  に到達する場合,  $Q_j$  の最適応答は  $Q_{j+1}, \dots, Q_m$  の戦略に依存しない. そのような最適応答のひとつを  $f_j(s_{-j})$  とする. また, 手番  $x_j$  に到達しない場合は,  $Q_j$  の最適応答は  $S_j$  になる. よって, 後者の場合も最適応答として  $f_j(s_{-j})$  をとると, それは  $Q_{j+1}, \dots, Q_m$  の戦略に依存しない. よって, 定理 6 により,  $Q_1, \dots, Q_m$  の純戦略均衡  $s^* := (s_1^*, \dots, s_m^*)$  が存在する. もし  $s^*$  がプレイヤー  $P_1, \dots, P_n$  にとっての均衡でなければ, あるプレイヤー  $P_i$  が別の戦略をとることにより,  $P_i$  の利得  $H_{P_i}$  が真に増加する. ここで,  $P_i$  は複数のプレイヤーからなるが, そのうちの少なくとも 2 人  $Q_j$  ( $j = j_1, j_2$ ) が戦略を変更することになる. もし  $x_{j_1} < x_{j_2}$  ならば,  $Q_{j_1}$  の変更により手番  $x_{j_2}$  には到達しないから,  $Q_{j_2}$  は利得の改善に寄与しない. したがって,  $x_{j_1}$  と  $x_{j_2}$  は比較不可能でなければならない. しかしこのときも, 二人のどちらかは利得の改善に寄与しない. この要領で  $P_i$  を構成するプレイヤー  $Q_j$  ( $j \in J_i$ ) から利得の改善に寄与しないプレイヤーを除いてゆくと, 最後は一人のプレイヤー  $Q_j$  だけになり,  $s^*$  が  $Q_1, \dots, Q_m$  の均衡であることに矛盾する. 故に  $s^*$  は  $P_1, \dots, P_n$  の均衡である. ■

## 参考文献

- [1] T. IIMURA, A discrete fixed point theorem and its applications, *J. Math. Econom.*, **39** (2003), 725–742.
- [2] T. IIMURA, K. MUROTA AND A. TAMURA, Discrete fixed point theorem reconsidered, *J. Math. Econom.*, **41** (2005), 1030–1036.
- [3] 川崎英文, 縮小写像の離散不動点定理とその応用, 京都大学数理解析研究所講究録 1682 「不確実・不確定性下での意思決定過程」, ed. 土肥正, (2010) 163–167.
- [4] F. ROBERT, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).
- [5] J. SATO AND H. KAWASAKI, Discrete fixed point theorems and their application to Nash equilibrium, *Taiwanese J. Math.*, **13** (2009), 431–440.
- [6] M.-H. SHIH AND J.-L. DONG, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005), 30–46.
- [7] A. RICHARD, An extension of the Shih-Dong’s combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008), 620–627.
- [8] A. TARSKI, A lattice-theoretical fixpont theorem and its applications, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 285–309.
- [9] Z. YANG, Discrete fixed point analysis and its applications, FBA Working Paper No. 210, Yokohama National University, 2004.