

強双曲型方程式に対する混合問題 の L^2 -理論 についての注意

北大 理 上見 練太郎

ここでは、強双曲型方程式に対する zero initial data をもつ混合問題が L^2 -well posed であるための必要条件—“境界の各点に凍化した定数係数の問題が(一様) L^2 -well posed である”—を求め、その逆の問題を m 階の場合に考察する。なお、energy 不等式が成立する場合については最後の節で言及する。

§ 1. 定義と一般論

半空間 $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{x = (x', x_n); x' = (x_0, x'') = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), x_n > 0\}$ において、次の境界値問題 (P, B_j) を考える:

$$P(x, D)u = f \quad (x_n > 0),$$

$$B_j(x', D)u = g_j \quad (j=1, \dots, l) \quad (x_n = 0).$$

ここで、 $D = (D_0, \dots, D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. P と B_j についての仮定は次の通り. P は x_0 方向に強双曲型. m 次微分作用素, 境界作用素 B_j の次数 m_j については $m_j < m$ かつ

$m_j \neq m_k$ ($j \neq k$), P と B_j はともに $x_n = 0$ に関して non-characteristic, P と B_j の係数は C^∞ で 原点を中心とする大きな球の外では定数である.

L^2 -well posedness を定義するために, 時間方向 x_0 に重みをつけた関数空間 $H_{k,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $H_{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ ($\gamma \neq 0$) を導入しよう. 即ち,

$$H_{k,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u(x); e^{-\gamma x_0} u(x) \in H^k(\mathbb{R}_+^{n+1})\} \quad (k \geq 0, \text{整数}),$$

$$H_{s,\gamma}(\mathbb{R}^n) = \{u(x'); e^{-\gamma x_0} u(x') \in H^s(\mathbb{R}^n)\} \quad (s; \text{実数}).$$

これらのノルムはそれぞれ

$$\|u\|_{k,\gamma}^2 = \sum_{j+|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |e^{-\gamma x_0} \gamma^j D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-\gamma x_0} \Lambda^s u(x')|^2 dx'.$$

そこで,

$$\Lambda^s u(x') = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau x_0 + i\sigma x''} \Lambda(\xi, \sigma, \gamma)^s \hat{u}(\tau, \sigma) d\xi d\sigma,$$

$$\hat{u}(\tau, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tau x_0 - i\sigma x''} u(x') dx',$$

$$\Lambda(\xi, \sigma, \gamma) = (|\tau|^2 + |\sigma|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = \xi - i\gamma,$$

$$\sigma x'' = \sigma_1 x_1 + \cdots + \sigma_{n-1} x_{n-1}, \quad |\sigma|^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_{n-1}^2.$$

なお, あとで使用する parameter γ をとも pseudo-differential operator $A(x', D'; \gamma)$ は上の Λ^s の定義において symbol $\Lambda(\xi, \sigma, \gamma)$ を $a(x', \xi, \sigma, \gamma)$ におきかえて定義する.

定義 境界値問題 (P, B_j) ($g_j \equiv 0$) が L^2 -well posed であるとは, 適当に正の定数 C, γ_0 をとると, 任意の $f \in$

$H_{1,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ($\gamma \geq \gamma_0$) に対し 2-意的な解 $u \in H_{m,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が存在して次の評価式をみたすことである:

$$(1) \quad \gamma^2 \|u\|_{m-1,\gamma}^2 \leq C \|f\|_{0,\gamma}^2 \quad (\gamma \geq \gamma_0).$$

この定義は P と B_j が齊次定係数のとき [3] において採用したものと同値である. 次に, 定義より一般論として導ばれる事実を列記しておこう. その殆んどは久保田 [6] による.

(1) (P, B_j) が L^2 -well posed ならば "その dual な問題は (過去に向って) L^2 -well posed である. 即ち, 時間方向の重みを負にかえる. 更に, 定義における u は高次の評価式をみたす:

$$(2) \quad \gamma^2 \|u\|_{m,\gamma}^2 \leq C_1 \|f\|_{1,\gamma}^2 \quad (\gamma \geq \gamma_1 \geq \gamma_0).$$

(2) (P, B_j) が L^2 -well posed ならば, 適当に正の定数 C', γ_0' をとると, 任意の $f \in H_{1,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $\Lambda_{x''}^{\frac{1}{2}} g_j \in H_{m-m_j,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ ($\gamma \geq \gamma_0'$) に対し 2-意的な解 $u \in H_{m,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が存在して

$$(3) \quad \begin{aligned} & \gamma^2 \|u\|_{m-1,\gamma}^2 + \gamma^2 \sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_{x''}^{-\frac{1}{2}} D_n u \rangle_{m-j-1,\gamma}^2 \\ & \leq C' \left(\|f\|_{0,\gamma}^2 + \sum_{j=1}^m \langle \Lambda_{x''}^{\frac{1}{2}} g_j \rangle_{m-m_j-1,\gamma}^2 \right), \end{aligned}$$

ここで, $\Lambda_{x''}$ は Λ の定義において symbol $(|\tau|^2 + |\sigma|^2)^{\frac{1}{2}}$ を $(\gamma^2 + |\sigma|^2)^{\frac{1}{2}}$ にかえたものである. 評価式 (3) は P が $\mathcal{P}$ 階で B が実数値をとるとき, 宮武 [7] において示された.

一般論として (3) を導くためには, まず [6] によつて (3) で $\Lambda_{x''}$ を Λ に代えたものが成立することに注意しよう. さて symbols Λ と $\Lambda_{x''}$ が同等でないところは $\sigma=0$ の近傍であるが, そこでは白田 [10] と次節に述べる定理 1 より Lopatinaki 行列式が zero ではない.

(ii) (P, B_j) が L^2 -well posed のとき, $f=0, g_j=0$ ($x_0 < 0$) なら $u=0$ ($x_0 < 0$) が導かれる. したがって, 初期条件が zero であることは関数空間の中にかくされている.

§ 2. 必要条件と問題の設定

P, B_j の主要部を P°, B_j° で表わし, (P, B_j) を境界の各点 $(y', 0)$ に凍化した定係数の問題を $(P, B_j)_{y'}$ と記すことにする. このとき,

定理 1. (P, B_j) が L^2 -well posed ならば各 $(P^\circ, B_j^\circ)_{y'}$ もまた L^2 -well posed である.

注意 定理 1 の結論をより詳しく記すと, y' に無関係な正の定数 C (これは (ii) におけるものと同じにとれる) があって, 任意の $f \in H_{1,\mu}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ($\mu > 0$) に対して $(P^\circ, B_j^\circ)_{y'}$ の一意的な解 $u \in H_{m,\mu}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が存在して

$$(4) \quad \mu^2 \|u\|_{m-1,\mu}^2 \leq C \|f\|_{0,\mu}^2 \quad (\mu > 0).$$

定理 1 の証明はあとまわしにして, 我々は次の

問題 定理1の逆が成立するか？

を考えよう. この問題は P が n 階で, B^0 の係数が実数値をとるとき, 上見 [1] によつて肯定的に解かれている (§3 参照). 高階又は n 階系の場合は一様 Lopatinski 条件をみたすという特別な class に対して肯定的に解かれている (坂本 [9], Kreiss [5]). ここでの主目的は P が n 階で B^0 が複素数値をとるとき, 上の問題を適当な条件のもとで肯定的に解くことである. その正確な記述は §3 で述べる.

定理1の証明 $\mu > 0$ を任意に固定し, $f \in H_{1,\mu}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ に対し $f_\varepsilon = \varepsilon^{-m} f(\varepsilon^{-1}(x' - y'), \varepsilon^{-1}x_n)$ とおくと $f_\varepsilon \in H_{1,\frac{\mu}{\varepsilon}}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ($\varepsilon > 0$). 今 $\mu \varepsilon^{-1} \geq \mu_1$ となるように ε を十分小さくとると, L^2 -well posedness より

$$(5) \quad \begin{aligned} P(x, D) u_\varepsilon &= f_\varepsilon & (x_n > 0), \\ B_j(x', D) u_\varepsilon &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, l) & (x_n = 0) \end{aligned}$$

の解 $u_\varepsilon \in H_{m,\frac{\mu}{\varepsilon}}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が存在し, §1 の (1), (2) に相当する評価式をみたす. ここで $u_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(y' + \varepsilon x', \varepsilon x_n)$ とおけば変数変換によりこれらの評価式は次のようになる:

$$(6) \quad \begin{aligned} \mu^2 \|u_\varepsilon\|_{m,\mu}^2 &\leq C_1 \|f\|_{1,\mu}, \\ \mu^2 \|u_\varepsilon\|_{m-1,\mu}^2 &\leq C \|f\|_{0,\mu}. \end{aligned}$$

定数 C, C_1 は (1), (2) におけるものと同じである. さて,

(5) と u_ε の定義より u_ε は次の方程式を満たす:

$$(17) \quad \begin{aligned} P(y' + \varepsilon x', \varepsilon x_n, \varepsilon^{-1} D) u_\varepsilon &= \varepsilon^{-m} f(x) \quad (x_n > 0), \\ B_j(y' + \varepsilon x', \varepsilon^{-1} D) u_\varepsilon &= 0 \quad (j=1, \dots, l) \quad (x_n = 0). \end{aligned}$$

(6) より $H_{m, \mu}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ における u_{ε_k} ($k \rightarrow \infty$) の weak limit u が存在して (4) を満たすことはあきらか。更に, この u は (7) より $\varepsilon_k \rightarrow 0$ とすると $(P^\circ, B_j^\circ)_y$ の解であることが分る。あと証明すべきことは一意性であるが, これは § 1 の (イ) と上と同じ方法により dual な問題 $(P^{*\circ}, B_j^{*\circ})_{y'}$ ($j=l+1, \dots, m$) に対しても解の存在が分るから, Green 形式よりたゞちに従う。

§ 3. 二階の場合

$$\begin{aligned} P^\circ(x, D) &= -D_0^2 + 2 \sum_{j=1}^n a_j(x) D_j D_0 + \sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(x) D_j D_k, \\ (a_{nn} > 0, \quad a_{j,k}(x) &= a_{k,j}(x)), \end{aligned}$$

$$B^\circ(x', D) = D_n - \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x') D_j - c(x') D_0.$$

このとき, (P°, B°) に対する Lopatinoki 行列式 $R(x', \tau, \sigma)$ ($\tau = \xi - i\gamma$, $\gamma \geq 0$) は次式で定義される:

$$\begin{aligned} R(x', \tau, \sigma) &= B^\circ(x', \tau, \sigma, \lambda^+(x', 0; \tau, \sigma)) \\ &= \lambda^+(x', 0; \tau, \sigma) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x') \sigma_j - c(x') \tau, \end{aligned}$$

こゝで $\lambda^\pm(x; \tau, \sigma)$ は $P^\circ(x, \tau, \sigma, \lambda) = 0$ の λ についての根で $\operatorname{Im} \lambda^\pm \gtrless 0$ ($\operatorname{Im} \tau = -\gamma < 0$) なるものがある。

最初, B° の係数が実数値をとるとき, 主として [1],

[4] で得られた結果をまとめておこう.

定理 2. B^0 の係数は実数値をとるとせよ. このとき, 次の命題は同値である:

(i) (P, B) は L^2 -well posed である.

(ii) 各 $(P^0, B^0)_{x'}$ は L^2 -well posed である.

(iii) $R(x', \tau, \sigma) \neq 0$ ($\forall \tau > 0$) かつ $\lambda^+(x', 0, \xi, \sigma)$ が実の単根のとき $R(x', \xi, \sigma) \neq 0$.

(iv) $R(x', \tau, \sigma) \neq 0$ ($\forall \tau > 0$) かつ $(P^0, B^0)_{x'}$ の依存領域が Cauchy 問題のそれと同じである.

(v) $a_{nn}(x', 0)C(x') + a_n(x', 0) \geq 0$ かつ σ に対する二次形式 $H(x', \sigma)$ が非負値である: $z \geq 0$

$$H(x', \sigma) = (a_{nn}C + a_n)^2 (a_{nn}e(\sigma) - d(\sigma)^2) - 2(a_{nn}C + a_n)$$

$$\times (a_{nn}a(\sigma) - a_nd(\sigma))(a_{nn}b(\sigma) + d(\sigma)) - (a_{nn} + a_n^2)(a_{nn}b(\sigma) + d(\sigma))^2,$$

$$e(\sigma) = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk} \sigma_j \sigma_k, \quad d(\sigma) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \sigma_j, \quad a(\sigma) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \sigma_j,$$

$$b(\sigma) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \sigma_j, \quad a_{nn} = a_{nn}(x', 0), \quad C = C(x'), \dots \text{etc.}$$

注意 現状では (v) の代数的条件が評価式をたすのに重要な役割を果たしている. 即ち, それを用いて energy 不等式が導びかれ, 強い意味での L^2 -well posedness と上の各命題が同値になる ([1], [4], [7]). 今後の課題は (v) を用いずに評価式をたすことにある.

定理 2 の証明 (i) $\rightarrow$ (v) は定理 1, (v) $\rightarrow$ (ii)

及 $u''(ハ) \longleftrightarrow (=)$ は [10], $(ハ) \rightarrow (ホ)$ 及び $(ホ) \rightarrow (イ)$ は [1] による. $(ホ) \rightarrow (イ)$ は部分積分の相手を適当にきめて評価式を求めるとよい. [1] で用いたそれは

$$Q(x, D) = -\frac{a_{nn}}{2} \frac{\partial P^\circ}{\partial \tau}(x, D) + \frac{a_n}{2} \frac{\partial P^\circ}{\partial \lambda}(x, D) + a_{nn}(a_{nn}c + a_n)B^\circ(x, D),$$

$$(c(x) = c(x'), \quad b_j(x') = b_j(x))$$

で, $\int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (P(x, D)u, Q(x, D)u) dx_0 dx_n dx'$ を計算して energy 不等式を導いた. 今, 目的の評価式 (1) を得るには $\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (e^{-\gamma x_0} P(x, D)u, e^{-\gamma x_0} Q(x, D)u) dx$ を計算するとよい. 解の存在は dual な問題を考えるとよい. なお, $(ハ) \leftrightarrow (=) \leftrightarrow (ホ) \leftrightarrow (ロ)$ の基礎には [3] による L^2 -well posedness の特徴付けがあることを注意しておこう.

さて, 次に主目的の B° が複素数値をとる場合を考えよう. この場合非常に簡単と思われる例について L^2 -well posedness を定理 2 の (ホ) のような係数の条件になおしても, 微分作用素の範囲で部分積分の相手みつけることは絶望的と思われる (5.5 参照). そこで我々はそれを pseudo-differential operator の中からみつけよう. そのため以下の仮定をおく.

$$(I) \quad \lambda^+(x', 0, \xi, \sigma) = \lambda^-(x', 0, \xi, \sigma) \text{ のとき } R(x', \xi, \sigma) \neq 0.$$

$$(II) \quad R(x'_0, \xi_0, \sigma_0) = 0 \text{ かつ } \int_0^\infty \lambda^+(x'_0, 0, \xi_0, \sigma) d\sigma > 0 \text{ なる } (x'_0,$$

ξ_0, σ_0) の近傍で $\operatorname{Re} R_0(x', \xi, \sigma) \overline{R_1(x', \xi, \sigma)} \geq 0$, $\therefore \therefore$

$$R(x', \tau, \sigma) \equiv R_0(x', \xi, \sigma) + \gamma R_1(x', \xi, \sigma) + O(\gamma^2).$$

これらの仮定の意味は次の通り. (I) はその点の近傍で坂本-Kreiss の方法が適用できることを意味し, (II) はいわゆる Sharp form of Gårding inequality ([8]) を使用できることを保証する.

定理 3. (I) 及び (II) を仮定すると問題は肯定的に解ける.

この定理の証明は [2] にあるが, その概略は次節で示す.

§ 4. 定理 3 の証明

問題 (P, B) を $-P$ 階系に直そう.

$$V = \begin{pmatrix} \Lambda u \\ D_n u \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^+ & \lambda^- \end{pmatrix}, U = N^{-1} V = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

とよくと, (P, B) は

$$L U = D_n U - K \Lambda U + (\ell, o, t) \quad (x_n > 0),$$

$$B U = (R, Q) U + (\ell, o, t) \quad (x_n = 0)$$

$\therefore \therefore$

$$K = \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix}, L U = N^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ P u \end{pmatrix}, Q = B^0(x', \tau, \sigma, \lambda^-).$$

なお, 上の操作は $\lambda^\pm$ が単根のときのみ意味あるものと

$L, \lambda^\pm, R, Q$ は 0 次の pseudo-differential operators である。さて,

$$M = \begin{pmatrix} -C_1, 0 \\ 0, C_2 \end{pmatrix} \text{ 又は } \begin{pmatrix} -d_1 \gamma \Lambda^{-1}, 0 \\ 0, d_2 \gamma^{-1} \Lambda \end{pmatrix},$$

(C_1, C_2, d_1, d_2 は定数と仮定できる)

を相手に部分積分を行うと

$$(8) \quad 2 \mathcal{I}_m(LU, MU)_{0, \gamma} = \langle U, MU \rangle_{0, \gamma} \\ + 2 \mathcal{I}_m(U, MK\Lambda U)_{0, \gamma} + R(U, U),$$

よって

$$(9) \quad |R(U, U)| \leq C \|U\|_{0, \gamma}^2 \text{ 又は } C (\|u_1\|_{0, \gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\Lambda u_2\|_{0, \gamma}^2),$$

$$(10) \quad \mathcal{I}_m \overline{MK} = \begin{pmatrix} C_1 \mathcal{I}_m \lambda^+, 0 \\ 0, -C_2 \mathcal{I}_m \lambda^- \end{pmatrix} \text{ 又は } \begin{pmatrix} d_1 \gamma \Lambda^{-1} \mathcal{I}_m \lambda^+, 0 \\ 0, -d_2 \gamma^{-1} \Lambda \mathcal{I}_m \lambda^- \end{pmatrix}.$$

次に問題を局所化するために次の 1 の分割を用いる:

$$\sum_{1 \leq j, k < \infty} \psi_j(\tau, \sigma) \varphi_k(x') \varphi_0(x_n) + (1 - \varphi_0(x_n)) = 1,$$

ここで, φ_0, φ_k は C_0^∞ で $\varphi_0(x_n) = 1$ ($0 \leq x_n \leq \delta$), $\varphi_1(x') = 1$ ($|x'| \geq R$). $\psi_j'(\tau', \sigma')$ は $\{(\tau', \sigma') ; |\tau'|^2 + |\sigma'|^2 = 1, \gamma' \geq 0\}$

における 1 の分割として $\psi_j(\tau, \sigma) = \psi_j'(\tau \Lambda^{-1}, \sigma \Lambda^{-1})$ とおいたもの。最初 P は強双曲型 P から sharp form of Garding inequality を用いると

$$(11) \quad \gamma^2 \|(1 - \varphi_0)u\|_{m-1, \gamma}^2 \leq C \|P(1 - \varphi_0)u\|^2 \quad (\gamma \geq \gamma_0).$$

$\psi_j \varphi_k \varphi_0$ を symbol とする pseudo-differential operator

をその代表とみて $\beta(x, D)$ で表わす. $\beta(x, D)u$ のア priori 評価を求めるために, [3], [10] による次の補題を用いる.

補題 1 $(P^\circ, B^\circ)_{x'}$ が L^2 -well posed ならば

(i) $\gamma > 0$ または $\gamma = 0$ で $\lambda^+(x', 0, \xi, \sigma)$ が実の単根のとき

$$R(x', \tau, \sigma) \neq 0.$$

(ii) $R(x', \xi, \sigma) = 0$ 且 $\operatorname{Im} \lambda^+(x', 0, \xi, \sigma) > 0$ のとき $R_1(x', \xi, \sigma) \neq 0$.

今, $(x'_0, \tau'_0, \sigma'_0)$ ($|\tau'_0|^2 + |\sigma'_0|^2 = 1$) を任意にきめて, その点が $\beta(x, D)$ の symbol の中心とせよ. ㉑ の場合として, その中心において $\lambda^\pm$ が単根で $R \neq 0$ ときは C_2 を C_1 より十分大きくとり, (8), (9), (10) より Sharp form of Gårding inequality を用いると

$$(12) \quad \gamma^2 \|\beta u\|_{1, \gamma}^2 + \gamma (\langle \beta u \rangle_{1, \gamma}^2 + \langle D_n \beta u \rangle_{0, \gamma}^2) \\ \leq C (\|Pu\|_{0, \gamma}^2 + \gamma \langle \beta u \rangle_{0, \gamma}^2 + \gamma \|u\|_{1, \gamma}^2)$$

が成立する. ㉑ の場合として, 中心において $\lambda^+ = \lambda^-$ のときは $\lambda^\pm$, R , Q は通常の symbol と見ることはできないが, 仮定 (I) より 坂本-Kreiss の方法が便して (12) と同じ評価式が得られる. 故に, 残った場合はその中心が補題 1 の (ii) をみたすときである.

$\beta(x, D)$ の symbol の中心が補題 1 の (ii) をみたすとせよ.

γ' は十分小さいと考えてよりから 仮定 (II) を用いると

$$\operatorname{Re} \Lambda R / R_1 = \operatorname{Re} R_0 \bar{R}_1 / |R_1|^2 + \gamma + \gamma \gamma' \operatorname{Re} R_2 / R_1 \\ \geq c \gamma.$$

これと Sharp form of Gårding inequality より

$$\langle \Lambda R R_1^{-1} \beta v \rangle_{0,\gamma} \geq c \gamma \langle \beta v \rangle_{0,\gamma} - C \langle v \rangle_{0,\gamma} \\ (v \in H_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n), \gamma \geq \gamma_0).$$

この式で $v = \Lambda^{-\frac{1}{2}} u_1$ とおき, $Bu = Ru_1 + Qu_2 + (1.o.t)u$ を用いると

$$\gamma^2 \langle \Lambda^{-\frac{1}{2}} \beta u_1 \rangle_{0,\gamma}^2 \leq C (\langle \Lambda^{\frac{1}{2}} Bu \rangle_{0,\gamma}^2 + \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} \beta u_2 \rangle_{0,\gamma}^2 + \langle u \rangle_{-\frac{1}{2},\gamma}^2).$$

故に, M とし $\gamma = 0$ の形を用いて d_2 を d_1 より十分大とすると

$$(13) \quad \langle \beta u, M \beta u \rangle_{0,\gamma} \geq -\frac{C}{\gamma} (\langle Bu \rangle_{\frac{1}{2},\gamma}^2 + \langle u \rangle_{-\frac{1}{2},\gamma}^2).$$

次に, 体積積分を考慮しよう. $\operatorname{Im} \lambda^\pm \neq 0$ に注意して, (10) と

Sharp form of Gårding inequality より

$$(14) \quad \operatorname{Im} (\beta u, K M \Lambda \beta u)_{0,\gamma} \geq C (\gamma \|\beta u_1\|_{0,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\Lambda \beta u_2\|_{0,\gamma}^2 - \|u\|_{0,\gamma}^2).$$

他方, (10) の左辺は次式で評価される:

$$(15) \quad 2 |\operatorname{Im} (L \beta u, M \beta u)| \leq \frac{1}{\varepsilon \gamma} \|L u\|_{0,\gamma}^2 + \varepsilon \gamma (\|\beta u_1\|_{0,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\Lambda \beta u_2\|_{0,\gamma}^2).$$

故に, (9), (13), (14), (15) より γ_0 を十分大とすると

$$(16) \quad \gamma^2 \|\beta u\|_{1,\gamma}^2 \leq C (\|Bu\|_{0,\gamma}^2 + \langle \Lambda_x^{\frac{1}{2}} Bu \rangle_{0,\gamma}^2 + \gamma \|u\|_{1,\gamma}^2).$$

ここで, Λ と Λ_x との同等性を用いた.

以上 (11), (12), (16) の評価式をよせ集めて

補題 2. 仮定 (I) (II) のもとで, 各 $(P^\circ, B^\circ)_{x'}$ が L^2 -well posed のとき 次のアッオリ評価式が成立する.

$$(17) \quad \gamma^2 \|u\|_{1,\gamma}^2 \leq C (\|Pu\|_{0,\gamma}^2 + \langle \Lambda_x^{\frac{1}{2}} Bu \rangle_{0,\gamma}^2)$$

($u \in H_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $\gamma \geq \gamma_0$).

勿論, (17)の左辺に $\gamma^2 (\langle \Lambda_x^{\frac{1}{2}} u \rangle_{1,\gamma}^2 + \langle \Lambda_x^{\frac{1}{2}} D_n u \rangle_{0,\gamma}^2)$ をつけ加えてもよいが, こゝではあまり重要でない. 最後この二つのは存在があるが, dual な問題に対しても (I)(II) が保たれることに注意するとよい.

§5. 例と energy 不等式

$P(D) = -D_t^2 + D_y^2 + D_x^2$, $(x_0, x_1, x_2) = (t, y, x)$ とするとき

境界条件	$B = D_x - i b_2(t, y) D_y$	$B = D_x - (b_1(t, y) + i b_2(t, y)) D_y - D_t$
L^2 -well posed	$ b_2(t, y) < 1$	$b_1^2(t, y) + b_2^2(t, y) \leq 1$
上二' 仮定 (I)(II) をみたすもの	$0 < b_2(t, y) < 1$	$b_1^2(t, y) + b_2^2(t, y) = 1$ かつ $b_2(t, y) \neq 0$

最後に, energy 不等式 についての注意をしるこのノートを終ろう. P が二階 B^0 の係数が実数値をとるとき ([1], [7]), または (P^0, B^0) が一様 Lopatinoki 条件をみたすとき ([9]) は energy 不等式が成立していた. しかし, 一般に L^2 -well posed のとき energy 不等式が成立しているかどうかは上の簡単と思われる例さえわからない. なお, 上の右側の例と Lopatinoki 行列式も反射係数も同一で energy 不等式をみたす一階 2×2 系

が存在する:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (x > 0)$$

$$(1, b_1 + ib_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (x = 0)$$

∴ 2°, 条件として $b_1^2 + b_2^2 \leq 1$ (b_1, b_2 是数).

以上

References

- [1] R. Agemi: On energy inequalities of mixed problems for hyperbolic equations of second order, Journ. Fac. Sci. Hokkaido Univ., vol. 21, 221-236 (1971).
- [2] R. Agemi: Remarks on L^2 -well posed mixed problems for hyperbolic equations of second order, to appear.
- [3] R. Agemi - T. Shirota; On necessary and sufficient conditions for L^2 -well-posedness of mixed problem for hyperbolic equations; Journ. Fac. Sci. Hokkaido Univ., vol. 21, 133-151 (1970).
- [4] R. Agemi - T. Shirota: On necessary and suffi-

- cient conditions for L^2 -well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations, *ibid*, vol. 22, 137-149 (1972).
- [5] H. O. Kreiss : Initial-boundary value problems for hyperbolic systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 23, 277-298 (1970).
- [6] K. Kubota : Remarks on boundary value problems for hyperbolic equations, to appear.
- [7] S. Miyatake : Mixed problem for hyperbolic equation of second order, to appear.
- [8] P. D. Lax - L. Nirenberg : On stability for difference schemes : A Sharp form of Gårding inequality, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 19, 473-492 (1966).
- [9] R. Sakamoto : Mixed problems for hyperbolic equations I, II. *Jour. Math. Kyoto Univ.*, vol. 10, 349-373, 403-417 (1970).
- [10] T. Shirota : On the propagation speed of hyperbolic operator with mixed boundary conditions, *Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, vol. 22, 25-31 (1972).