

Hankel Pfaffian と Selberg 積分*

Masao ISHIKAWA†

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 05A30
Secondary 05A15, 15A15, 33D45.

Keywords : Hankel determinants, Pfaffian decomposition, Pfaffian of Catalan numbers, moments of orthogonal polynomials.

概要

ここでは, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants”, arxiv:1011.5941 の中で証明した q -Catalan Hankel Pfaffian を de Bruijn の公式と Askey の q -Selberg 積分公式を使った別証明を与える. また, 同じ手法を用いることにより, 上記論文の中で述べた予想の一部に証明も与える. これは, 昨年 10 月の坂本玲峰氏による『組合せ論的表現論の拡がり』(数理解析講究録 No.1795) の“A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals”の続報である.

1 Introduction

この記事は, [10] の続編である. [10] で述べた証明のより詳しいバージョンと [10] の中では証明できなかった予想の証明を与える.

パフィアンは, 普通パーフェクトマッチングによって定義される. ここでは, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n}$ が歪対称行列であるとき, すなわち $a_{ji} = -a_{ij}$ が成り立つとき,

$$\text{Pf } A = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \text{sgn } \sigma a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

を定義として採用する. ここで,

$$\mathfrak{S}_{2n} := \left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid \sigma(2i-1) < \sigma(2i) \quad (1 \leq i \leq n) \right\}.$$

*これは Université Claude Bernard Lyon 1 の Jiang ZENG 氏との共同研究である.

†琉球大学教育学部 ishikawa@edu.u-ryukyu.ac.jp

である. 例えば $\mathfrak{S}_4$ は次の 6 個の置換

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3, 4), & (1, 3, 2, 4), & (1, 4, 2, 3), \\ (2, 3, 1, 4), & (2, 4, 1, 3), & (2, 3, 1, 4). \end{array}$$

からなり,

$$\text{Pf}(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

である.

Hyperpfaffian は, パフィアンほど知られていないが, パフィアンの概念の拡張であって, Barvinok によって最初に定義された. ここでは [21] の定義を採用する.

定義 1.1. m, n を正整数とし, 配列 $B = (B(i_1, \dots, i_{2m}))_{1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2n}$ が, 任意の $(\tau_1, \dots, \tau_m) \in (\mathfrak{S}_2)^m$ に対して

$$B(i_{\tau_1(1)}, i_{\tau_1(2)}, \dots, i_{\tau_m(2m-1)}, i_{\tau_m(2m)}) = \text{sgn}(\tau_1) \cdots \text{sgn}(\tau_m) B(i_1, \dots, i_{2m})$$

をみたすとする. このとき B の hyperpfaffian は

$$\begin{aligned} \text{Pf}^{[2m]}(B) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathfrak{S}_{2n}} \text{sgn}(\sigma_1 \cdots \sigma_m) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n B(\sigma_1(2i-1), \sigma_1(2i), \dots, \sigma_m(2i-1), \sigma_m(2i)). \end{aligned}$$

によって定義される.

この記事では, q -series に関する以下の標準的な記法を使う (see [4, 7]): 任意の整数 n に対して

$$(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (a; q)_n = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty}.$$

ここで $(a; q)_n$ は q -shifted factorial といわれる. また, 以下の省略記法も用いる:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_r; q)_\infty &= (a_1; q)_\infty (a_2; q)_\infty \cdots (a_r; q)_\infty, \\ (a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n &= (a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_r; q)_n. \end{aligned}$$

q -超幾何級数 ${}_{r+1}\phi_r$ は

$${}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b_1, \dots, b_r \end{matrix}; q, z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; q)_n}{(q, b_1, \dots, b_r; q)_n} z^n.$$

によって定義される.

2 Pfaffian の和公式

$A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ を半無限または有限の行列とする. $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ を行の添字集合, $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ を列の添字集合とすると, 添字集合 (I, J) に対応する行・列を A から選んで作られる $r \times r$ 部分行列を $A_J^I = A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$ と書く. また, 正整数 n に対して $[n] = \{1, \dots, n\}$ という記号を使う. 例えば $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ に対して

$$A_{2,3,5}^{1,2,4} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

である. また, 歪対称行列 A に対して, A_J^I を省略して A_I と書く. ここで, パフィアンの和公式を紹介する. このパフィアンの和公式は, のちに de Bruijn の定理を証明するのに使う.

定理 2.1. ([15, 16]) n と N を $2n \leq N$ である正整数とする. $H = (h_{i,j})_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq N}$ を任意の $2n \times N$ 行列とし, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ を N 次の歪対称行列とする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{I \subseteq [N] \\ \#I=2n}} \text{Pf}(A_I) \det(H_I^{[2n]}) = \text{Pf}(Q), \quad (2.1)$$

ここで, 歪対称行列 Q は $Q = (Q_{i,j}) = HAH^T$ によって定義され, その (i,j) 成分は

$$Q_{i,j} = \sum_{1 \leq k < l \leq N} a_{k,l} \det(H_{k,l}^{i,j}), \quad (1 \leq i, j \leq 2n) \quad (2.2)$$

によって与えられる.

パフィアンの和公式の拡張として次の結果が [21] の中で得られている.

定理 2.2. ([21]) m, n, N を $2n \leq N$ をみたす正整数とする. 正整数 s ($1 \leq s \leq m$) に対して, $H(s) = (h_{ij}(s))_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq N}$ を $2n \times N$ 矩形行列とする. また $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ を N 次の歪対称行列とする. このとき

$$\sum_{\substack{I \subseteq [N] \\ \#I=2n}} \text{Pf}(A_I) \prod_{s=1}^m \det(H(s)_I^{[2n]}) = \text{Pf}^{[2m]}(Q),$$

が成り立つ. ここで, 配列 $Q = (Q_{i_1, \dots, i_{2m}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2n}$ は

$$Q_{i_1, \dots, i_{2m}} = \sum_{1 \leq k < l \leq N} a_{k,l} \prod_{s=1}^m \det(H(s)_{k,l}^{i_{2s-1}, i_{2s}}),$$

によって定義される.

次の命題は、実際にパフィアンを計算するときに便利なので、ここに引用しておく [15, 16].

命題 2.3. $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ を任意の数列とし n を正整数とする. $B = (b_{i,j})_{i,j \geq 1}$ を次によって成分が定義される歪対称行列とする.

$$b_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } j = i + 1 \text{ for } i \geq 1, \\ -\alpha_j & \text{if } i = j + 1 \text{ for } j \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.3)$$

$I = (i_1, \dots, i_{2n})$ を $1 \leq i_1 < \dots < i_{2n}$ を満たす添字集合とするとき,

$$\text{Pf}(B_I) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n \alpha_{i_{2k-1}} & \text{if } i_{2k} = i_{2k-1} + 1 \text{ for } k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.4)$$

が成り立つ.

3 De Bruijn の公式と Hankel Pfaffians

0 から a までの q -Jackson 積分は

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n.$$

によって定義され, この和は $|q| < 1$ のとき絶対収束する. また, 区間 $[a, b]$ における一般の q -Jackson 積分は

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x.$$

によって定義される. ω を重み関数 $w(x)$ によって定義される閉区間 $[a, b]$ 上の任意の測度とする, すなわち, $\omega(d_q x) = w(x) d_q x$. この測度 ω のモーメントは

$$\mu_n(q) = \int_a^b x^n \omega(d_q x).$$

によって定義される. また, この測度 ω に関する直交多項式 $p_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) とは次の 2 つの条件をみたすものである.

(i) $\deg p_n(x) = n,$

(ii) 任意の $m, n \geq 0$ に対して $\int_a^b p_m(x) p_n(x) \omega(d_q x) = K_n \delta_{m,n}.$

ここで $K_n > 0$ は定数である.

次の命題が de Bruijn の公式と呼ばれる:

命題 3.1. n を正の整数とし, $1 \leq i \leq 2n$ に対して $\phi_i(x)$ と $\psi_i(x)$ を閉区間 $[0, a]$ 上の連続関数とする. このとき

$$\int \cdots \int_{0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq a} \det(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j)) d_q \mu(x_1) \cdots d_q \mu(x_n) = \text{Pf}(Q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n}, \quad (3.1)$$

が成り立つ. ここで

$$Q_{i,j} = \int_0^a \{\phi_i(x)\psi_j(x) - \phi_j(x)\psi_i(x)\} d_q \mu(x) \quad (3.2)$$

であり, $(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j))$ は第 i 行 ($1 \leq i \leq 2n$) が

$$(\phi_i(x_1), \psi_i(x_1), \dots, \phi_i(x_n), \psi_i(x_n))$$

で与えられる $2n \times 2n$ 行列である.

命題 3.1 は次に述べる命題 3.2 の特別な場合なので, 証明はそちらで述べる.

命題 3.2. m と n を正整数とし, $1 \leq i \leq 2n$, $1 \leq s \leq m$ の範囲の i, s に対して $\phi_{s,i}(x)$ と $\psi_{s,i}(x)$ を区間 $[0, a]$ 上の関数とする. このとき

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b} \prod_{s=1}^m \det(\phi_{s,i}(x_j) | \psi_{s,i}(x_j)) \omega(d_q \mathbf{x}) \\ &= \text{Pf}^{[2m]}(Q_{i_1, \dots, i_{2m}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2n}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

が成り立つ. ここで, $1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2n$ に対して

$$Q_{i_1, \dots, i_{2m}} = \int_0^a \prod_{s=1}^m \{\phi_{s, i_{2s-1}}(x) \psi_{s, i_{2s}}(x) - \phi_{s, i_{2s}}(x) \psi_{s, i_{2s-1}}(x)\} \omega(d_q x) \quad (3.4)$$

である.

証明. N を $N \geq n$ を満たす正整数とし, $2N \times 2N$ 歪対称行列 $A = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 2N}$ を

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ is odd and } j = i + 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

のように取る. このとき, $[2N]$ の任意の $2n$ -元部分集合 I に対して, 命題 2.3 から,

$$\text{Pf}(A_I) = \begin{cases} 1 & \text{if } I = \{2k_1 - 1, 2k_1, \dots, 2k_n - 1, 2k_n\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる. また $H(s) = (h_{i,j}(s))_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2n}$ を任意の $2n \times 2n$ 行列とし,

$$Q_{i_1, \dots, i_{2m}} = \sum_{k=1}^N \prod_{s=1}^m \begin{vmatrix} h_{i_{2s-1}, 2k-1}(s) & h_{i_{2s-1}, 2k}(s) \\ h_{i_{2s}, 2k-1}(s) & h_{i_{2s}, 2k}(s) \end{vmatrix}$$

とおくと, 定理 2.2 より

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N} \prod_{s=1}^m \det H(s)_{2k_1-1, 2k_1, \dots, 2k_n-1, 2k_n}^{1, 2, \dots, 2n-1, 2n} = \text{Pf}^{[2m]}(Q_{i_1, \dots, i_{2m}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2n}$$

となる. この式で $N \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n} \prod_{s=1}^m \det H(s)_{2k_1-1, 2k_1, \dots, 2k_n-1, 2k_n}^{1, 2, \dots, 2n-1, 2n} \\ = \text{Pf}^{[2m]} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} Q_{i_1, \dots, i_{2m}} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2n} \end{aligned} \quad (3.5)$$

が得られる. (3.5) 式において

$$h_{i, 2k-1}(s) = \begin{cases} (1-q)a\phi_{s,i}(aq^{k-1})w(aq^{k-1})q^{k-1} & \text{if } s=1, \\ \phi_{s,i}(aq^{k-1}) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

かつ $h_{i, 2k}(s) = \psi_{s,i}(aq^{k-1})$ とおくと

$$\begin{aligned} (1-q)^n a^n \sum_{0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n} \prod_{s=1}^m \det (\phi_{s,i}(q^{k_j}) | \psi_{s,i}(q^{k_j})) \prod_{\nu=1}^n w(q^{k_\nu}) q^{k_\nu} \\ = \text{Pf}(Q'_{i_1, \dots, i_{2m}})_{1 \leq i < j \leq 2n}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

が得られる. ここで

$$Q'_{i_1, \dots, i_{2m}} = (1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{s=1}^m \begin{vmatrix} \phi_{s, i_{2s-1}}(aq^k) & \psi_{s, i_{2s-1}}(aq^k) \\ \phi_{s, i_{2s}}(aq^k) & \psi_{s, i_{2s}}(aq^k) \end{vmatrix} w(aq^k) q^k \quad (3.7)$$

これで望む式が証明された. $\square$

系 3.3. $\omega(d_q x) = w(x)d_q x$ を区間 $[0, a]$ 上の測度とし, $\mu_i = \int_0^a x^i \omega(d_q x)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \mu_{i+j+r-2} \right)_{1 \leq i < j \leq 2n} \\ = \frac{q^{\binom{n}{2}} (1-q)^n}{n!} \int_{[0, a]^n} \prod_i x_i^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \prod_{i < j} (qx_i - x_j)(x_i - qx_j) \omega(d_q x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

が成り立つ.

証明. (3.2) 式において $\varphi_i(x) = q^{i-1}x^{i-1}$ かつ $\psi_i(x) = x^{i+r-1}$ とおくと,

$$Q_{i,j} = (q^{i-1} - q^{j-1}) \int_0^1 x^{i+j+r-2} \omega(d_q x) = (q^{i-1} - q^{j-1}) \mu_{i+j+r-2}.$$

を得る. 一方, (3.1) 式に同様の代入を行うと

$$\begin{aligned} \det(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j))_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n} &= \det(q^{i-1}x_j^{i-1} | x_j^{i-1})_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n} \\ &= q^{\binom{n}{2}} (1-q)^n (x_1 \dots x_n)^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \prod_{i < j} (qx_i - x_j)(x_i - qx_j) \end{aligned}$$

を得る. ここで, 最後の等号を示すにはヴァンデルモンド行列式 $\det(a_j^{i-1}) = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$ を使う. したがって

$$\begin{aligned} &\text{Pf}\left((q^{i-1} - q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}\right)_{1 \leq i < j \leq 2n} \\ &= q^{\binom{n}{2}} (1-q)^n \int \dots \int_{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq a} \prod_i x_i^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \\ &\quad \times \prod_{i < j} (qx_i - x_j)(x_i - qx_j) \omega(d_q \mathbf{x}). \end{aligned}$$

が証明された. 示したい式は, この式の簡単な帰結である. $\square$

系 3.3 において $q \rightarrow 1$ とすると, 次の系をえる.

系 3.4. $\psi(dx) = \psi'(x)dx$ を閉区間 $[0, a]$ 上の測度とする, また $\mu_i = \int_0^a x^i \psi(dx)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\text{Pf}\left((j-i)\mu_{i+j+r-2}\right)_{1 \leq i < j \leq 2n} = \frac{1}{n!} \int_{[0,a]^n} \prod_i x_i^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 \psi(d\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

が成り立つ.

系 3.3 の証明と同様に命題 3.2 において, $\phi_{s,i}(x) = ix^{i-1}$, $\psi_{s,i}(x) = x^{i+r_s-1}$ という代入を行うと, 次の系をえる.

系 3.5. $\psi(dx) = \psi'(x)dx$ を閉区間 $[0, a]$ 上の測度とする, また $\mu_i = \int_0^a x^i \psi(dx)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\begin{aligned} &\text{Pf}^{[2m]}\left(\prod_{s=1}^m (i_{2s} - i_{2s-1}) \cdot \mu_{i_1 + \dots + i_{2m} + r}\right)_{0 \leq i < j \leq 2n-1} \\ &= \frac{1}{n!} \int_{[a,b]^n} \prod_i x_i^{r+m} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{4m} \psi(d\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

が成り立つ.

4 Selberg-Askey 積分公式

この節では, 次の [13, Theorem 3.1] 中の主定理の別証明の概要を述べる.

定理 4.1. 正整数 n と整数 $r \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \\ &= a^{n(n-1)} q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r} \prod_{k=1}^{n-1} (bq; q)_{2k} \prod_{k=1}^n \frac{(q; q)_{2k-1} (aq; q)_{2k+r-1}}{(abq^2; q)_{2(k+n)+r-3}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

が成り立つ.

ここでは, 積分区間を $[0, 1]$ とし, 測度を

$$\int_0^1 f(x) \omega(d_q x) = \frac{(aq; q)_\infty}{(abq^2; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bq; q)_k}{(q; q)_k} (aq)^k f(q^k) \quad (4.2)$$

によって定義する. すなわち $a = q^\alpha$ とおくと重み関数を,

$$w(x) = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{(aq, bq; q)_\infty}{(abq^2, q; q)_\infty} \cdot \frac{(qx; q)_\infty}{(bqx; q)_\infty} x^{\alpha+1},$$

によって与えるのと同様である. q -二項定理により, 第 n モーメントは

$$\mu_n = \int_0^1 x^n \omega(d_q x) = \frac{(aq; q)_n}{(abq^2; q)_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

となる. ここでは使わないが, この測度に関する直交多項式として Little q -Jacobi 多項式 [7, 19]

$$p_n(x; a, b; q) = \frac{(aq; q)_n}{(abq^{n+1}; q)_n} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq \end{matrix}; q, xq \right] \quad (4.4)$$

が知られている. q -ガンマ関数は

$$\Gamma_q(a) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^a; q)_\infty} (1-q)^{1-a}$$

によって定義される $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ 上の関数である. まず (3.8) 式より

$$\begin{aligned} & \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i < j \leq 2n} \\ &= C \int_{[0,1]^n} \prod_{i < j} \prod_{l=0}^1 (x_i - q^l x_j) (x_i - q^{-l} x_j) \prod_i x_i^{\alpha+r+1} \frac{(qx_i; q)_\infty}{(bqx_i; q)_\infty} d_q x \end{aligned}$$

をえる. ここで $C = \frac{q^{n(n-1)}}{n!} \left\{ \frac{(aq, bq; q)_\infty}{(abq^2, q; q)_\infty} \right\}^n$ とする.

Askey [1] は, 次のような Selberg 積分公式の q -アナログを予想し [1, Conjecture 1], Habsieger [8, 9] と Kadell [18, Theorem 2; $l = m = 0$] によって, 独立に証明された,

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{i < j} t_i^{2k} (q^{1-k} t_j / t_i; q)_{2k} \prod_{i=1}^n t_i^{x-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t = q^{kx \binom{n}{2} + 2k^2 \binom{n}{3}} S_n(x, y; q). \quad (4.5)$$

ここで

$$S_n(x, y; q) = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma_q(x + (j-1)k) \Gamma_q(y + (j-1)k) \Gamma_q(jk+1)}{\Gamma_q(x+y+(n+j-2)k) \Gamma_q(k+1)} \quad (4.6)$$

である. 現在では, この式は Askey-Habsieger-Kadell の公式として知られる. ここでは, (4.5) を仮定すると, 次の (4.7) 式が示されることを示す.

定理 4.2. ([8]) (4.5) から次の (4.7) 式が示せる.

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} \prod_{i < j} \prod_{l=0}^{k-1} (t_j - q^l t_i) (t_j - q^{-l} t_i) \prod_i t_i^{x-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t \\ &= n! q^{kx \binom{n}{2} + 2k^2 \binom{n}{3}} \frac{S_n(x, y; q)}{\Gamma_{q^k}(n+1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

証明. まず

$$\begin{aligned} \Delta_k^0(t) &= \prod_{i < j} \left(\frac{t_i}{t_j}; q \right)_k \left(\frac{qt_j}{t_i}; q \right)_k \\ \Delta_k(t) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta_k^0(\sigma t) \\ \Delta_k^1(t) &= \prod_{i < j} \prod_{l=0}^{k-1} (t_j - q^l t_i) (t_j - q^{-l} t_i) \end{aligned}$$

とおく. (4.5) 式の被積分関数の中で

$$t_i^{2k} (q^{1-k} t_j / t_i; q)_{2k} = (-1)^k (t_i t_j)^k q^{-\binom{k}{2}} (t_i / t_j; q)_k (qt_j / t_i; q)_k.$$

を使うと

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i < j} t_i^{2k} (q^{1-k} t_j / t_i; q)_{2k} \prod_{i=1}^n t_i^{x-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t \\
 &= (-1)^k \binom{n}{2}_q q^{-\binom{k}{2} \binom{n}{2}} \int_{[0,1]^n} \Delta_k^0(t) \prod_i t_i^{x+k(n-1)-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t \\
 &= \frac{(-1)^k \binom{n}{2}_q q^{-\binom{k}{2} \binom{n}{2}}}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{[0,1]^n} \Delta_k(\sigma t) \prod_i t_{\sigma(i)}^{x+k(n-1)-1} \frac{(t_{\sigma(i)} q; q)_\infty}{(t_{\sigma(i)} q^y; q)_\infty} d_q t \\
 &= \frac{(-1)^k \binom{n}{2}_q q^{-\binom{k}{2} \binom{n}{2}}}{n!} \int_{[0,1]^n} \Delta_k(t) \prod_i t_i^{x+k(n-1)-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t
 \end{aligned}$$

ここで [8, (2.8)] 式

$$\Delta_k(t) = \frac{\Gamma_{q^k}(n+1)}{n!} \prod_{i \neq j} \left(\frac{t_i}{t_j}; q \right)_k \quad (4.8)$$

を使うと

$$\Delta_k(t) = (-1)^k \binom{n}{2}_q q^{\binom{k}{2} \binom{n}{2}} \frac{\Gamma_{q^k}(n+1)}{n!} \prod_{i=1}^n t_i^{-k(n-1)} \cdot \Delta_k^1(t) \quad (4.9)$$

だから

$$I = \frac{\Gamma_{q^k}(n+1)}{n!} \int_{[0,1]^n} \Delta_k^1(t) \prod_{i=1}^n t_i^{x-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t$$

をえる。したがって (4.5) 式より

$$\int_{[0,1]^n} \Delta_k^1(t) \prod_{i=1}^n t_i^{x-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t = n! q^{kx \binom{n}{2} + 2k^2 \binom{n}{3}} \frac{S_n(x, y; q)}{\Gamma_{q^k}(n+1)}$$

が示された。 □

よって,

$$\frac{S_n(x, y; q)}{\Gamma_{q^k}(n+1)} = \frac{(1-q)^n}{(q; q)_{k-1}^n} \prod_{j=1}^n \frac{(q^{x+y+(n+j-2)k}, q; q)_\infty (q; q)_{jk-1}}{(q^{x+(j-1)k}, q^{y+(j-1)k}; q)_\infty}.$$

と (4.7) 式を使うと (4.1) 式が示される。

5 Al-Salam and Carlitz I, II

ここでは次の記号を使う.

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(x; q)_{\infty}},$$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n}{(q; q)_n} = (-x; q)_{\infty}.$$

Al-Salam と Carlitz [3, 6] は, 直交多項式 $\{U_n^{(a)}(y; q)\}$ ($a < 0$) と $\{V_n^{(a)}(x; q)\}$ を, 次のように定義した:

$$\rho_a(x; q) e_q(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(a)}(y; q) \frac{x^n}{(q; q)_n},$$

$$\frac{1}{\rho_a(x; q)} E_q(-xy) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(a)}(y; q) \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n}{(q; q)_n}$$

ここで

$$\rho_a(x; q) = (x; q)_{\infty} (ax; q)_{\infty} = E_q(-x) E_q(-ax).$$

とする. $\{U_n^{(a)}(y; q)\}$ は Al-Salam and Carlitz I 多項式, $\{V_n^{(a)}(x; q)\}$ は Al-Salam and Carlitz II 多項式といわれる. これら多項式の直交性 [3, 6] は

$$\int_a^1 U_m^{(a)}(x; q) U_n^{(a)}(x; q) w_U^{(a)}(x; q) d_q x = (1-q)(-a)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q; q)_n \delta_{m,n}, \quad (5.1)$$

$$\int_1^{\infty} V_m^{(a)}(x; q) V_n^{(a)}(x; q) w_V^{(a)}(x; q) d_q x = (1-q) a^n q^{-n^2} (q; q)_n \delta_{m,n} \quad (5.2)$$

で与えられる. ここで, 重み関数は

$$w_U^{(a)}(x; q) = \frac{(qx; q)_{\infty} \left(\frac{qx}{a}; q\right)_{\infty}}{(q; q)_{\infty} (aq; q)_{\infty} \left(\frac{q}{a}; q\right)_{\infty}}$$

$$w_V^{(a)}(x; q) = \frac{(q; q)_{\infty} (aq; q)_{\infty} \left(\frac{q}{a}; q\right)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}' \left(\frac{x}{a}; q\right)_{\infty}}$$

とする. ダッシュ付記号 $(x; q)_{\infty}'$ は, 0 となる成分を除外することを意味する. また Jackson 積分は

$$\int_a^1 f(x) d_q x = (1-q) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n - a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n \right\}$$

$$\int_1^{\infty} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^{-n}) q^{-n}$$

であることに注意しよう. この測度関数のモーメントは, それぞれ

$$\begin{aligned} \int_a^1 x^n w_U^{(a)}(x; q) d_q x &= (1 - q) F_n^{(a)}(a; q), \\ \int_1^\infty x^n w_V^{(a)}(x; q) d_q x &= (1 - q) G_n^{(a)}(a; q) \end{aligned}$$

で与えられる. ここで

$$F_n^{(a)}(a; q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a^k, \quad G_n^{(a)}(a; q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a^{k(k-n)},$$

また $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$ とする. この節では, 次の定理を証明する. 次の (5.3) 式 (5.3) 式は [13, Konjecture 6.1] の中で予想として述べられている. しかし [13, Konjecture 6.1] で述べた予想の q の指数は間違っている.

定理 5.1. $F_n(a; q)$ と $G_n(a; q)$ を上のようにする. このとき

$$\text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) F_{i+j-3}(a; q) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = a^{n(n-1)} q^{\frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)} \prod_{k=1}^n (q; q)_{2k-1}, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} &\text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) F_{i+j-2}(a; q) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \\ &= a^{n(n-1)} q^{\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)} \prod_{k=1}^n (q; q)_{2k-1} \sum_{k=0}^n q^{(n-k)(n-k-1)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} a^k. \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) G_{i+j-3}(a; q) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = a^{n(n-1)} q^{-n(n-1)(4n-5)/3} \prod_{k=1}^n (q; q)_{2k-1}, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} &\text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) G_{i+j-2}(a; q) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \\ &= a^{n(n-1)} q^{-\frac{2}{3}n(n-1)(2n-1)} \prod_{k=1}^n (q; q)_{2k-1} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} a^k. \end{aligned} \quad (5.6)$$

が成り立つ.

この節では、この定理を証明する。このために (3.8) より得られる

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) F_{i+j+r-2}^{(a)}(a; q) \right)_{1 \leq i < j \leq 2n} &= \frac{1}{n!} q^{n(n-1)} (1-q)^n \\ &\times \int_{[a,1]^n} \prod_{i < j} \prod_{l=0}^1 (x_i - q^l x_j)(x_i - q^{-l} x_j) \prod_{i=1}^n x_i^{r+1} w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) G_{i+j+r-2}^{(a)}(a; q) \right)_{1 \leq i < j \leq 2n} &= \frac{1}{n!} q^{n(n-1)} (1-q)^n \\ &\times \int_{[1,\infty)^n} \prod_{i < j} \prod_{l=0}^1 (x_i - q^l x_j)(x_i - q^{-l} x_j) \prod_{i=1}^n x_i^{r+1} w_V^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

という式を $r = -1, 0$ の場合に使う。

τ_i を i 番目の変数に対する q -shift operator とする。すなわち

$$\tau_i f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, qx_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

とし、 n 変数の対称関数に対する Macdonald operator M_1 を

$$M_1 := \sum_{i=1}^n A_i(t) \tau_i, \quad A_i(t) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j},$$

によって定義する。また

$$E_k := \sum_{i=1}^n x^k A_i(t) \frac{\partial}{\partial_q x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial_q x_i} := \frac{1 - \tau_i}{(1-q)x_i}$$

とおく。また M_1 において q と t を q^{-1} と t^{-1} に置き換えた operator を $\widetilde{M}_1$ と書く。 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を変数とする対称関数 $U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$ を次のように定義する:

$$\mathcal{H} U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) = \widetilde{e}(\lambda) U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$$

ここで $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \widetilde{M}_1 - (1+a)[E_0, \widetilde{M}_1] + a[E_0, [E_0, \widetilde{M}_1]],$$

によって定義される線形作用素で、 $\widetilde{e}(\lambda) = \sum_{i=1}^n q^{-\lambda_i} t^{-n+i}$ とする。また、対称関数 $V_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$ を

$$V_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) = U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q^{-1}, t^{-1})$$

によって定義する. このとき Baker と Forrester [5] は

$$\begin{aligned} & \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \\ &= (1-q)^n (-a)^{\frac{kn(n-1)}{2}} q^{k^2 \binom{n}{3} - \frac{k(k-1)}{2} \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{(q; q)_{ki}}{(q; q)_k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{[1,\infty]^n} \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_V^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \\ &= (1-q)^n a^{\frac{kn(n-1)}{2}} q^{-2k^2 \binom{n}{3} - k^2 \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{(q; q)_{ki}}{(q; q)_k} \end{aligned} \quad (5.10)$$

という式を証明した. ここで

$$\Delta_k^2(\mathbf{x}) = \prod_{i < j} \prod_{l=-k+1}^k (x_i - q^l x_j)$$

とする. また, $\lambda \neq \mu$ のとき

$$\int_{[a,1]^n} U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) U_\mu^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} = 0 \quad (5.11)$$

$$\int_{[1,\infty]^n} V_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) V_\mu^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_V^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} = 0 \quad (5.12)$$

という直交性もこの論文の中で示されている. ここでは, まず (5.7) 式と (5.9) 式を使って (5.3) 式を, また (5.8) 式と (5.10) 式を使って (5.5) 式を証明する. まず (4.9) 式を使うと (5.7) 式の右辺の積分は

$$\begin{aligned} & \int_{[a,1]^n} \Delta_k^1(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n x_i^{r+1} w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \\ &= \frac{(-1)^{k \binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2} \binom{n}{2}} n!}{\Gamma_{q^k}(n+1)} \int_{[a,1]^n} \Delta_k(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n x_i^{k(n-1)+r+1} w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \\ &= \frac{(-1)^{k \binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2} \binom{n}{2}} n!}{\Gamma_{q^k}(n+1)} \int_{[a,1]^n} \Delta_k^0(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n x_i^{k(n-1)+r+1} w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \end{aligned}$$

ここで

$$\Delta_k^2(\mathbf{x}) = (-1)^{k \binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2} \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n x_i^{k(n-1)} \cdot \Delta_k^0(\mathbf{x})$$

を使うと

$$= \frac{n!}{\Gamma_{q^k}(n+1)} \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n x_i^{r+1} w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x}$$

$r = -1$ のとき (5.9) 式より (5.3) が示される. このとき $k = 2$ を使う. 同様にして, ほぼ平行した議論により (5.5) が示される. 最後に (5.4) と (5.6) を示すには $r = 0$ のときの (5.7) 式と (5.8) 式において $\prod_{i=1}^n x_i = e_n(\mathbf{x})$ を対称関数 $U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$ または $V_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$ で展開して, 直交性 (5.11) または (5.12) を使う. ここで

$$\sum_{r \geq 0} e_r(\mathbf{x}) z^r = \prod_{i=1}^n (1 + x_i z)$$

で定義される $e_r(\mathbf{x})$ を r 次の基本対称式という. ここでは, 結果だけ述べると, 基本対称式は

$$e_r(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^r \tilde{f}_{r-i}(a) \begin{bmatrix} n-i \\ r-i \end{bmatrix}_t U_{(1^i)}^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$$

によって対称式 $U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$ に展開される. ここで $\tilde{f}_i(a)$ は初期条件 $\tilde{f}_0(a) = 1$, $\tilde{f}_1(a) = 1 + a$ と漸化式

$$\tilde{f}_i(a) = (1+a)t^{i-1}\tilde{f}_{i-1}(a) + at^{i-2}(1-t^{i-1})\tilde{f}_{i-2}(a)$$

で定義される. この漸化式から

$$\tilde{f}_i(a) = \sum_{j=0}^i \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_t t^{\frac{j(j-1)}{2} + \frac{(i-j)(i-j-1)}{2}} a^j$$

となる. ここで $U_\emptyset^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) = 1$ であることに注意すると, 直交性 (5.11) より

$$\begin{aligned} & \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n x_i w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \\ &= \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\mathbf{x}) e_n(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \\ &= \sum_{i=0}^n \tilde{f}_{n-i}(a) \int_{[a,1]^n} U_{(1^i)}^{(a)}(\mathbf{x}; q, t) \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x} \end{aligned}$$

$t = q^k$ のとき

$$= \tilde{f}_n(a) \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i; q) d_q \mathbf{x}$$

これに (5.7) 式を代入して計算すると (5.4) をえる. 同様にして (5.6) も計算できる. 最後に, このことからわかるのは, 一般の r に対して, この形のパフィアンを計算するには, 矩形 $n \times (r+1)$ の shape に対応する基本対称式 $e_n(x_1, \dots, x_n)^r$ の $U_\lambda^{(a)}(\mathbf{x}; q, t)$ による展開を知る必要がある.

参考文献

- [1] R. Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, *SIAM J. Math. Anal.*, t. 11, 1980, p. 203–951.
- [2] N. G. de Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, *J. Indian Math. Soc.*, **19** (1955), 133–151.
- [3] W. Al-Salam and L. Carlitz, “Some orthogonal q -polynomials”, *Math. Nachr.*, **30** (1965), 47–61.
- [4] G. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, (1999).
- [5] T. H. Baker and P. J. Forrester, “Multivariable Al-Salam & Carlitz polynomials associated with the type A q -Dunkl kernel”, *Math. Nachr.* **212** (2000), 5–35.
- [6] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [7] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).
- [8] L. Habsieger, Une q -intégrale de Selberg-Askey, *Publ. I.R.M.A. Strasboug* **334** (1987), 25 – 45.
- [9] L. Habsieger, Une q -intégrale de Selberg et Askey, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988), no. 6, 1475 – 1489
- [10] M. Ishikawa and J. Zeng, “A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals”, *数理研講究録* No.1795 (2012), 189 – 203.
- [11] M. Ishikawa and C. Koutschan, “Zeilberger’s Holonomic Ansatz for Pfaffians”, *arxiv:1011.5941*.
- [12] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “A q -analogue of Catalan Hankel determinants”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19–42.
- [13] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants”, *arxiv:1011.5941*.

- [14] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A generalization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials ", [arxiv:1210.5305](#).
- [15] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Minor summation formula of Pfaffians", *Linear and Multilinear Alg.* **39** (1995), 285-305
- [16] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Applications of minor summation formula, III: Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities", *J. Combin. Theory Ser. A.*, **113** (2006), 113-155.
- [17] M. Ishikawa and J. Zeng, " q -Selberg integrals and q -Catalan Hankel Pfaffians", in preparation.
- [18] K. W. J. Kadell, A proof of Askeys conjectured q -analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988), 969-986.
- [19] R. Koekoek, P. Lesky and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer-Verlag, (2000).
- [20] J. Luque and J. Thibon, "Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals", *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 5267-5292.
- [21] S. Matsumoto, "Hyperdeterminantal expressions for Jack functions of rectangular shapes", *Journal of Algebra* **320** (2008) 612-632, [arXiv:math/0603033](#).