

戸田格子 hierarchy の超対称化について。

池田 薫 (都立大 理)
Kaoru Ikeda

§ 0 序文

2次元戸田格子 (0. 1) は非線形可積分系の重要な一例になっている。

$$u_x(s) = \exp(u(s) - u(s-1)) - \exp(u(s+1) - u(s)) \quad (0. 1)$$

方程式 (0. 1) を含むようなある方程式系を戸田格子 (Toda lattice といひ、以下 TL と略記する。) hierarchy と言う。 TL hierarchy は上野、高崎両氏により研究されて 函数表示、無限次元 Lie 環との関係が見出された。

両氏の仕事のなかで重要な役目を果たしたのが

Riemann-Hilbert 分解である (以下 R-H 分解と略記)。 TL hierarchy の超対称化はこの R-H 分解から出発する。 R-H 分解とは無限次元 Lie 群の分解という代数的問題であるがその分解から TL hierarchy を導出することができる。我々は R-H 分解を超対称化することにより超対称化 TL (super TL, 以下 STL と略記) hierarchy を導いた。超対称化とは微分方程式 (たとえば戸田格子) に表れる定数, 変数, 及び関数を反可換な Grassmann 変数におきかえたものである。この STL hierarchy はその body part として 2 組の TL hierarchy を含んでいる。よって STL hierarchy は TL hierarchy の自然な超対称化と考えられる。 STL hierarchy の解の表示において TL hierarchy の 関数の類似物として super determinant (もしくは Berezinian) が得られる。

STL hierarchy の解の変換群に関連して Lie super 代数 $gl(\infty|\infty)$ が表れる。 $gl(\infty|\infty)$ を $osp(\infty|\infty)$ と言う別の Lie super 代数にとりかえることにより STL hierarchy とは別な osp-STL hierarchy が得られる。 osp-STL hierarchy はその body part として BTL, CTL hierarchy を含んでいる。 osp-STL hierarchy に 4 周期条件を課すことにより super Sine-Gordon 方程式が得られる。

§1 超対称化戸田格子 hierarchy

まず代数的準備を行う。 $e_0, e_1, \dots$ を生成元とする代数を考える。 e_i 達は次の関係式を満たす。

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i, j \in \{1, 2, 3, \dots\})$$

e_i 達で生成される $\mathbb{C}$ 上の代数を Grassmann 代数といた A であらわす。即ち

$$A = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{C} e_\alpha$$

但し α は多重指数で $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$

Π は上の性質を満たす多重指数の集合とし

$$e_\alpha = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_n} \text{ とする。}$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \Pi$ に対し $|\alpha|$ を $|\alpha| = m$ で定義する。 $|\alpha| = 0$ の際は $\alpha = \phi$ とし $e_\phi = 1$ とする。 $j \in \mathbb{Z}$ に対して $\underline{j}$ で j の属する 2 の剰余類とする。 A には自然に $\mathbb{Z}_2$ -graduation が入る。即ち

$$A = A_0 \oplus A_1 \quad A_i = \bigoplus_{m \equiv i \pmod{2}} \sum_{|\alpha|=m} \mathbb{C} e_\alpha \quad i = 0, 1$$

次が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$$

② $a \in A_i, b \in A_j$ とした時

$$ab = (-1)^{ij} ba$$

一般に①②が成り立つような $\mathbb{Z}_2$ gradation が入った代数系を Super Commutative algebra といい。今後一般の super-commutative algebra を Q であらわす。

$Q = Q_0 \oplus Q_1$ とした時 自然な射影

$$\varepsilon: Q \longrightarrow Q/(Q_1)$$

(但し (Q_1) は Q_1 が生成された ideal)

を body map という。 $Q = A$ のとき ε は A から $\mathbb{C}$ への射影となる。 $\xi \in Q$ に対し像 $\varepsilon(\xi)$ を ξ の body part といい。

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 \quad \xi_i \in A_i \text{ としたとき}$$

$$\xi^* = \xi_0 - \xi_1 \quad \text{とする。}$$

さて次に Grassmann 代数上の '函数' を定義しよう。

定義 1.1 X^+, X^- を even な Grassmann 変数 θ^+, θ^- を odd な Grassmann 変数とする。 $t^+ = (t_1^+, t_2^+, \dots)$, $t^- = (t_1^-, t_2^-, \dots)$ とし $t_{2j}^{\pm}$ $j=1, 2, \dots$ を even な Grassmann 変数, $t_{2j+1}^{\pm}$ $j=0, 1, 2, \dots$ を odd な Grassmann 変数とする。 $\mathcal{K}$ を $\mathbb{C}[[X^{\pm}, t_2^{\pm}, t_4^{\pm}, \dots]]$ の商体とする。 $\mathbb{Z}_2$ -graded 代数 $\mathcal{S}$ を次で定義する。

$\mathcal{S} = (\mathbb{C}[\theta^{\pm}] \otimes \mathcal{K}) \otimes (\mathbb{C}[[t_1^{\pm}, t_3^{\pm}, \dots]] \otimes A)$ 。 $\mathcal{S}$ には $\mathbb{Z}_2$ -grade が入り super Commutative algebra をなす。 $\mathcal{S}$ を super field という。 次に $\mathcal{S}$ に作用する super vector field を定

義する。

定義 1.2

$$\Theta^\pm = \partial_\theta^\pm + \theta^\pm \partial_x^\pm$$

$$\Theta_{2j+1}^\pm = \partial_{t_{2j+1}^\pm} + \sum_{j=0}^{\infty} t_{2k+1}^\pm \partial_{t_{2j+2k+2}^\pm} \quad j=0,1,2,\dots$$

$$\Theta_{2j}^\pm = \partial_{t_{2j}^\pm} \quad j=1,2,\dots$$

$\Theta_{2j+1}^\pm$ は無限和であるが上 *well defined* に作用している。

super vector field 達は以下の関係を満たしている。

$$[\Theta^\pm, \Theta^\pm]_+ = 2\partial_x^\pm, \quad [\Theta_{2j+1}^\pm, \Theta_{2k+1}^\pm]_+ = 2\Theta_{2j+2k+2}^\pm$$

$[A, B]_+ = AB + BA$ をあさす。

他の super vector field 達は交換又は反交換する。又 Θ を $\Theta^\pm$

もしくは $\Theta_{2j+1}^\pm$ としたとき Θ は super Leibniz rule を満たしている。即ち

$$\Theta(fg) = (\Theta f)g + f^* \Theta g \quad f, g \in S.$$

$A \in \text{Mat}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \mathbb{Q})$ としたとき $\varepsilon(A)$ 及び A^* を次で定義する。

$$\varepsilon(A) = (\varepsilon(a_{ij}))_{i,j \in \mathbb{Z}}, \quad A^* = (a_{ij}^*)_{i,j \in \mathbb{Z}} \quad \text{但し } A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}.$$

$k \in \mathbb{Z}$ に対して作用 $*$ をつきて定義する。 $A \in \text{Mat}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$

に対し

$$A^{*k} = \begin{cases} A & k \equiv 0 \pmod{2} \\ A^* & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

以上の準備のもとに超対称化戸田格子 (STL) hierarchy を導入しよう。 Λ を shift 行列 $\Lambda = (\delta_{l+1,j})_{l,j \in \mathbb{Z}}$, Γ を $\Gamma = ((-)^j \delta_{l+1,j})_{l,j \in \mathbb{Z}}$

$$\Lambda \Gamma = -\Gamma \Lambda, \quad \Gamma^2 = -\Lambda^2 \text{ が成り立つ。}$$

$\text{diag}[a(s)]$ を対角行列 $(a(s) \delta_{l,s})_{l,s \in \mathbb{Z}}$ とする。

行列 B, C, B_j, C_j を次で定義する。

$$B = \Lambda + \text{diag}[b(s)] \quad C = \text{diag}[c(s)] \Lambda^{-1}$$

$$b(s) \in S_{\perp} \quad c(s) \in S_0 \quad \varepsilon(c(s)) \neq 0$$

$$B_j = \sum_{k=0}^j \text{diag}[b_{kj}(s)] \Lambda^{-k+j}, \quad \text{diag}[b_{0j}(s)] \Lambda^j = \Gamma^j$$

$$b_{kj}(s) \in S_{\underline{k}}$$

$$C_j = \sum_{k=0}^{j-1} \text{diag}[c_{kj}(s)] \Lambda^{k-j} \quad \varepsilon(c_{0j}(s)) \neq 0$$

$$c_{kj}(s) \in S_{\underline{k}}$$

次の Zakharov-Shabat 型の方程式系を STL hierarchy

という。

$$\Theta^+ C + \Theta^- B = -B^* C - C^* B \quad (1.1)$$

$$\Theta^+ B_j + (-)^{j+1} \Theta_j^+ B = (-)^j B^{*j} B_j - B_j^* B \quad (1.2)$$

$$\Theta_k^+ B_j + (-)^{k+j+1} \Theta_j^+ B_k = (-)^{j+k} B_k^{*j} B_j - B_j^{*k} B_k + 2 \delta_{j,k-1} B_{j+k} \quad (1.3)$$

$$\Theta^- C_j + (-)^{j+1} \Theta_j^- C = (-)^j C^{*j} C_j - C_j^* C \quad (1.4)$$

$$\Theta_k^- C_j + (-)^{k+j+1} \Theta_j^- C_k = (-)^{j+k} C_k^{*j} C_j - C_j^{*k} C_k + 2 \delta_{j,k-1} C_{j+k} \quad (1.5)$$

$$\Theta_j^+ C_k + (-)^{j+k+1} \Theta_k^- B_j = (-)^{j+k} B_j^{*k} C_k - C_k^{*j} B_j \quad (1.6)$$

$$\Theta^+ C_k + (-)^{k+1} \Theta^- B_k = (-)^k B_k^* C_k - C_k^* B_k \quad (1.7)$$

$$\Theta^- B_k + (-)^{k+1} \Theta^+ C_k = (-)^k C_k^* B_k - B_k^* C_k \quad (1.8)$$

方程式 (1.1) において $B = 1 + \text{diag}[b(s)]$, $C = \text{diag}[c(s)] 1^{-1}$

を代入すると

$$\Theta^- b(s) = -b(s) - b(s+1) \quad (1.9)$$

$$\Theta^+ c(s) = (b(s) - b(s-1))c(s) \quad (1.10)$$

$$u(s) \in S_0 \text{ を } b(s) = \Theta^+ u(s), c(s) = \exp(u(s) - u(s-1))$$

とすると (1.9), (1.10) より

$$\Theta^+ \Theta^- u(s) = \exp(u(s) - u(s-1)) + \exp(u(s+1) - u(s)) \quad (1.11)$$

を得る。 $u(s)$ を Θ^+ , Θ^- により展開すると

$$u(s) = u_{00}(s) + \Theta^+ u_{01}(s) + \Theta^- u_{10}(s) + \Theta^+ \Theta^- u_{11}(s) \text{ など}$$

(1.11) から

$$-u_{11}(s) = \exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1)) + \exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s)) \quad (1.12)$$

$$\partial_x u_{10}(s) = \underbrace{(\exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1)))(u_{01}(s) - u_{01}(s-1)) + (\exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s)))}_{\times (u_{01}(s+1) - u_{01}(s))} \quad (1.13)$$

$$\partial_x u_{01}(s) = (\exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1)))(u_{10}(s) - u_{10}(s-1)) + (\exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s))) \times (u_{10}(s+1) - u_{10}(s)) \quad (1.14)$$

$$\partial_{x^+} x^- u_{00}(s) = (\exp(u_{00}(s) - u_{00}(s-1))) \{ \underbrace{u_{11}(s) - u_{11}(s-1) - (u_{01}(s) - u_{01}(s-1))}_{\times (u_{10}(s) - u_{10}(s-1))} \}$$

$$+ (\exp(u_{00}(s+1) - u_{00}(s))) \{ u_{11}(s+1) - u_{11}(s) - (u_{01}(s+1) - u_{01}(s)) (u_{10}(s+1) - u_{10}(s)) \} \quad (1.15)$$

を得る。 $f(s) = E(u(s))$ とすると $f(s)$ は戸田格子方程式をみたす。すなわち

$$\partial_{x^+} \partial_{x^-} f(s) = e^{f(s) - f(s-2)} - e^{f(s+2) - f(s)} \quad (1.16)$$

これは (1.11) に 2 組の独立した (s が奇数, 偶数で) 戸田格子を含むことを意味している。

§2 STL hierarchy の解の表示と Riemann-Hilbert 分解。

まず最初に super Lie 群 $SGL(\infty|\infty, Q)$ を定義しよう。

定義 2.1

$$SGL(\infty|\infty, Q) = \{ A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in Q_{\pm ij}, \mathcal{E}(A) \text{ は可逆} \}$$

つぎに $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列 A を $A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \text{diag}[a_j(s)] \Lambda^j$ と展開したとき

$$(A)_+ = \sum_{j \geq 0} \text{diag}[a_j(s)] \Lambda^j, \quad (A)_- = \sum_{j < 0} \text{diag}[a_j(s)] \Lambda^j \text{ をそれぞれ}$$

A の上 part, A の下 part とする。

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列 $\hat{W}_\pm = \hat{W}_\pm(x^\pm, \theta^\pm, t^\pm)$, $\hat{W}_- = \hat{W}_-(x^\pm, \theta^\pm, t^\pm)$ を以下で定義する。

$$\hat{W}_+ = \sum_{j=0}^{\infty} \text{diag}[\mu_j^+(s)] \Lambda^{-j}, \quad \hat{W}_- = \sum_{j=0}^{\infty} \text{diag}[\mu_j^-(s)] \Lambda^{-j}$$

ここで $\mu_j^\pm(s) \in S_{\pm}$ とし $\mu_0^+(s) = 1$, $\varepsilon(\mu_0^-(s)) \neq 0$ とする。

$$\Phi_+ = \exp(\theta^+ \Lambda + x^+ \Lambda^2 + \sum_{j=1}^{\infty} t_j^+ \Lambda^j), \quad \Phi_- = \exp(\theta^- \Lambda^{-1} + x^- \Lambda^{-2} + \sum_{j=1}^{\infty} t_j^- \Lambda^{-j})$$

とおく。 $W_\pm = \hat{W}_\pm \Phi_\pm$ とし

定理 2.1 $A \in \text{SGL}(\infty | \infty, \mathbb{C})$ に対して上の W_+, W_- での

分解が成り立つとする。

$$W_+^{-1} W_- = A \quad (2.1)$$

このとき $B = (\hat{W}_+^* \Lambda \hat{W}_+^{-1})_+$, $B_j = (\hat{W}_+^{*j} \Lambda^j \hat{W}_+^{-1})_+$

$C = (\hat{W}_0^* \Lambda^{-1} \hat{W}_0^{-1})_-$, $C_j = (\hat{W}_0^{*j} \Lambda^{-j} \hat{W}_0^{-1})_-$ とし

STL hierarchy (1.1) ~ (1.8) が成り立つ。 //

$\hat{W}_\pm$ を wave matrices とする。

分解 (2.1) を Riemann-Hilbert (R-H) 分解という。

行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ に対して $\overset{V}{A}$ 次の行列をあらわす。

$$\overset{V}{A} = \begin{bmatrix} (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu \equiv 0 \pmod{2} \\ \nu \equiv 0 \pmod{2}}} & (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu \equiv 0 \pmod{2} \\ \nu \equiv 1 \pmod{2}}} \\ (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu \equiv 1 \pmod{2} \\ \nu \equiv 0 \pmod{2}}} & (a_{\mu\nu})_{\substack{\mu \equiv 1 \pmod{2} \\ \nu \equiv 1 \pmod{2}}} \end{bmatrix} //$$

次に $S TL$ hierarchy の解の表示を行う。

定義 2.2

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \quad A_{ij} \in \text{Mat}(N^c \times N^c, \mathbb{Q}) \text{ で } A_{11}, A_{00} \text{ は可逆行列とする}$$

$\text{sdet } \check{A}$, $\check{A}^{-1} \text{det } \check{A}$ を次で定義する

$$\text{sdet } \check{A} = \det(A_{00} - A_{01} A_{11}^{-1} A_{10}) / \det A_{11}$$

$$\check{A}^{-1} \text{det } \check{A} = \det(A_{11} - A_{10} A_{00}^{-1} A_{01}) / \det A_{00} \quad .$$

$\text{sdet } \check{A}$ を super determinant とし Berzinian とする。

又 $\text{sdet } \check{A} \cdot \check{A}^{-1} \text{det } \check{A} = 1$ が成立する。

定理 2.2 $A \in SGL(\infty|\infty, A)$ とし $H = \Phi_+ A \Phi_-^{-1}$

$\tau(s) = \text{sdet}({}^t \Xi_0(s) \check{H} \Xi_0(s))$, $\tau_{ij}(s) = \text{sdet}({}^t \Xi_{ij}(s) \check{H} \Xi_{ij}(s))$ とする。

但し

S : 偶数

$$\Xi_{ij}(s) = \begin{bmatrix} (\delta_{(s/2)+\mu-1, 0+Y(i)+j})_{\substack{\mu \in \mathbb{Z} \\ j \in \mathbb{N}^c}} & 0 \\ 0 & (\delta_{(s/2)+\mu-1, 0})_{\substack{\mu \in \mathbb{Z} \\ j \in \mathbb{N}^c}} \end{bmatrix}$$

$$Y_+(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{とする。}$$

s : 奇数

$$\Xi_j(s) = \begin{bmatrix} 0 & (\delta_{((s-1)/2)-\mu, \nu})_{\substack{\mu \in \mathbb{Z} \\ \nu \in N^c}} \\ (\delta_{((s-1)/2)-\mu, \nu+Y(j+\nu)})_{\substack{\mu \in \mathbb{Z} \\ \nu \in N^c}} & 0 \end{bmatrix}$$

とする。このとき次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

$$(i) \quad \mu_1^+(s) = \Theta^+ \log \tau(s)$$

$$(ii) \quad \mu_{2j}^+(s) = \tau_{2j}(s) / \tau(s)$$

$$(iii) \quad \mu_{2j+1}^+(s) = (\Theta^+ - (-)^s \Theta_1^+) \tau_{2j}(s) / \tau(s)$$

証明

$$R-H \text{ 分解より } (\hat{W}_+ H)_F = 0 \quad (2.2)$$

$$\exists \tau \quad {}^t(\mu_j^+(s))_{j \geq 1} (h_{s-i, s-j})_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 1}} = 0 \quad (2.3)$$

但し $H = (h_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ とする。(2.3)の両辺の $s \rightarrow 2$ をとて

$$({}^t(\mu_{2j}^+(s))_{j \geq 1}, {}^t(\mu_{2j+1}^+(s))_{j \geq 0}) \begin{bmatrix} H_{00}(s) & H_{01}(s) \\ H_{10}(s) & H_{11}(s) \end{bmatrix}$$

$$= -({}^t(h_{s, s-2j})_{j \geq 1}, {}^t(h_{s, s-2j+1})_{j \geq 0}) \quad (2.4)$$

(2.4)の両辺に右から $\begin{bmatrix} 1 & -H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
& {}^t(\mu_{z_{j+1}}^+(s))_{j \geq 0} (H_{11}(s) - H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s)) \\
& = - {}^t(h_{s, s-2j-1})_{j \geq 0} + {}^t(h_{s, s-2j}(s))_{j \geq 1} H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

(2.5) の左辺を $-\vec{C}(s)$ とするとクラメル の 公 式 に よ り

$$\mu_{z_{j+1}}^+(s) = \frac{-\det(\text{分母に出る } j \text{ 行目の } \checkmark \text{ 行目を } \vec{C}(s) \text{ にする})}{\det(H_{11}(s) - H_{10}(s)H_{00}^{-1}(s)H_{01}(s))} \quad (2.6)$$

(2.6) の分母, 分子を $\det H_{00}(s)$ で割って

$$\mu_{z_{j+1}}^+(s) = \frac{\{(2.6) \text{ の分子式} \} / \det H_{00}(s)}{\checkmark \det \checkmark H} \quad (2.7)$$

(i) を示す。 $h(s) = ({}^t(h_{s, s-2j}(s))_{j \geq 1}, {}^t(h_{s, s-2j+1}(s))_{j \geq 1})$ とし

$$\textcircled{H}^+ A^{-1} \det \checkmark H(s) = A^{-1} \det(\overbrace{H(s) \text{ の } -1 \text{ 行目を } h(s) \text{ に置きかえたもの}}^{\checkmark}). \quad (\text{但})$$

し $H(s) = (h_{s-i, s-j})_{i, j \geq 1}$ を示せばよい。

$${}^t \vec{h}_e(s) = {}^t(h_{s, s-2j})_{j \geq 1}, \quad {}^t \vec{h}_o(s) = {}^t(h_{s, s-2j+1})_{j \geq 1} \quad \text{とすると}$$

$$\textcircled{H}^+ H_{00}(s) = H_{10}(s), \quad \textcircled{H}^+ H_{01}(s) = H_{11}(s)$$

$$\textcircled{H}^+ H_{10}(s) = A_{N^c} H_{00}(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{h}_e(s) \\ N^c \end{bmatrix} N^c$$

$$\Theta^+ H_{11}(s) = \Lambda_{N^c} H_{01}(s) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{h}_\theta(s) \end{bmatrix}}_{N^c}^{N^c}, \quad \Lambda_{N^c} = (\delta_{iH,j})_{i,j \in N^c}$$

$$A^{-1} \det \overset{V}{H}(s) = \det (H_{00}^{-1}(s) (H_{11}(s) - H_{10}(s) H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s))) t_2^{-1} s^5$$

$$H_{00}^{-1}(s) = (\alpha_{ij})_{i,j \in N^c}, \quad H_{11}(s) - H_{10}(s) H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s) = (\beta_{ij})_{i,j \in N^c}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{h}_\theta(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{h}_e(s) \end{bmatrix} H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{\beta}_0 \end{bmatrix} \quad {}^t \vec{\beta}_0 = ({}^t \beta_{0i})_{i \in N^c}$$

よって

$$\begin{aligned} & \Theta^+ (H_{00}^{-1}(s) (H_{11}(s) - H_{10}(s) H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s))) \\ &= H_{00}^{-1}(s) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{h}_\theta(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^t \vec{h}_e(s) \end{bmatrix} H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s) \right) \quad \text{よって} \end{aligned}$$

$$\Theta^+ A^{-1} \det \overset{V}{H}(s) = \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \det \begin{bmatrix} {}^t(\alpha_{\mu i} \beta_{0p})_{p \in -1} & \mu \text{ 行目} \\ {}^t(\sum_{j \in -1} \alpha_{0j} \beta_{jp})_{p \in -1} & 0 (\neq \mu) \text{ 行目} \end{bmatrix}$$

上の和で μ 項目の行列式を μ 行目に沿って展開すると Δ_{ij} を

$H_{00}^{-1}(s) (H_{11}(s) - H_{10}(s) H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s))$ の i, j 小行列式として

$$\Theta^+ A^{-1} \det \overset{V}{H}(s) = \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \sum_{p=-1}^{-\infty} (-1)^{\mu+p} \alpha_{\mu,-1} \beta_{0p} \Delta_{\mu p}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \sum_{\mu=-1}^{-\infty} (-)^{\mu+\rho} \alpha_{\mu,-1} \Delta_{\mu\rho} \\
&= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \det \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \alpha_{mj} \beta_{jn} \right)_{m \leq -1} \\ \vdots \\ n(\neq \rho) \text{ 列目} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left(\alpha_{m,-1} \right)_{m \leq -1} \\ \vdots \\ \rho \text{ 列目} \end{array} \right] \quad (2.8)
\end{aligned}$$

(2.8) の各行列式において $n(\neq \rho)$ 列目から $(\alpha_{m,-1})_{m \leq -1}$ の $\beta_{-1,n}$ 係数を引くと

$$\begin{aligned}
\textcircled{H}^+ A^{-1} \det \tilde{H} &= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \det \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{j=-2}^{\infty} \alpha_{mj} \beta_{jn} \right)_{m \leq -1} \\ \vdots \\ n(\neq \rho) \text{ 列目} \end{array} , \begin{array}{c} \left(\alpha_{m,-1} \right)_{m \leq -1} \\ \vdots \\ \rho \text{ 列目} \end{array} \right] \\
&= \sum_{\rho=-1}^{-\infty} \beta_{0\rho} \det (\alpha_{ij})_{i,j \leq -1} \det \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (\beta_{mn})_{m \leq -2} \\ 0 \end{array} \right] \\ \vdots \\ n(\neq \rho) \text{ 列目} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \\ \vdots \\ \rho \text{ 列目} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$= \det (\alpha_{ij})_{i,j \leq -1} \sum_{\rho=-1}^{-\infty} (-)^{\rho+1} \beta_{0\rho} \det (\beta_{mn})_{\substack{m \leq -2 \\ n \leq -1, n \neq \rho}}$$

$$= \det (\alpha_{ij})_{i,j \leq -1} \cdot \det (\beta_{ij})_{\substack{i \leq 0, i \neq -1 \\ j \leq -1}}$$

$$= \frac{\det (H_{11}(s) - H_{10}(s) H_{00}^{-1}(s) H_{01}(s))}{\det H_{00}(s)} \quad \left| \begin{array}{l} H_{11}(s) \text{ と } H_{10}(s) \text{ の } -1 \text{ 行目と} \\ \text{ } \vec{e}_{10}(s) \text{ と } \vec{e}_{10}(s) \text{ でおきか} \\ \text{えたもの。} \end{array} \right.$$

となり (i) が示せた。 $\vec{e}_j(s)$ をつかうと (i) のようにあらわせる。

(ii) は クラメル の 公式 そのもの (iii) は [8] を参照して下さい。 //

§3 osp - STL hierarchy

$\mathcal{H}(\infty|\infty)$ を $\mathbb{Z}_2$ -grade の入った 次のような Lie super 代数 とする。 $\mathcal{H}(\infty|\infty) = \mathcal{H}(\infty|\infty)_\pm \oplus \mathcal{H}(\infty|\infty)_\pm$ として

$$\mathcal{H}(\infty|\infty)_\pm = \left\{ A = \begin{bmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix} \mid A_{00}, A_{11} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) \right\}$$

$$\mathcal{H}(\infty|\infty)_\pm = \left\{ A = \begin{bmatrix} 0 & A_{01} \\ A_{10} & 0 \end{bmatrix} \mid A_{01}, A_{10} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) \right\}$$

より積は $[A, B] = AB - (-)^{ij} BA$ 但し $A \in \mathcal{H}(\infty|\infty)_\pm$
 $B \in \mathcal{H}(\infty|\infty)_j$

とする。次に super transpose " t " を定義する。

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\infty|\infty) \text{ に対し } {}^t A = \begin{bmatrix} {}^t A_{00} & {}^t A_{10} \\ -{}^t A_{01} & {}^t A_{11} \end{bmatrix}$$

とする。 $A \in \mathcal{H}(\infty|\infty)_\pm$, $B \in \mathcal{H}(\infty|\infty)_j$ としたとき

$${}^t(AB) = (-)^{ij} {}^t B {}^t A \text{ が成り立つ。 } J = ((-)^i \delta_{i,-j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$$

$K = \Lambda J$ とする。

$$P = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

Lie super 代数 $\text{osp}(\infty|\infty)$ を次で定義する。

定義 3.1

$$\mathfrak{osp}(\infty|\infty) = \{A \in \mathfrak{gl}(\infty|\infty) \mid {}^{\text{st}}P {}^{\text{st}}A P = -A\}$$

$$\mathfrak{osp}(\infty|\infty)_{\pm} = \mathfrak{osp}(\infty|\infty) \cap \mathfrak{gl}(\infty|\infty)_{\pm}$$

$\mathfrak{osp}(\infty|\infty)_{\pm}$ は $\mathfrak{o}(\infty) \oplus \mathfrak{sp}(\infty)$ に同型 (無限 Lie 代数 $\mathfrak{o}(\infty)$ と $\mathfrak{sp}(\infty)$ については [9] 参照) である。

定義 3.2

$$\mathfrak{osp}(Q) = \mathfrak{osp}(\infty|\infty) \otimes Q$$

$$\mathfrak{osp}(Q) = \mathfrak{osp}(Q)_{\pm} \oplus \mathfrak{osp}(Q)_{\pm} \quad \text{で}$$

$$\mathfrak{osp}(Q)_{\pm} = \bigoplus_{\mu+\nu \equiv \pm 1 \pmod{2}} \mathfrak{osp}(\infty|\infty)_{\pm} \otimes Q_{\pm}$$

よって Super Lie 群 $O_{sp}(\infty|\infty, Q)$ を定義する。

$$O_{sp}(\infty|\infty, Q) = \{A \in SGL(\infty|\infty, Q) \mid {}^{\text{st}}P {}^{\text{st}}A P = A^{-1}\}$$

$O_{sp}(\infty|\infty, Q)$ は $\exp(A) \quad A \in \mathfrak{osp}(Q)_{\pm}$ で生成される。

さて次の R-H 分解を考えよう。

$$\tilde{\Phi}_{+} = \exp(\theta^{+}\Lambda + x^{+}\Lambda^2 + \sum_{j \neq 0,1 \pmod{4}} t_j^{+} \Gamma^j)$$

$$\tilde{\Phi}_{-} = \exp(\theta^{-}\Gamma^{-1} + x^{-}\Gamma^{-2} + \sum_{j \neq 0,1 \pmod{4}} t_j^{-} \Lambda^{-j})$$

$\hat{W}_+, \hat{W}_-$ を same matrices とし

$$\hat{W}_+^{-1} \hat{W}_- = \tilde{\Phi}_+ A \tilde{\Phi}_-^{-1} \quad (3.1)$$

定理 3.1 (i) $A \in O_{sp}(\infty|\infty, A)$ なら $\hat{W}_\pm \in O_{sp}(\infty|\infty, S)$

(ii) 定理 2.1 において $\check{B}, \check{C} \in osp(S)_\perp$, $\check{B}_j \in osp(S)_j$, $\check{C}_j \in osp(S)_j$ $j \not\equiv 0, 1 \pmod{4}$

証明 (i) $\hat{W}_\pm \in O_{sp}(\infty|\infty, S)$ は R-H 分解の一意的性より従う。

(ii) $\tilde{A}$ を次で定義する。 $A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}$ とし

① $A_{ij} \in Mat(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, Q_{i+j})$ に対して

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} {}^t A_{00} & {}^t A_{10} \\ -{}^t A_{01} & {}^t A_{11} \end{bmatrix}$$

② 上の A で $A_{ij} \in Mat(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, Q_{i+j+1})$ のとき

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} {}^t A_{00} & -{}^t A_{10} \\ {}^t A_{01} & {}^t A_{11} \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$A \in \mathcal{H}(Q)_-, B \in \mathcal{H}(Q)_+ \quad \text{とする}$$

$$\tilde{\kappa}(AB) = (-1)^{ij} \tilde{\kappa} B \tilde{\kappa} A \quad \text{とする。}$$

(ii) を $B = (\hat{W}_+^* \wedge \hat{W}_+^{-1})_+$ について示す。

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} P \tilde{\kappa} (\hat{W}_+^* \wedge \hat{W}_+^{-1}) P &= \tilde{\kappa} P \tilde{\kappa} \hat{W}_+^{-1} \tilde{\kappa} \hat{W}_+^* P \\ &= \tilde{\kappa} P \tilde{\kappa} \hat{W}_+^{-1} P \tilde{\kappa} P \tilde{\kappa} \hat{W}_+^* P \\ &= \hat{W}_+^* \wedge \hat{W}_+^{-1}{}^* = (\hat{W}_+^* \wedge \hat{W}_+^{-1})^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

上式において $\hat{W}_+ \in O_{sp}(\infty|\infty, S)$, $\hat{W}_+^* \in O_{sp}(\infty|\infty)$ を用いてい
ることに注意。又 $\tilde{\kappa}$ は involutive ではないが $\hat{W}_+ \in O_{sp}(\infty|\infty, S)$
より $\hat{W}_+^{-1} \in O_{sp}(\infty|\infty, S)$ がいえる。

一方 $\mathcal{H}(\infty|\infty)$ における κ を $\mathcal{H}(Q)$ に形式的に適用すると

$$\kappa \text{ と } \tilde{\kappa} \text{ の関係は } A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(Q)_+ \quad \text{とすると}$$

$$\kappa A = \tilde{\kappa} A$$

$A \in \mathcal{H}(Q)_-$ のときは

$$\tilde{\kappa} A = -(\kappa A)^*$$

$$(3.2) \text{ より } \tilde{\kappa} P \tilde{\kappa} (\hat{W}_+^* \wedge \hat{W}_+^{-1}) P = (\hat{W}_+^* \wedge \hat{W}_+^{-1})^*$$

両辺に * をほどこして

$$\tilde{\pi} P * \tilde{\pi} (\overset{\vee}{\hat{W}}_+^* \wedge \overset{\vee}{\hat{W}}_+^{-1}) P = \overset{\vee}{\hat{W}}_+^* \wedge \overset{\vee}{\hat{W}}_+^{-1}$$

π と $\tilde{\pi}$ の関係から

$$\pi P \pi (\overset{\vee}{\hat{W}}_+^* \wedge \overset{\vee}{\hat{W}}_+^{-1}) P = - \overset{\vee}{\hat{W}}_+^* \wedge \overset{\vee}{\hat{W}}_+^{-1} \quad (3.3)$$

一般に $A \in \text{Mat}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ に対し

$$(\pi P \pi \overset{\vee}{A} P)_\perp = \pi P \pi (\overset{\vee}{(A)}_\perp) P \quad \text{より} \quad (3.3) \text{ の}$$

両辺の上 part をとって

$$\pi P \pi \overset{\vee}{B} P = -B \quad \text{これは } B \in \text{osp}(s)_\perp \text{ を示している。} //$$

方程式 (1.11) で $B \in \text{osp}(s)_\perp$, $C \in \text{osp}(s)_\perp$ なる条件

$$\text{は } u(s) = u(-s) + s \log(-1) \quad (3.4)$$

と同値。(3.4) に $u(s) = u(s+4)$ なる条件をつけ加えると (1.11)

は 次の方程式に reduce する。

$$u(1) = 2 \cosh u(1) \quad (3.4)$$

$f = \varepsilon(u(1))$ とすると f は

$$\partial_x + \partial_{x^-} f = -2 \sinh f \quad (3.5)$$

を満たす。(3.4) を super sine-Gordon 方程式という。

References.

1. M.Chaichian and P.P.Kulish: On the method of inverse scattering problem and Bäcklund transformations for supersymmetric equations. Physics Letters. 78B (1978), 413 - 416.
2. B.De Witt: Supermanifolds. Cambridge up. 1984.
3. M.Jimbo and T.Miwa: Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19(1983), 943-1001.
4. V.G.Kac: Lie super algebras. Adv. Math. 26(1977), 8-96.
5. D.A.Leites: Lie super algebras. J. Soviet Math. 30(6) (1985), 2481- 2512.
6. M.A.Olshanetsky: Supersymmetric two dimensional Toda lattice. Commun.Math.Phys. 88(1983), 63 - 76

7 K.Ikeda: to appear Letters in Mathematical physics

8 池田薫 都立大学修士論文

9. K.Ueno and K.Takasaki: Toda Lattice Hierarchy. Advanced Studies in Pure Math 4(1984). Group Representations and Systems of Differential Equations. 1 - 95.
10. K.Ueno and H.Yamada: Super Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and super Grassmann manifold. Lett. Math. Phys. 13 (1987). 59-68.
11. ——— : Supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and universal super Grassmann manifold. to appear in Advanced Studies in Pure Math. "Two - Dimensional Conformal Field theory and Exactly solvable Lattice Model".