

いくつかの凸な物体に対する 散乱行列の極について

阪大理 井川 満 (Mitsuru Ikawa)

1. 序. Ω を $\mathbb{R}^3$ 中の openかつ bounded set で Ω の境界 Γ は滑かなものとする.

$$\Omega = \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$$

とおき, Ω は connected であると仮定する. 次の acoustic problem を考える:

$$(1) \quad \begin{cases} \square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty) \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \times (-\infty, \infty) \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x). \end{cases}$$

この問題に対する scattering matrix を $S(z)$ と記す. 我々の考察したい問題は次である.

問題 Ω の幾何学的性質は $S(z)$ の解析的性質, 特に極の分布にどのように反映するか?

ここでは $\delta(z)$ の定義は記さないが、次のことを注意しておく。 $\mu \in \mathbb{C}$ で $\operatorname{Re} \mu > 0$ なるものをり、 $g \in C^\infty(\Gamma)$ に対して次の境界値問題を考える：

$$(2) \quad \begin{cases} (\mu^2 - \Delta)u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \Gamma \\ u \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

よく知られているように (2) は一意に解が存在する。その解 u を

$$u = U(\mu)g$$

と表すと、 $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Omega))$ -valued holomorphic function となる。一方、解の regularity theorem より $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$ -valued function とみなしうる。

[LP 1], [Mi] で示されているように $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$ -valued function として $\mathbb{C}$ 全体で meromorphic である。

$\delta(z)$ と $U(\mu)$ の間には次のことが知られている ([LP 1]):

$$z \text{ が } \delta(z) \text{ の pole} \iff \mu = iz \text{ が } U(\mu) \text{ の pole.}$$

従って $\delta(z)$ の pole の分布を調べることは $U(\mu)$ の pole の分布を調べることに同等である。

上の問題について、次が基本的である。

Modified Lax and Phillips' conjecture. $\mathcal{O}$ が nontrapping であるならば、ある $\alpha > 0$ が存在して、

$\{z; \operatorname{Im} z < \alpha\}$ に $\mathcal{S}(z)$ の pole は無限個存在する.

Remark 1. $\mathcal{O}$ が nontrapping ならば, 任意の $\alpha > 0$ について, $\operatorname{Im} z < \alpha$ には有限個の pole しかない ([MoRSt], [MS_j], [LP2]).

Remark 2. 上記の Lax Phillips' conjecture に対する例として知られているのは $\mathcal{O}$ が二つの disjoint な凸な物体から成る場合のみである ([Ik 1, 2], [G]).

2. 結果 我々はここで $\mathcal{O}$ が有限個の disjoint な狭凸物体より成る場合を考察する. 物体が2個の場合と3個以上の場合の違いは次の点にあるといえる. 2個の場合は, Ω 内の periodic ray を考えると, primitive なものは唯一つしか存在しない. しかし, 3個以上になると一般には (例えば, 後に出る条件 (H.2) がみたされていると) primitive な periodic ray が無限個存在する. それが問題をむっかしくしている最大の原因といえる.

我々は次のような $\mathcal{O}$ を考察する. $\mathcal{O}_j, j=1, 2, 3, \dots, J$ を $\mathbb{R}^3$ の中の open, bounded sets で境界 Γ_j は滑かなものとする. 次の仮定をおく:

(H.1) 各 O_j は strictly convex とする, すなわち Γ_j の Gaussian curvature は Γ_j のすべての点で正である.

(H.2) 任意の $\{j_1, j_2, j_3\} \in \{1, 2, \dots, J\}^3$ で $j_l \neq j_{l'}$ if $l \neq l'$ となるものに対し

$$(\bar{O}_{j_1} \text{ と } \bar{O}_{j_2} \text{ の convex hull}) \cap \bar{O}_{j_3} = \emptyset$$

が成り立つ.

上の条件をみたす $O_j, j=1, 2, \dots, J$ に対し

$$O = \bigcup_{j=1}^J O_j$$

とおく. O の外部領域 Ω の中の periodic ray を γ で表すことにする (必ずしも primitive とは限らない). γ に対し, 次の記号を導入する:

i_γ : γ の反射点の数,

d_γ : γ の長さ,

T_γ : γ の primitive period,

P_γ : γ の Poincaré map.

次により関数 $F(\mu)$ を定義する:

$$F(\mu) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{i_\gamma} T_\gamma}{|I - P_\gamma|^{1/2}} e^{-\mu d_\gamma},$$

ここで和は Ω 内のすべての periodic ray にわたってとられ

るものとし $|M|$ は行列 M の行列式を表わすものとする。

$$\#\{\gamma: d_\gamma \leq \lambda\} \leq C e^{C_0 \lambda}$$

なる評価が成り立つことと, P_γ の評価を用いると, ある $\mu_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

“ $F(\mu)$ は $\operatorname{Re} \mu \geq \mu_0$ では holomorphic である ”

ことがわかる。

定理 1. $F(\mu)$ は entire function に拡張できないとする。ある $\alpha > 0$ が存在して, $\{z; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$ に $\mathcal{S}(z)$ の pole が無限個存在する。

定理 1 に関しては, $F(\mu)$ が entire function にならないための十分条件を与えることが大切である。しかし、現在のところそれはみつかっていない。これからの研究課題である。 $J=2$ の場合は [Ik1] で用いられた考察から $F(\mu)$ は必ず pole をもつことはわかる。 $J \geq 3$ になると, この節のはじめに述べた理由から困難であるが, 次のことはいえる。

定理 2. $\theta_1, \theta_2, \tilde{\theta}_3, \tilde{\theta}_4, \dots, \tilde{\theta}_J$ は (H.1), (H.2) をみたしているとする。 $\theta_1, \theta_2, \tilde{\theta}_3, \dots, \tilde{\theta}_J$ よりきまる $\kappa > 0$ があって,

$$\theta_j \subset \tilde{\theta}_j, j=3, 4, \dots, J,$$

かつ $\Gamma_j = \partial\Omega_j$ の主曲率はいづれも Γ_j のすべての点で κ より大きくなるような $\Omega_j, j=3, 4, \dots, J$ に対して

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^J \Omega_j$$

に対する $F(\mu)$ は entire function には拡張出来ない。

3. 証明の方針.

定理 1 は [BGR] で証明された次の trace formula を用いる。

$$(3) \quad \text{tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_0^\infty f(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} \oplus 0 - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt \\ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty \hat{f}(z_j), \quad \forall f \in C_0^\infty(0, \infty),$$

ここで

$$\hat{f}(z) = \int_0^\infty e^{izt} f(t) dt,$$

$\{z_j; j=1, 2, \dots\}$ は $\delta(z)$ の pole 全体 (重複度も考慮して), Δ は $L^2(\Omega)$ における Dirichlet 条件下での ラプラスリアンの self-adjoint realization, Δ_0 は $L^2(\mathbb{R}^3)$ でのものとする。
 $\oplus 0$ は Ω の内部へは 0 で拡張するの を意味する。

$f \in C_0^\infty(-2, 2)$ で

$$f(t) \geq 0, \quad f(t) = f(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\text{かつ} \quad f(t) = 1 \quad \text{on } [-1, 1]$$

$$\hat{f}(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

を満すものをとる. $\{l_q\}_{q=1}^{\infty}, \{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ を

$$l_q \rightarrow \infty, \quad m_q \rightarrow \infty \quad (q \rightarrow \infty)$$

となる数列とする. これらを用いて

$$f_q(t) = f(m_q(t - l_q))$$

とおく.

Lemma 1. $\alpha > 0$ に対し

$$\#\{j; \operatorname{Im} z_j \leq \alpha\} = P(\alpha) < \infty$$

とする. そのとき

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_q(z_j)| \leq C_{\alpha} m_q^4 e^{-\alpha l_q} + P(\alpha) m_q^{-1}, \quad \forall q$$

が成り立つ. ここで C_{α} は $\{l_q\}_{q=1}^{\infty}, \{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ には独立である.

Lemma 2. (H.1), (H.2) がみたされているとする. 任意の $\{l_q\}, \{m_q\}$ に対し

$$(5) \quad \left| \operatorname{tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int f_q(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} \oplus 0 - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt \right| \\ \geq |\langle f_q, \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}(0, \infty) \times \mathcal{D}'(0, \infty)}| - C e^{a_0 l_q} m_q^{-\varepsilon_0}, \quad \forall q$$

が成り立つ. ここで C, a_0, ε_0 は $\{l_q\}, \{m_q\}$ に独立な定数で, $\hat{F}(t)$ は次で定義される $\mathcal{D}'(0, \infty)$ の元である:

$$\hat{F}(t) = \sum_y \frac{(-1)^{iy} T_y}{|I - P_y|^{1/2}} \delta(t - d_y)$$

Lemma 3. $F(\mu)$ は entire function には拡張できないとする。ある $\alpha_0 > 0$ があって、任意の $\beta > 0$ 十分大、に対して次の性質をもつ $\{l_q\}_{q=1}^{\infty}$, $\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ をみつけることができる:

$$(i) \quad l_q \longrightarrow \infty \quad \text{as } q \longrightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad e^{\beta l_q} \leq m_q \leq e^{2\beta l_q}, \quad \forall q,$$

$$(iii) \quad f_q(t) = f(m_q(t - l_q)) \text{ に対し}$$

$$(6) \quad |\langle f_q, \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}(0, \infty) \times \mathcal{D}'(0, \infty)}| \geq e^{-\alpha_0 l_q}, \quad \forall q.$$

以上の3つの lemmas を用いると、定理1が示せる。実際、

$$\alpha = 5(\alpha_0 + a_0 + 1) / \varepsilon_0.$$

ととる。もし $P(\alpha) < \infty$ とすると $\beta = \alpha/5$ とし lemma 3 を適用して $\{l_q\}$, $\{m_q\}$ を定める。(3) の右辺に (4) の評価式を、左辺に (5) と (6) を組み合わせて用いると

$$(1 - C e^{-l_q}) e^{-\alpha_0 l_q} \leq (C_\alpha + C P(\alpha)) e^{-\beta l_q},$$

を得る。 $\alpha_0 < \beta$ かつ、 $l_q \rightarrow \infty$ より矛盾が生じる。よって $P(\alpha) < \infty$ ではありえない。

定理2の証明は次のようにする ($J=3$ の場合).

$$F(\mu) = \sum_y \dots = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum'_m \dots),$$

ここで $\sum'_m$ は Θ_3 に m 個の反射点をもつ periodic ray 全体についての和をとるものとする.

$$\rho(\mu) = 1 - \lambda \tilde{\lambda} e^{-2d\mu}$$

とおく. ここで $d = \text{dis}(\Theta_1, \Theta_2)$, $\lambda, \tilde{\lambda}$ は Θ_1, Θ_2 よりきまる定数で $0 < \lambda, \tilde{\lambda} < 1$ となるものとする. $c_0 = -(\log \lambda \tilde{\lambda})/2d$

とおく. ある $c_1 > 0$ があって

$$\sum'_0 = \frac{\lambda \tilde{\lambda} e^{-2d\mu}}{\rho(\mu)} + \text{holomorphic in } \{\text{Re } \mu > -c_0 - c_1\}$$

となる. さらに $\mu_1 > 0$ を一つ固定すると, $m \geq 1$ に対し

$$|\sum'_m| \leq \frac{|C_{\mu_1} x|^m}{|\rho(\mu)|^{m+1}} \quad \forall |\mu| \leq \mu_1,$$

が成り立つ. 従って

$$F(\mu) = \sum'_0 + \sum_{m \geq 1} \sum'_m = F_0 + F_1$$

とおくと, もし F が entire ならば F_1 は $\text{Re } \mu > -c_0 - c_1$ で

meromorphic. $\mathcal{C} = \{\mu; |\mu - (-c_0)| = \epsilon\}$ として ϵ を

適当に小さくとると, それに比して ϵ が小さければ

$$|F_1(\mu)| \leq \frac{1}{2} |F_0(\mu)| \quad \text{on } \mathcal{C}$$

が成り立つ. しかし argument principle を用いると $F(\mu)$ が極をもち矛盾となる. よって $F(\mu)$ は $\mathcal{C}$ の内に特異点をもつ.

References

- [BGR] C.Bardos, J.C.Guillot and J.Ralston, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la theorie de la diffusion, Comm.Partial Diff. Equ., 7(1982), 905-958.
- [G] C.Gérard, Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictment convexes, preprint, Univ.Paris-sud.
- [Ik 1] M.Ikawa, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, J.Math.Kyoto Univ., 23(1983), 127-197.
- [Ik 2] M.Ikawa, Trapping obstacles with a sequences of poles of the scattering matrix converging to the real axis, Osaka J.Math., 22(1985), 657-689.
- [Ik 3] M.Ikawa, Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies, to appear in Ann.Inst. Fourier.
- [Ik 4] M.Ikawa, On the poles of the scattering matrix for several convex bodies, to appear in Prospect of Algebraic Analysis.
- [LP 1] P.D.Lax and R.S. Phillips, Scattering theory, Academic Press, 1967.
- [LP 2] P.D.Lax and R.S.Phillips, A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix, Arch.Rat. Mech.Anal., 40(1971), 286-280.
- [Mi] S.Mizohata, Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur, Proc.Japan

Acad., 39(1964), 352-357.

[Me] R.Melrose, Singularities and energy decay in acoustical scattering, Duke Math.J., 46(1979), 43-59.

[MeS] R.Melrose and J.Sjöstrand, Singularities of boundary value problems, I and II, Comm.Pure Appl.Math., 31(1979), 593-617, 35(1982), 129-168.

[MoRSt] C.S.Morawetz, J.Ralston and W.Strauss, Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles Comm.Pure Appl.Math., 30(1977), 447-508.

[P] V.Petkov, La distribution des poles de la matrice de diffusion, Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1982-1983.

[R] J.Ralston, The first variation of the scattering matrix, An addendum, J.Diff.Equ., 28(1978), 155-162.