

部分最適化問題の完全性

宮崎 修一

岩間 一雄

九州大学大学院
システム情報科学研究科

京都大学工学部

〒 812 福岡市東区箱崎 6-10-1

〒 606-01 京都市左京区吉田本町

Tel 092-642-3865

075-753-5372

Fax 092-632-5204

075-753-5379

shuichi@csce.kyushu-u.ac.jp

iwama@kuis.kyoto-u.ac.jp

あらまし 部分 MAXSAT は, MAXSAT を一般化した組合せ最適化問題であり, スケジュール問題等の現実社会に則した組合せ最適化問題を模倣する能力を持っている. また, 部分 MAXSAT は, 項の重みづけを施すことにより, 従来の MAXSAT アルゴリズムを用いて, 効率良く解けることが実験によって示されている. このように, 部分 MAXSAT は有用な問題であるが, どのような問題を模倣することができるかを理論的に明らかにする必要がある. 本論文では, 部分 MAXSAT の組合せ最適化問題のクラスでの完全性を示す. また, 他の組合せ最適化問題に対応する部分最適化問題の完全性も示す.

キーワード 最適化問題, 部分最適化問題, 部分 MAXSAT, 完全性

On the Completeness of Partial Optimization Problems

Shuichi Miyazaki

Kazuo Iwama

Department of Computer Science and
Communication Engineering

Department of Information Science

6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812

Yoshida-Honmachi, Kyoto 606-01

Phone +81-92-642-3865

+81-75-753-5372

Fax +81-92-632-5204

+81-75-753-5379

shuichi@csce.kyushu-u.ac.jp

iwama@kuis.kyoto-u.ac.jp

Abstract Partial MAXSAT (PMSAT) is a generalization of MAXSAT and has flexibility to simulate general combinatorial optimization problems, such as scheduling problems. However, it is shown empirically that it can be solved efficiently by local search algorithms for MAXSAT using weighting strategy. In this paper, we show the completeness of PMSAT and other partial optimization problems in order to demonstrate their usefulness.

key words optimization problems, partial optimization problems, partial MAXSAT, completeness

1 はじめに

CNF 論理式の充足可能性問題 (SAT) は基本的な組合せ問題であり、解法アルゴリズム、例題生成アルゴリズム等の研究が盛んに行われている [CI96, Iwa89]. しかし、SAT を実用的時間で解くのは不可能であると考えられているため、近年では、実用時間でできるだけ多くの項を充足する解を見つける問題である MAXSAT の近似解法の研究も行われている [GW94]. その中で、特に局所探索法は最適に近い解を高速に見つけるとの報告もあり、注目を集めている [CI96]. これにより、様々な組合せ最適化問題を MAXSAT に変換し、MAXSAT に対する高速アルゴリズムを利用して解くという方法を考えることができる. しかし、スケジューリング問題等の現実社会に則した最適化問題を模倣するには MAXSAT は不十分であり、MAXSAT の一般化である部分 MAXSAT という問題が新たに提案された [CIKM97].

部分 MAXSAT の例題は 2 つの CNF 論理式 f_A および f_B からなり、 f_A の項を全て充足させた上で f_B の項をできるだけ充足する割り当てを求める問題である. 部分 MAXSAT は MAXSAT よりも一般性を有しているにも関わらず、項に重み付けを施すことによって、従来の MAXSAT アルゴリズムを用いて、十分に良い解を探索できるということが実験により分かった [CIKM97].

このように、部分 MAXSAT は様々な問題を模倣でき、高速に良い解を求めることのできる問題であるが、どのような問題が部分 MAXSAT を利用して解けるかは明らかになっていない. 本論文では、部分 MAXSAT の最適化問題のクラスでの完全性を示し、幅広い最適化問題を模倣可能であることを示す.

我々は、部分 MAXSAT のように、一部を充足し残りを最適化する問題を「部分最適化問題」と呼ぶ. 最適化問題の完全性の議論は盛んに行なわれているが [ACP95, CP91, CT94], 部分最適化問題を取り扱った文献は見受けられない. また、

MAXSAT に対して部分 MAXSAT が存在するように、他の最適化問題にも対応する部分最適化問題を考えることができる. 本論文では、そのような部分最適化問題の完全性に関しても議論を行う.

2 最適化問題

本節では最適化問題および最適化問題間の多項式時間変換を定義し、最適化問題のクラスでの完全性について述べる.

定義 [ACP95]. NP 最適化問題とは 4 つ組 $(I, sol, m, goal)$ のことを言う.

- (1) I は例題集合で、列 x が与えられた時に、 $x \in I$ であるかどうかを多項式時間で判定可能である.
- (2) I の各要素 x に対して、 $sol(x)$ は x の解集合である. 多項式 p が存在し、任意の $y \in sol(x)$ に対して、 $|y| \leq p(|x|)$ が成り立つ. また、任意の $x \in I$ と列 y が与えられた時、 $y \in sol(x)$ かどうかを多項式時間で判定可能である.
- (3) $m(x, y)$ は例題 x に対する解 y のコスト (正の整数) であり、関数 m は多項式時間で計算可能である.
- (4) $goal$ は max または min である.

NPO 問題は与えられた x に対して、 $m(x, y)$ を最大 (最小) にする y を求める問題である. x に対する最適なコストを $opt(x)$ で表す. 任意の NPO 問題 A に、非決定性チューリング機械 M_A を対応させることができる. M_A は以下の動作を行ない、 A の例題 x から解を計算する. (1) 列 y を推測する. (2) y が x の解なら $m(x, y)$ を出力する、さもなければ停止する. 以上の動作は多項式時間で行なうことができる.

定義 [ACP95]. NP 最適化問題のクラスを NPO という. また、NP 最適化問題で、任意

の例題 x および、任意の解 y に対して、コスト $m(x, y)$ が $|x|$ の多項式以下であるもののクラスを **NPO-PB** という。

定義. 以下の条件を満たす多項式時間計算可能な関数 f, g が存在する時、問題 A は問題 B に **PTAS** 変換可能であるという。

- (1) 問題 A の任意の例題 x に対し、 $f(x)$ は問題 B の例題である。
- (2) $f(x)$ の任意の解 y に対し、 $g(x, y)$ は x の解である。
- (3) ある定数 c が存在し、任意の x, y に対して、 $R_A(x, g(x, y)) \leq c \cdot R_B(f(x), y)$ である。ただし、 $R(x, y) = \max\left\{\frac{m(x, y)}{\text{opt}(x)}, \frac{\text{opt}(x)}{m(x, y)}\right\}$ である。

直観的には、問題 A が問題 B に **PTAS** 変換可能ならば、 B に対する定数近似多項式時間アルゴリズムが存在すれば、 A にも定数近似多項式時間アルゴリズムが存在することになる。

定義. **NP** 最適化問題 A は、以下の条件を満たす時、**NPO** 完全 (**NPO-PB** 完全) であるという。

- (1) $A \in \text{NPO}$ ($A \in \text{NPO-PB}$)。
- (2) 任意の $B \in \text{NPO}$ ($B \in \text{NPO-PB}$) が A に **PTAS** 変換可能である。

最適化問題のクラス分け及び完全性に関しては、様々な研究がなされている [CP91, PY91, CT94, CKST95]。例えば [CP91, CT94] では、最適化問題を **NPO**, **APX**, **PTAS**, **FPTAS** にクラス分けしており、それぞれのクラスにおいて、適切な変換の元での完全問題も示されている。しかし、**NPO** 完全問題 (**NPO-PB** 完全問題) はあまり知られていない。本研究では、部分最適化問題に注目し、それらの完全性を示そうというのが目的である。例えば、部分 **MAXSAT** は従来の **MAXSAT** アルゴリズムを用いて十分に

良い解を得られることが実験によって示されており [CIKM97]。その完全性を示すことは、部分 **MAXSAT** を利用して多くの最適化問題を解くことができるということを意味している。部分 **MAXSAT** の重要性については次節で述べる。

3 部分 **MAXSAT** の重要性

本節では、従来の **MAXSAT** が、時間制作成問題のようなスケジューリング問題を模倣するのに不十分である理由を述べる。本節では、初めに、**MAXSAT** 及び時間制作成問題の定義に触れ、次に、**MAXSAT** を利用して時間制作成問題を解くための変換方法について述べる。最後に部分 **MAXSAT** の必要性を考える。

3.1 **MAXSAT** および時間制作成問題

$x_1, x_2, \dots, x_n$ を変数といい、これらは真 (1) または偽 (0) の値を取る。変数 x_i およびその否定 $\neg x_i$ をリテラルという。リテラルの論理和を項といい、項の論理積を **CNF** 論理式という。**CNF** 論理式の充足可能性問題 (**SAT**) は **CNF** 論理式 f が与えられた時、全ての項を 1 にする、変数への 0, 1 割り当てを見つける問題である。また、**MAXSAT** は、できるだけ多くの項を 1 にする割り当てを見つける問題である。

時間制作成問題は、大学のデータベースから時間割を作成する最適化問題で、入力例題は以下のような情報である。(i) 学生の集合 Σ_S , 教官の集合 Σ_P , 教室の集合 Σ_R , 時間の集合 Σ_T , 講義の集合 Σ_C 。(ii) どの学生がどの講義を履修希望しているかという情報。(iii) どの教官がどの講義を担当するかという情報。(iv) 各教官の講義を行えない時間の情報。(v) どの講義がどの教室を使うことができないかという情報。(vi) どの教室をどの時間に使うことができないかという情報。

時間制作成問題は、上述の例題が与えられた時に次のような条件を満たす時間割を作成する問題である。(a) 同じ時間、教室に 2 つ以上の講義を

割り当ててはいけない。(b) 講義 c_1 と c_2 が同じ教官の担当であれば、 c_1 と c_2 は同じ時間に割り当てられてはいけない。(c) 講義 c_1 を希望する学生がいれば、 c_1 は行なわれなければいけない。また、講義 c_1 と c_2 を同じ学生が希望していたら、 c_1 と c_2 を同じ時間に割り当ててはいけない。(d) 講義 c_1 の担当教官が p_1 であり、教官 p_1 が時間 t_1 に講義を行なえないとすると、講義 c_1 を時間 t_1 に行なうてはいけない。(e) 講義 c_1 を教室 r_1 では行なえないとすると、 c_1 を r_1 に割り当ててはいけない。(f) 教室 r_1 は時間 t_1 に使えないとすると、時間 t_1 , 教室 r_1 にはどの講義も割り当ててはいけない。

3.2 変換アルゴリズム

講義数を A , 時間数を B , 教室数を C とし、変数は $x_{i,j,k} (1 \leq i \leq A, 1 \leq j \leq B, 1 \leq k \leq C)$ を使用する。変数 $x_{i,j,k}$ に 1 が割り当てられた状態というのを、講義 c_i を時間 t_j に教室 r_k で行なうという状態と考える。したがって、変数割り当ては、(全く機能できないようなものも含めて) ある時間割を表しているものと考えることができる。基本的なアイデアは、前節で述べた条件が満たされない割り当てに対して、0 となる項を作っていくことである。アルゴリズムは例を用いて説明する。

変換アルゴリズム

ステップ 1: 各 $i_1, i_2, j, k (i_1 \neq i_2)$ に対して、 $(\overline{x_{i_1,j,k}} + \overline{x_{i_2,j,k}})$ という項を作る。異なる 2 つの講義 i_1 と i_2 が同じ時間に同じ教室で行なわれた時、これらの項のうちのいずれかが 0 となる。

ステップ 2: 教官 p_1 の担当講義を c_2, c_4, c_5 とすると、各 $j, k_1, k_2 (k_1 \neq k_2)$ に対して、 $(\overline{x_{2,j,k_1}} + \overline{x_{4,j,k_2}} + \overline{x_{5,j,k_2}})(\overline{x_{2,j,k_1}} + \overline{x_{5,j,k_2}})(\overline{x_{4,j,k_1}} + \overline{x_{5,j,k_2}})(\overline{x_{2,j,k_1}} + \overline{x_{2,j,k_2}})(\overline{x_{4,j,k_1}} + \overline{x_{4,j,k_2}})(\overline{x_{5,j,k_1}} + \overline{x_{5,j,k_2}})$ という項を作る。これらの項は、教官 p_1 の担当講義 (同じ講義も含

む) が同じ時間に行なわれた時に 0 となる。

すべての教官に対して、これらの項を作る。

ステップ 3: 学生 s_1 が講義 c_1, c_3, c_5, c_8 を履修したいとする。この時、各 $i = 1, 3, 5, 8$ に対して、 $(x_{i,1,1} + x_{i,1,2} + \dots + x_{i,B,C})$ という項を作る。講義 c_i が行なわれなかつた時この項は 0 になる。全ての学生に対してこれらの項を作る。

ステップ 4: 学生 s_1 が講義 c_1, c_3, c_5, c_8 を履修したいとする。各 $j, k_1, k_2 (k_1 \neq k_2)$ に対して、 $(\overline{x_{1,j,k_1}} + \overline{x_{3,j,k_2}})(\overline{x_{1,j,k_1}} + \overline{x_{5,j,k_2}})(\overline{x_{1,j,k_1}} + \overline{x_{8,j,k_2}})(\overline{x_{3,j,k_1}} + \overline{x_{5,j,k_2}})(\overline{x_{3,j,k_1}} + \overline{x_{8,j,k_2}})(\overline{x_{5,j,k_1}} + \overline{x_{8,j,k_2}})$ という項を作る。2 つの講義が同じ時間に行なわれた時、対応する項が 0 となる。全ての学生に対して、これらの項を作る。

ステップ 5 ~ 7: 条件 (d) ~ (f) を満たすために同様の項を作る。

3.3 部分 MAXSAT

上述の変換により得られた CNF 論理式 f を解くことを考える。もし、充足解を得ることができれば、その解から要求を全て満たすような時間割を得ることができる。しかし、論理式 f のサイズがかなり大きいので、そのような充足解を求めることはほとんど不可能であると考えられる。また、 f 自身が充足不能である場合もありうる。したがって、充足解を求めるというよりは、最適に近い近似解、すなわち、できるだけ多くの項を充足するような解を求めることを考える必要性がある。このような最適化問題に対する解法アルゴリズムというのは、かなり精度の良いものが知られており [GW94]、このような既存のアルゴリズムを十分に利用できる可能性がある。しかし、上述の変換のままでは、多くの項を満たす解が、良い時間割に相当しているとは限らない。例えば、ステップ 1 で作られた項が 1 つ 0 になると、2 つの講義が同じ時間、同じ教室に割り当てられること

になる。つまり、どちらかの講義を行なえないことになる。ところが、ステップ4で作られた項が1つ0になると、ある学生の希望講義2つが同じ時間に行なわれることになり、その学生がどちらかの講義を受講できないだけである。1つの項が0になる割り当てでも、明らかに前者の方が質の悪い時間割である。すなわち、項の重要度というものを考える必要性がある。

従来の MAXSAT は、単に充足される項数を多くするような解を求める問題であり、全ての項は等価に扱われている。例えば、ステップ4の20項を0にするような割り当てよりも、ステップ1の項10項を0にする割り当ての方が良い解であると見なされる。しかし、前述したように、MAXSAT の良い解と良い時間割とが対応していないため、普通に MAXSAT アルゴリズムを使っていたのでは、後者のような悪い時間割を、良い解として出力してしまうことになる。我々の欲しい解というのは、重要な項を全て充足した上で、残りの項をできるだけ多く充足するような解である。そのため、このような条件に対応した問題である部分 MAXSAT が必要となる。

部分 MAXSAT の例題は同じ変数から成る2つの CNF 論理式 f_A 及び f_B である。部分 MAXSAT は f_A の項を全て満たした上で、 f_B の項をできるだけ充足する割り当てを求める問題である。すなわち、解としては、 f_A の項が全て満たされたものだけを考えることにする。また、コストは、 f_B の項のうち充足されたものの数とする。我々の変換で得られた論理式の場合は、 f_A をステップ1、2で作られた項、 f_B を残りの項とすることにより、最悪でもステップ1、2は満たしている割り当て、すなわち、少なくとも正しく機能する時間割が得られることになる。次節では部分 MAXSAT の NPO-PB 完全性を示すことにより、この問題が幅広い最適化問題を模倣できることを示す。

4 部分最適化問題の完全性

本節では、部分 MAXSAT、部分 MAX 独立頂点集合問題（部分 MAXIS）、部分 MAX クリーク問題が NPO-PB 完全であることを示す。部分 MAXSAT の例題は2つの CNF 論理式 f_A および f_B からなり、 f_A の項を全て充足させた上で f_B の項をできるだけ充足する割り当てを求める問題である。解のコストは f_B の項のうち充足された数である。部分 MAXIS の例題は、グラフ G とその部分グラフ G_A 、および整数 k からなり、グラフ G 中の最大独立頂点集合を見つける問題である。ただし、解は、 G_A 部分に少なくとも k 頂点からなる独立頂点集合を含んでいなければならない。コストは求めた独立頂点集合の頂点数から、そのうち G_A に属する頂点数を差し引いたものとする。部分 MAX クリーク問題の例題はグラフ G 、その部分グラフ G_A 、および整数 k であり、グラフ中の最大クリークを求める問題である。ただし、解は G_A 部分に k 頂点を含んでいないといけない。

定理1. 部分 MAXSAT は NPO-PB 完全である。

証明. 部分 MAXSAT が NPO-PB 問題であることは明らかである。任意の NPO-PB 問題を A とする。 A は NPO-PB であるので、 A を解く非決定性チューリング機械 $T(A)$ が存在する。また、ある多項式 p が存在し、 A の任意の例題 x および、 x の任意の解 y に対し $m(x, y) \leq p(|x|)$ が成り立つ。 $T(A)$ は解を書く出力テープ T_1 とコストを書く出力テープ T_2 を持ち、正しい解を推測した場合には、計算の一番最後に T_2 にその解のコストの数だけ1を書いて停止するものとする。また、解を導いた後のコストの計算は決定的動作をするものと仮定できる。

問題 A からの変換は、SAT の NP 完全性の証明 [GJ79] を改良したものである。問題 A の任意の例題 x が与えられた時、まず、[GJ79] と同様の方法で、 $T(A)$ の動作を模倣するように作られた論理式を F_1 とする。次に、新たな変数

$w_1, w_2, \dots, w_m$ を用意する. ステップ i に $T(A)$ がテープ T_2 に 1 を書くことに対応する変数割り当てを $w_i = 1$ と考える. $T(A)$ はある状態にあるテープ記号を読んでいる時に 1 を書く. そのような条件を満たす状態とテープ記号の組はただ 1 つであるとしても一般性を失わない. その組を (状態 a , 記号 b) とする. この時, 各 i に対して, 以下のような項を作る.

$$(Q_{i,a} + \overline{w_i})(H_{i,b} + \overline{w_i})(\overline{Q_{i,a}} + \overline{H_{i,b}} + w_i)$$

ただし, $Q_{i,a}$ はステップ i に $T(A)$ が状態 a であるときに, また $H_{i,b}$ は, ステップ i に $T(A)$ のヘッドが記号 b を読んでいる時にそれぞれ 1 となる変数で, 共に F_1 中に使われているものである. これらの項からなる論理式を F_2 とする. 最後に $F_3 = (w_1)(w_2) \cdots (w_m)$ とする.

部分 MAXSAT の例題は $f_A = F_1 \cdot F_2$, $f_B = F_3$ として得られる. 部分 MAXSAT の解は, f_A 項を全て満たしているので, $T(A)$ の受理計算に対応している. また, $T(A)$ の導いた解のコストは, 変数 $w_1, w_2, \dots, w_m$ のうち 1 になっている数であり, その数は F_3 のうち充足されている項の数であるため, 解どうしのコストは等しいことが分かる. また, 最終ステップの T_1 の記号列に対応する変数割り当てから $T(A)$ が導いた解を多項式時間で求めることもできる. 以上の議論より, 任意の NPO-PB 問題から部分 MAXSAT への PTAS 変換が存在し, 部分 MAXSAT が NPO-PB 完全であることが分かる. □

定理 2. 部分 MAXIS は NPO-PB 完全である.

証明. 部分 MAXIS が NPO-PB 問題であることは明らかである. [GJ79] の 3SAT から頂点被覆問題へ変換を応用し, 部分 MAXSAT から変換を行なう. $f = (f_A, f_B)$ を部分 MAXSAT の例題とする. f に使われている変数を $x_1, x_2, \dots, x_n$ とし, f_A の項数を m_A , f_B の項数を m_B とする. リテラルに対応する頂点を $2n$ 個用意し, x_i と $\overline{x_i}$ に対応する頂点を枝で結ぶ. これらの $2n$ 頂点の集

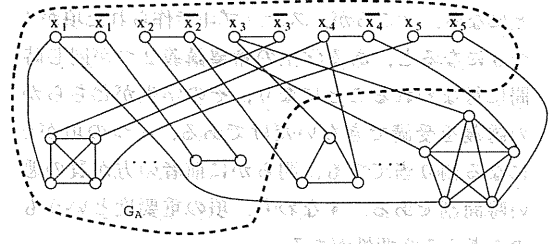


図 1: 部分 MAXSAT から部分 MAXIS への変換例

合を V_1 とする. 次に f の各項 C_j に対して, C_j のリテラル数を l_j とする. 項 C_j に対し, l_j 頂点からなる完全グラフを構成する. この完全グラフの各頂点を C_j 中のリテラルと対応づけ, リテラル z に対応付けられた頂点は V_1 中の z に対応するものと結ぶ. こうしてできたグラフを G とし, V_1 , 及び f_A に対応する項から作られた頂点からできる部分グラフを G_A とする. また, $k = n + m_A$ とする. 図 1 に, $f = (x_1 + \overline{x_3} + x_4 + x_5) \cdots (\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_2} + x_3 + x_4) \cdots (x_1 + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_5})$ で, $f_A = (x_1 + \overline{x_3} + x_4 + x_5) \cdots (\overline{x_1} + x_2)$, $f_B = (\overline{x_2} + x_3 + x_4) \cdots (x_1 + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_5})$ の場合のグラフを示す.

グラフ G の解が求まったとする. この解は, G_A 部分に $k = n + m_A$ 個の独立頂点を含んでいる. 選ばれた頂点のうち n 個は V_1 中のもので, 各 i に対し x_i または $\overline{x_i}$ のうちのどちらか 1 つであり, 残りの m_A 個は各項に対応する完全グラフの中から 1 個ずつ選ばれていることが, グラフの構成法より分かる. この解から, 論理式の変数割り当てを以下のように決める. V_1 中の, 変数 x_i に対応する 2 つの頂点のうち, x_i が選ばれていたら $x_i = 0$, $\overline{x_i}$ が選ばれていたら $x_i = 1$ とする. このとき, 各 j に対し, 項 C_j に対応するクリークの中から 1 頂点 (例えば $\overline{x_5}$) 選ばれているので, V_1 中の $\overline{x_5}$ は選ばれておらず, x_5 が選ばれている. したがって, $x_5 = 0$ という割り当てになっ

り, C_j は $\overline{x_5}$ によって充足されていることが分かる. したがって, この解から得られた変数割り当ては論理式 f の f_A 部分を充足していることが分かる.

上述と同様の議論により, $G - G_A$ の部分から選ばれている頂点数は f_B 中の充足される項数と一致しているため, 最適解のコストおよび解のコストは2つの例題で全く同じである. したがってこの変換は PTAS 変換である. $\square$

系 1. 部分 MAX クリーク問題は NPO-PB 完全である.

証明. 定理 2 で生成されるグラフの補グラフをとれば良い. $\square$

5 おわりに

本稿では, 部分最適化問題である部分 MAXSAT, 部分 MAXIS, 及び, 部分 MAX クリーク問題の NPO-PB 完全性を示した. 一般に, 各組合せ最適化問題に対して, 対応する部分最適化問題を考えることができ, それらは部分 MAXSAT 等と同様に近似の難しい問題に見える. 今後は, その他の部分最適化問題の完全性等についても議論を行いたい.

参考文献

- [ACP95] G. Ausiello, P. Crescenzi and M. Proietti, "Approximate solution of NP optimization problems," *Theoretical Computer Science*, 150, pp. 1-55, 1995.
- [CIKM97] B. Cha, K. Iwama, Y. Kambayashi and S. Miyazaki, "Local search algorithms for Partial MAXSAT," *Proc. AAAI97*, to appear.
- [CKST95] P. Crescenzi, V. Kann, R. Silvestri and L. Trevisan, "Structure in approximation classes," *Proc. First Annual International Conference, COCOON'95*, Lecture Notes in Computer Science, 959, pp. 539-548, 1995.
- [CP91] P. Crescenzi and A. Panconesi, "Completeness in approximation classes," *Information and Computation*, 93, pp. 241-262, 1991.
- [CT94] P. Crescenzi and L. Trevisan, "On approximation scheme preserving reducibility and its applications," *Proc. 14th EPTCS*, LNCS 880, pp. 330-341, 1994.
- [CI96] B. Cha and K. Iwama, "Adding new clauses for faster local search," *Proc. AAAI96 Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence*, 1996.
- [Iwa89] K. Iwama, "CNF satisfiability test by counting and polynomial average time," *SIAM J. Comput.*, pp. 385-391, 1989.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and intractability*, Freeman, Oxford, England, 1979.
- [GW94] M. X. Goemans and D. P. Williamson, ".878-approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT," *Proc. STOC*, pp. 422-431, 1994.
- [PY91] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, "Optimization, approximation, and complexity classes," *J. Comput. and System Sci.*, 43, pp. 425-440, 1991.