

2次元戸田分子方程式

広 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

現在ソリトン方程式として知られている非線形偏微分(差分)方程式のほとんどすべてが変換によって2次形式(Bilinear form)に書き直せることが知られている。微分方程式の解を Wronskian (or Casorat) 行列式) 表示すると, 2次形式は行列式のもう特別な関係式(例えば Plücker relation, Jacobi の公式)に対応している。

2次元戸田分子方程式の解の Wronskian 表現 $\tau_N^{(\ell)}$ は

$$\tau_N^{(\ell)} = \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x_1^{j-1} \partial y_1^{i-1}} \phi^{(\ell)} \right|_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \begin{aligned} \tau_0^{(\ell)} &= 1, \\ \tau_{-1}^{(\ell)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{where } \phi^{(\ell)} = (a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_1)^\ell \phi^{(0)}, \quad \ell \geq 0,$$

$$\phi^{(-\ell)} = (a_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + b_0)^\ell \phi^{(0)}, \quad \ell > 0,$$

$\phi^{(0)}$ は x, y の任意関数

と表現される。

$\tau_N^{(l)}$ のいろいろな関係式が数式処理 Reduce 3.3
に便、で推定された。以下の式は $N=0, 1, 2, 3$ まで成立する
ことが数式処理で確かめられた。

まず 2項演算子 $D_x^m D_y^n f \cdot g$ ($m, n \geq 0$) を次式で導入する。

$$D_x^m D_y^n f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^n f(x, y) g(x', y') \Big|_{\substack{x'=x, \\ y'=y}}$$

この記号を用いると関係式は次のようになる。

$$(1) \quad D_x D_y \tau_N^{(l)} \cdot \tau_N^{(l)} = 2 \tau_{N+1}^{(l)} \tau_{N-1}^{(l)}$$

$$(2) \quad D_x \tau_N^{(-1)} \cdot \tau_N^{(0)} = a_0 \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(-1)}$$

$$(3) \quad D_y \tau_N^{(1)} \cdot \tau_N^{(0)} = a_1 \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(1)}$$

$$(4) \quad (a_0 D_y + b_0) \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_N^{(-1)} = \tau_{N+1}^{(-1)} \tau_N^{(0)}$$

$$(5) \quad (a_1 D_x + b_1) \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_N^{(1)} = \tau_{N+1}^{(1)} \tau_N^{(0)}$$

そこで a_0, a_1, b_0, b_1 は定数,

$$(6) \quad D_x D_y \tau_N^{(0)} \cdot \tau_N^{(-1)} = (a_0 D_y + 2b_0) \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_{N-1}^{(-1)},$$

$$(7) \quad D_x D_y \tau_N^{(0)} \cdot \tau_N^{(1)} = (a_1 D_x + 2b_1) \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_{N-1}^{(1)},$$

$$(8) \quad a_0 D_y \tau_{N-1}^{(-1)} \cdot \tau_N^{(1)} + a_1 D_x \tau_N^{(-1)} \cdot \tau_{N-1}^{(1)} \\ = b_0 \tau_{N-1}^{(-1)} \tau_N^{(1)} - b_1 \tau_N^{(-1)} \tau_{N-1}^{(1)},$$

$$(9) \quad D_y \tau_N^{(0)} \cdot \tau_N^{(2)} + a_1^2 D_x \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_{N-1}^{(0)} = -2a_1 b_1 \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(2)},$$

$$(10) \quad D_x \tau_N^{(0)} \cdot \tau_N^{(-2)} + a_0^2 D_y \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_{N-1}^{(-2)} = -2a_0 b_0 \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(-2)}.$$

(1) 式は 2次元戸田分子方程式の 2次形式表現であり,

任意の N で成立する.

(2), (3), (4), (5) 式は 2次元戸田分子方程式に対する

Bäcklund 変換の式である. $b_0 = b_1 = 0$ のときは任意の N で成立することか証明されている.

(6) 式以下が新しい関係式である.

任意関数 $\phi^{(0)}$ に新しい条件 (例えば $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \phi^{(0)} = \phi^{(0)}$) を追加すると, $\tau_N^{(2)}$ は色々と新しい関係式をみたすよう

になる。これらの式は色々なソリト = 方程式 列挙は

Massive Thirring Equation,

Pohlmeyer - Lund - Regge - Gelmanov 方程式

Derivative nonlinear Schrödinger 方程式

Two-dimensional nonlinear Schrödinger 方程式

などの二次形式に關係してゐることが分る。

数学研究では新しい關係式を導出することが大切であるが、關係式を予想し、数式処理を便して、これをチェックし、あとで一般的証明を与えるという方法は研究のスピード化に非常に有用である。