

直観論的理論とトポス

九大 理 上江洲 忠弘

高階直観論理とトポスとの関係は, M. P. Fourman (1977), A. Boileau & A. Joyal (1981) 等によって明らかにされている. ここでは, 彼らのように, 高階直観論理の体系を考えることなく, Lawvere 流の“理論”の観点から, 直観論的理論とトポスとの関係を論ずる.

1. 圏に於ける変数

この章で導入される記法や結果は, 次章以下で断りなしに用いる.

C を有限積を持つ圏とし, V を変数の集まり, $*$ を変数に C の対象を対応させる対応関係とする. 変数 x に対応する C の対象 c_x を x の 変域 と呼ぶ.

V の各有限部分集合 $\{x_1, \dots, x_m\}$ に対し, 新しい対象

$\overline{\{x_1, \dots, x_m\}}$ も, $x_1^{\#}, \dots, x_m^{\#}$ の C に於ける積と同形になるように, C に添加する. このようにして得られる, 圏 C の拡張 $\overline{C}$ も, $V, \#$ に関する C 上の 変数系 という.

変数 $x_1, \dots, x_m$ に対し, $x_1^{\#}, \dots, x_m^{\#}$ の C に於ける積を $x_1^{\#} \times \dots \times x_m^{\#}$ で表し, 添加された対象 $\overline{\{x_1, \dots, x_m\}}$ から積 $x_1^{\#} \times \dots \times x_m^{\#}$ への同形射を $(x_1, \dots, x_m): \overline{\{x_1, \dots, x_m\}} \rightarrow x_1^{\#} \times \dots \times x_m^{\#}$ で表す. また, 射影は $\pi_i: \overline{\{x_1, \dots, x_m\}} \rightarrow x_i^{\#}$ で表す. 更に逆射は $(x_1, \dots, x_m)^{\leftarrow}: x_1^{\#} \times \dots \times x_m^{\#} \rightarrow \overline{\{x_1, \dots, x_m\}}$ で表す.

X が V の有限部分集合, A が圏 C の対象のとき, 変数系 $\overline{C}$ の射 $f: \overline{X} \rightarrow A$ を C 上の $v \rightarrow$ 射 と呼ぶ. $x \in X$ のとき x は f に含まれるという.

X, Y が共に V の有限部分集合で, $X \subseteq Y$ のとき, $X: \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ で次の図を可換にする $\overline{C}$ の射を表す.

$$\begin{array}{ccc} \overline{Y} & & \\ \downarrow X & \searrow \pi & \\ \overline{X} & \xrightarrow{\pi} & x^{\#} \end{array} \quad (x \in X)$$

$v \rightarrow$ 射 $f: \overline{X} \rightarrow A$, $g: \overline{Y} \rightarrow A$ に対し, $f \doteq g$ で次の図が可換であることを示す.

$$\begin{array}{ccc} \overline{X \cup Y} & \xrightarrow{\gamma} & \overline{Y} \\ \downarrow X & & \downarrow g \\ \overline{X} & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

$v \mapsto$ 射 $g_1: \overline{Y_1} \rightarrow A_1, \dots, g_n: \overline{Y_n} \rightarrow A_n$ に対し,

$$(g_1, \dots, g_n): \overline{Y_1 \cup \dots \cup Y_n} \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$$

で次の図を可換にする射を表す.

$$\begin{array}{ccc} \overline{Y_1 \cup \dots \cup Y_n} & \xrightarrow{Y_i} & \overline{Y_i} \\ (g_1, \dots, g_n) \downarrow & (i=1, \dots, n) & \downarrow g_i \\ A_1 \times \dots \times A_n & \xrightarrow{\pi_i} & A_i \end{array}$$

また, $y_1^\# = A_1, \dots, y_n^\# = A_n$ のとき

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ g_1 & \dots & g_n \end{pmatrix}$$

を代入といい, $v \mapsto$ 射

$$(x_1, \dots, x_m, y_{i_1}, \dots, y_{i_k}): \overline{\{x_1, \dots, x_m, y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}} \rightarrow x_1^\# \times \dots \times x_m^\# \times y_{i_1}^\# \times \dots \times y_{i_k}^\#$$

に対し,

$$(x_1, \dots, x_m, y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ g_1 & \dots & g_n \end{pmatrix}$$

は $v \mapsto$ 射

$$(x_1, \dots, x_m, g_{i_1}, \dots, g_{i_k}): \overline{\{x_1, \dots, x_m\} \cup Y_{i_1} \cup \dots \cup Y_{i_k}} \rightarrow x_1^\# \times \dots \times x_m^\# \times y_{i_1}^\# \times \dots \times y_{i_k}^\#$$

を表す. 但し, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ で, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ は互に異なる.

互に異なる変数 $y_1, \dots, y_n$ と, C の対象 A に対し, 冪 $A^{y_1^\# \times \dots \times y_n^\#}$ が C にあるとき, $v \mapsto$ 射 $f: \overline{X} \rightarrow A$ に対し

$$y_1 \cdots y_n \text{f} : \overline{X - \{y_1, \dots, y_n\}} \rightarrow A^{y_1^\# \times \cdots \times y_n^\#}$$

で、次の図を可換にする v 射を表す.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\{y_1, \dots, y_n\} \cup X} & \xrightarrow{X} & \overline{X} \\ (y_1, \dots, y_n, y_1 \cdots y_n \text{f}) \downarrow & & \downarrow \text{f} \\ y_1^\# \times \cdots \times y_n^\# \times A^{y_1^\# \times \cdots \times y_n^\#} & \xrightarrow{ev} & A \end{array}$$

この v 射 $y_1 \cdots y_n \text{f}$ も f からの $y_1, \dots, y_n$ に関する アブストラクト という.

v 射 $\text{f}: \overline{X} \rightarrow A$ と、変数の集合 $\{y_1, \dots, y_n\}$ に対し、
 $X \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$ のとき、 $\lambda y_1 \cdots y_n. \text{f} : y_1^\# \times \cdots \times y_n^\# \rightarrow A$ で
 次のような合成射を表す.

$$\begin{array}{ccc} y_1^\# \times \cdots \times y_n^\# & \xrightarrow{\lambda y_1 \cdots y_n. \text{f}} & A \\ (y_1, \dots, y_n) \nwarrow \downarrow & & \uparrow \text{f} \\ \overline{\{y_1, \dots, y_n\}} & \xrightarrow{X} & \overline{X} \end{array}$$

命題 (1) v 射 $\text{f}: \overline{\{x_1, \dots, x_m\}} \rightarrow A$ に対し、

$\text{f}(x_1, \dots, x_m) = \text{f}$ なる射 $f: x_1^\# \times \cdots \times x_m^\# \rightarrow A$ が一意に存在する.

(2) $1, \dots, m$ の置換 $i_1, \dots, i_m$ と、射 $g: x_{i_1}^\# \times \cdots \times x_{i_m}^\# \rightarrow A$ に対し、
 $\text{f}(x_1, \dots, x_m) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ なる射が一意に存在する.

$$(3) \quad g_1 \doteq g'_1, \dots, g_n \doteq g'_n \quad \text{ならば} \quad (g_1, \dots, g_n) \doteq (g'_1, \dots, g'_n).$$

特に, $(g_1, \dots, g_n)$ と $(g'_1, \dots, g'_n)$ との定義域が同じならば,

$$(g_1, \dots, g_n) = (g'_1, \dots, g'_n).$$

$$(4) \quad f \doteq f', \quad g_1 \doteq g'_1, \dots, g_n \doteq g'_n \quad \text{ならば},$$

$$f \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix} \doteq f' \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ g'_1 & & g'_n \end{pmatrix}.$$

$$(5) \quad \{y_1, \dots, y_n\} - \{x_1, \dots, x_m\} = \{y_1, \dots, y_k\} \quad \text{ならば}$$

$$f \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ g_1 & \dots & g_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m & y_1 & \dots & y_k \\ g_1(h_1, \dots, h_n) & \dots & g_m(h_1, \dots, h_n) & h_1 & \dots & h_k \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad y_1 \dots y_n \text{ ev}(y_1, \dots, y_n, x) = x.$$

$$(7) \quad \text{ev}(g_1, \dots, g_n, y_1 \dots y_n f) \doteq f \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}.$$

$$(8) \quad y_1 \dots y_n f = z_1 \dots z_n \left(f \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ z_1 & & z_n \end{pmatrix} \right),$$

但し, $y_1^* = z_1^*, \dots, y_n^* = z_n^*$, また, $z_1, \dots, z_n$ は $y_1 \dots y_n f$ に含まれない.

(9) $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ が互に異なり, $y_1, \dots, y_n$ が, $g_1, \dots, g_m$ のどれにも含まれないならば,

$$(y_1 \dots y_n f) \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ g_1 & \dots & g_m \end{pmatrix} = y_1 \dots y_n \left(f \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ g_1 & \dots & g_m \end{pmatrix} \right).$$

$$(10) \quad f \doteq f' \quad \text{ならば} \quad y_1 \dots y_n f \doteq y_1 \dots y_n f'.$$

(11) g を射影 $X: \overline{X \cup \{y_1, \dots, y_n\}} \rightarrow \overline{X}$ と v 射 $f: \overline{X} \rightarrow A$ との合成, g' を射影 $X': \overline{X' \cup \{y_1, \dots, y_n\}} \rightarrow \overline{X'}$ と v 射 $f': \overline{X'} \rightarrow A$ との合成とすると, $y_1 \dots y_n f = y_1 \dots y_n f'$ ならば $g = g'$.

定理 $F: C_1 \rightarrow C_2$ も関手, $\overline{C}_1$ を V_1 , $*$ に関する C_1 上の変数系, $\overline{C}_2$ を V_2 , ** に関する C_2 上の変数系とする. 更に, $V_1 \subseteq V_2$, V_1 の各変数 x に対し, $F(x^*) = x^{**}$ とする. このとき, F を, V_1 の各有限部分集合 X に対し, $F(\overline{X}) = \overline{X}$ となるように, $\overline{C}_1$ から $\overline{C}_2$ への関手に拡張すると,

$$(1) \quad F\left(f\left(\begin{matrix} y_1 & \dots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{matrix}\right)\right) = F(f)\left(\begin{matrix} y_1 & \dots & y_n \\ F(g_1) & & F(g_n) \end{matrix}\right),$$

$$(2) \quad F(y_1 \dots y_n f) = y_1 \dots y_n F(f).$$

2. 理論

クラス Σ に対し, Σ^* で Σ の元の有限列 (空も含む) の全体を表し, $\Sigma \mid \Sigma^+$ で $\sigma^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ ($\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$; $n=1, 2, \dots$) なる図形の全体を表す.

クラス Σ , 及び $\Sigma \mid \Sigma^+$ の部分クラス Π に対し, 次の条件をみたす 図 も (Σ, Π) 上の 理論 という:

(1) 対象のクラスは $(\Sigma \cup \Psi)^*$.

(2) $\Sigma \cup \Psi$ の元 $t_1, \dots, t_n$ に対し, 有限列 $t_1 \dots t_n$ は $t_1, \dots, t_n$ の積である. 射影は $\pi_i: t_1 \dots t_n \rightarrow t_i$ ($i=1, \dots, n$) で表す.

(3) Ψ の元 $\sigma^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ は σ を底, $\sigma_1 \dots \sigma_n$ を指数とする冪である. 評価射は $ev: \sigma_1 \dots \sigma_n \sigma^{\sigma_1 \dots \sigma_n} \rightarrow \sigma$ で表す.

Σ が唯一つの元だけからなり, Ψ が空集合のとき, (Σ, Ψ) 上の理論は, Lawvere の代数的理論である.

(Σ, Ψ) 上の理論 T に対し, Ψ から Σ への対応 $(): \Psi \rightarrow \Sigma$ と, 同形射 $CD: \gamma \rightarrow (\gamma)$ ($\gamma \in \Psi$) があるとき, T は $(): \Psi \rightarrow \Sigma$ 及び $CD: \gamma \rightarrow (\gamma)$ ($\gamma \in \Psi$) に関して Ψ -閉 であるという. $CD: \gamma \rightarrow (\gamma)$ の逆射を $DC: (\gamma) \rightarrow \gamma$ で表す.

命題 1. $(\Sigma, \Sigma \wr \Sigma^+)$ 上の理論で, $\Sigma \wr \Sigma^+$ -閉なるものは Cartesian-closed.

命題 2. $(): \Psi \rightarrow \Sigma$ 及び $CD: \gamma \rightarrow (\gamma)$ ($\gamma \in \Psi$) に関して Ψ -閉なる理論に於て, 変数 $x_1, \dots, x_m$ を含み, ψ 射 f, g に対し, $ev(x_1, \dots, x_m, DC(f)) = ev(x_1, \dots, x_m, DC(g))$

ならば $f \doteq g$.

証明. $ev(\bar{x}, DC(f)) \doteq ev(\bar{x}, DC(g))$ とする. §1 の命題の (6) と (10) より $DC(f) \doteq DC(g)$. DC は同形射であるから $f \doteq g$.

命題 3. (Σ, Ψ) 上の理論 T , 対応 $(\cdot): \Psi \rightarrow \Sigma$, T の射 $CD: \sigma^{\bar{\sigma}} \rightarrow (\sigma^{\bar{\sigma}})$, $Ap: \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \rightarrow \sigma$ ($\sigma^{\bar{\sigma}} \in \Psi$) に対し, CD 及び Ap が次の条件を満たすとする:

$$(1) \quad Ap(\bar{x}, CD(\alpha)) = ev(\bar{x}, \alpha).$$

(2) $Ap(\bar{x}, f) = Ap(\bar{x}, g)$ ならば $f = g$, 但し f, g には $\bar{x}$ のどの変数も含まれない.

このとき, $CD: \sigma^{\bar{\sigma}} \rightarrow (\sigma^{\bar{\sigma}})$ は同形射である. 即ち, T は Ψ -閉である.

証明. $DC = \lambda u. \bar{x} Ap(\bar{x}, u)$ とおく.

$$DC \circ CD(\alpha) = \bar{x} Ap(\bar{x}, CD(\alpha))$$

$$= \bar{x} ev(\bar{x}, \alpha) \quad (\because \text{条件 (1)})$$

$$= \alpha \quad (\because \text{§1 命題 (6)})$$

$$Ap(\bar{x}, CD \circ DC(u)) = ev(\bar{x}, DC(u)) \quad (\because \text{条件 (1)})$$

$$= Ap(\bar{x}, u) \quad (\because \text{§1 命題 (7)})$$

従って, 条件 (2) より $CD \circ DC(u) = u$.

(証明終)

命題3の条件(2)は、外延性公理に相当する。

3. Heyting 理論と直観論的理論

$\mathcal{T}$ も $(\Sigma, \Sigma \sqcup \Sigma^+)$ 上の理論とし、 Ω も Σ の元とする。更に、
 $\equiv: \bar{\tau} \bar{\tau} \rightarrow \Omega$ ($\bar{\tau} \in (\Sigma \cup \Sigma \sqcup \Sigma^+)^*$) を $\mathcal{T}$ の射とする。

以下、次のような記法を用いる：

1 で $(\Sigma, \Sigma \sqcup \Sigma^+)^*$ の空の元を表す。従って $11 = 1$ 。

$\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ で $\equiv: 11 \rightarrow \Omega$ を表す。

$\gamma: \bar{\phi} \rightarrow \Omega$ で $\text{true}(): \bar{\phi} \rightarrow \Omega$ を表す。ここに、 $\bar{\phi}$ は、 $\mathcal{T}$ 上の変数系の、変数の空集合 ϕ に対して添加された対象である。

$f \equiv g$ で $\equiv(f, g)$ を表す。

射 $\wedge: \Omega \Omega \rightarrow \Omega$ も $\wedge = \lambda uv. (uv) \equiv (\gamma, \gamma)$ で定義する。

$P \wedge Q$ で $\wedge(P, Q)$ を表す。

理論 $\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき、 $\mathcal{T}$ を 直観論的理論 という。

(I1) $\mathcal{T}$ の各対象 A に対し、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \lambda a. (a, a) \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ A A & \xrightarrow{\equiv} & \Omega \end{array}$$

は pullback である.

$$(I2) \quad \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ (true, true) \downarrow & & \downarrow true \\ \Omega\Omega & \xrightarrow{\quad} & \Omega \\ \wedge & & \end{array}$$

は pullback である.

(I3) 2つの射 $P: A \rightarrow \Omega$ と $Q: A \rightarrow \Omega$ に対して, $\neq$ 1 かつ, どんな射 $f: B \rightarrow A$ に対して $Pf = true_B$ と $Qf = true_B$ とが同値ならば, $P = Q$. 但し, $true_B: B \rightarrow \Omega$ は射 $B \rightarrow 1$ と射 $true: 1 \rightarrow \Omega$ との合成である.

条件 (I1), (I2), (I3) はそれぞれ次の条件と同等である:

(I1') 2つの $\vee$ -射 f, g に対して, $f \equiv g \equiv \top$ と $f \equiv g$ とは同値である.

(I2') 2つの $\vee$ -射 $P: \bar{X} \rightarrow \Omega$ と $Q: \bar{X} \rightarrow \Omega$ に対して, $P \wedge Q \equiv \top$ と $P \equiv \top$ かつ $Q \equiv \top$ とは同値である.

(I3') 2つの $\vee$ -射 $P: \bar{X} \rightarrow \Omega$ と $Q: \bar{X} \rightarrow \Omega$ に対して, $\neq$ 1 かつ, どんな代入 θ に対して $P\theta \equiv \top$ と $Q\theta \equiv \top$ とが同値ならば, $P = Q$, 但し $X \neq \emptyset$.

命題 1. T が直観的理論ならば、次のことが成り立つ。

$$(1) ((f \equiv g) \wedge P(\overset{x}{f})) \wedge P(\overset{x}{g}) = (f \equiv g) \wedge P(\overset{x}{f}).$$

(2) $P \wedge (f \equiv g) \doteq P$ ならば $P \wedge (xf \equiv xg) \doteq P$, 但し,
 x は P に含まれない.

$$(3) P \wedge \top = P.$$

$$(4) (P \wedge Q) \wedge R = (Q \wedge R) \wedge P.$$

$$(5) P \wedge (Q \equiv R) = P \wedge (P \wedge Q \equiv P \wedge R).$$

命題 1 の証明のために、次の補題を用える。

補題 一般の変数系に於いて、次の事が成り立つ。

(1) x_0 を変域が終対象である変数とするとき、 $v \mapsto$ 射
 $f: \overline{\phi} \rightarrow A$, $g: \overline{\phi} \rightarrow A$, $h: \overline{\{x_0\}} \rightarrow A$ が $f \doteq h$ かつ
 $g \doteq h$ をみたせば $f = g$ である。

(2) $f \doteq g$ で、 f と g とが同じ定義域を持つ $v \mapsto$ 射
 ならば $f = g$ である。

命題 1 の (1) の証明. x_0 を変域が 1 の変数とし、 f, g ,
 P の定義域をそれぞれ X, Y, Z とする。変数の集合 W を,
 $X \cup Y \cup (Z - \{x_0\}) = \phi$ のとき, $W = \{x_0\}$, そうでないとき,
 $W = X \cup Y \cup (Z - \{x_0\})$ と定める。 $v \mapsto$ 射 f', g', P' を

γ の定義域が $\overline{W}, \overline{W}, \overline{W \cup Z}$ で, $f \doteq f', g \doteq g', P \doteq P'$ なるものとする.

θ を $(\frac{y_1}{k_1} \dots \frac{y_n}{k_n})$ なる代入とし, どの $y_1, \dots, y_n$ も x とは異なつものとする.

今, $((f \doteq g') \wedge P'(\frac{x}{f'}))\theta \doteq \top$ とする. 条件 (I1'), (I2') より $f\theta = g'\theta$ かつ $P'(\frac{x}{f'})\theta \doteq \top$. SI の命題の (5) と $f\theta = g'\theta$ であることから $P'(\frac{x}{f'})\theta = P'(\frac{x}{g'})\theta$. 従つて, $P'(\frac{x}{f'})\theta \doteq \top$ より $P'(\frac{x}{g'})\theta \doteq \top$. 故に, $((f \doteq g') \wedge P'(\frac{x}{f'})) \wedge P'(\frac{x}{g'})\theta \doteq \top$. 従つて, 条件 (I3') より,

$$((f \doteq g') \wedge P'(\frac{x}{f'})) \wedge P'(\frac{x}{g'}) = (f \doteq g') \wedge P'(\frac{x}{f'}).$$

ところで, $f \doteq f', g \doteq g', P \doteq P'$ より

$$\begin{aligned} ((f \doteq g) \wedge P(\frac{x}{f})) \wedge P(\frac{x}{g}) &\doteq ((f \doteq g') \wedge P'(\frac{x}{f'})) \wedge P'(\frac{x}{g'}), \\ (f \doteq g) \wedge P(\frac{x}{f}) &\doteq (f \doteq g') \wedge P'(\frac{x}{f'}). \end{aligned}$$

従つて, $X \cup Y \cup (Z - \{x\}) = \emptyset$ のときは, 補題の (1) より, そうでないときは, 補題の (2) より,

$$((f \doteq g) \wedge P(\frac{x}{f})) \wedge P(\frac{x}{g}) = (f \doteq g) \wedge P(\frac{x}{f}).$$

(証明終)

命題 1 の (2) ~ (5) は (1) の場合と同様に 17 証明できる.

理論 T が条件 (I1) 及び命題 1 の (1) ~ (5) をみたすとき,

$\mathcal{T}$ を Heyting 理論 という.

命題 2. $\mathcal{T}$ が Heyting 理論ならば, 次の事が成り立つ.

- (1) $P \wedge Q = Q \wedge P$.
- (2) $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$.
- (3) $P \wedge P = P$.
- (4) 条件 (I3).

値域が Ω である v -射 $P_1, \dots, P_n, Q$ に対し, $P_1, \dots, P_n \rightarrow Q$ で $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \equiv P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge Q$ なることを示す. また, $\vdash Q$ で $Q \equiv \top$ なることを示す.

「 $\Gamma \rightarrow Q_1, \dots, \Gamma \rightarrow Q_n$ ならば $\Gamma \rightarrow Q$ 」ということ

$$\frac{\Gamma \rightarrow Q_1 \quad \dots \quad \Gamma \rightarrow Q_n}{\Gamma \rightarrow Q}$$

で表す.

命題 3. $\mathcal{T}$ が Heyting 理論ならば, 次の事が成り立つ.

- (1) $\vdash f \equiv f$.
- (2) $f \equiv g, P(f) \rightarrow P(g)$.

$$(3) \quad \frac{P_1, \dots, P_n \rightarrow Q}{P_1\theta, \dots, P_n\theta \rightarrow Q\theta},$$

但し, θ は任意の代入である.

$$(4) \quad \frac{\Gamma \rightarrow Q}{\Gamma' \rightarrow Q'},$$

但し, $Q \equiv Q'$ であり, また, Γ の各 $\mapsto$ 射 P に対し, $P \equiv P'$ となる $\mapsto$ 射 P' が Γ' にある. 更に, Γ や Q に含まれる変数は, Γ' または Q' に含まれる.

$$(5) \quad \frac{\Gamma \rightarrow Q \quad Q, \Gamma \rightarrow R}{\Gamma \rightarrow R},$$

但し, Q に含まれる変数は Γ または R に含まれる.

$$(6) \quad \frac{\Gamma \rightarrow P \quad \Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow P \wedge Q}.$$

$$(7) \quad \frac{P, \Gamma \rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \rightarrow R}, \quad \frac{Q, \Gamma \rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \rightarrow R}.$$

$$(8) \quad \frac{P, \Gamma \rightarrow Q \quad Q, \Gamma \rightarrow P}{\Gamma \rightarrow P \equiv Q}.$$

$$(9) \quad \frac{\Gamma \rightarrow f \equiv g}{\Gamma \rightarrow xf \equiv xg},$$

但し, x は Γ に含まれない.

命題 4. T は Heyting 理論であるとする.

(1) 次のような射 $\forall: \Omega^A \rightarrow \Omega$ が一意に存在する:

$$\frac{\Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow \forall x Q},$$

但し, $x^{\#} = A$ で, x は Γ に含まれない.

$$\frac{P(\frac{x}{t}), \Gamma \rightarrow Q}{\forall x P, \Gamma \rightarrow Q},$$

但し, t に含まれる変数は, $\forall x P, \Gamma$ 又は Q に含まれる. また, $x^{\#} = A$.

(2) 次のような射 $\exists: \Omega^A \rightarrow \Omega$ が一意に存在する.

$$\frac{\Gamma \rightarrow Q(\frac{x}{t})}{\Gamma \rightarrow \exists x Q},$$

但し, t に含まれる変数は, Γ 又は $\exists x Q$ に含まれる. また, $x^{\#} = A$.

$$\frac{P, \Gamma \rightarrow Q}{\exists x P, \Gamma \rightarrow Q},$$

但し, $x^{\#} = A$ で, x は Γ, Q に含まれない.

証明. (1) $\forall: \Omega^A \rightarrow \Omega$ を $\forall = \lambda \alpha. (\alpha \equiv x \gamma)$ で定義すればよい.

(2) $\exists: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ を $\exists = \lambda u v. (u \vee v \equiv u)$ とし, $\exists: \Omega^A \rightarrow \Omega$ を $\exists = \lambda \alpha. \forall w (\forall x (e v(x, \alpha) \supset w) \supset w)$ で定義すればよい.

射 $! : \Omega^B \rightarrow \Omega^B$ を次のように定義する:

$$! = \lambda \beta. b \forall x (ev(x, \beta) \equiv (b \equiv x)).$$

命題 5. $\mathcal{T}$ は直観論的理論であるとする. 次の図を考える.

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & 1 \\ h \downarrow & (i) & \downarrow true \\ A & \xrightarrow{P} & \Omega \end{array},$$

但し, $B \in \Sigma^* - \{1\}$, A は $\mathcal{T}$ の任意の対象である.

(1) 図 (i) が pullback ならば $P = \lambda a. \exists b (h(b) \equiv a)$.

(2) 次の2つの条件は同等である.

(a) $\models \exists ! b Q(c, b)$ なる射 $Q: C \times B \rightarrow \Omega$ に対し,
 $\models Q(c, g(c))$ なる射 $g: C \rightarrow B$ が一意に存在する.

(b) 任意の単射 $h: B \rightarrow A$ に対し, (i) を pullback とする射 $P: A \rightarrow \Omega$ が一意に存在する.

証明 (2) の (b) $\Rightarrow$ (a) のみを示す.

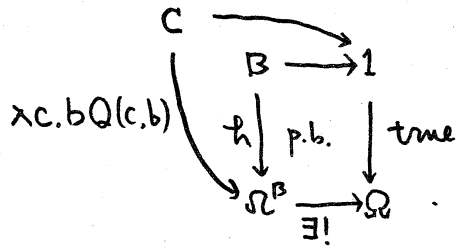
射 $h: B \rightarrow \Omega^B$ を $h = \lambda x. y (y \equiv x)$ と定義する. h は単射であるから, 条件 (b) より, (i) を pullback とする射 $P: \Omega^B \rightarrow \Omega$ が存在する. (1) より, $P = \lambda a. \exists b (h(b) \equiv \beta)$.
 $h(b) \equiv \beta = y (y \equiv b) \equiv y ev(y, \beta)$. 命題3の (1), (2) より,
 $y (y \equiv b) \equiv y ev(y, \beta) \rightarrow (y \equiv b) \equiv ev(y, \beta)$. 従って, $\forall$ の定義より,
 $y (y \equiv b) \equiv y ev(y, \beta) \rightarrow \forall y ((y \equiv b) \equiv ev(y, \beta))$. また, $\forall$ の

定義と, 命題3の(9)より $\forall y ((y \equiv b) \equiv ev(y, \beta)) \rightarrow y(y \equiv b) \equiv y ev(y, \beta)$.

従って, $y(y \equiv b) \equiv y ev(y, \beta) = \forall y ((y \equiv b) \equiv ev(y, \beta))$. 故に,

$\neg h(b) \equiv \beta = \forall y (ev(y, \beta) \equiv (b \equiv y))$. 即ち, $P = \exists!$.

よって, $\vdash \exists! b Q(c, b)$ とする. 可換な図



より, $h(g(c)) = b Q(c, b)$ なる射 $g: C \rightarrow B$ が存在し,

$h(g(c)) = b Q(c, b)$ ならば, $(g(c) \equiv b) = Q(c, b)$ 故 $\vdash Q(c, g(c))$.

従って, $\vdash Q(c, g(c))$ なる射 $g: C \rightarrow B$ が一意に存在する.

命題6. T は Heyting 理論であるとする. 射 $P: A \rightarrow \Omega$ に対し, $P = \lambda a. \exists b (h(b) \equiv a)$ なる射 $h: B \rightarrow A$ が存在するならば, T は直観論的理論である.

証明. 条件 (I3) が成り立つことも示せばよい. 今,

$P = \lambda a. \exists b (h(b) \equiv a)$, $Q = \lambda a. \exists c (k(c) \equiv a)$ と, 任意の射 $g: D \rightarrow A$ に対し, $Pg = true_D$ と $Qg = true_D$ が同値であるとする. $Ph = true_B$ であるから $Qh = true_B$, 即ち $\vdash \exists c (k(c) \equiv h(b))$. 従って, $\exists b (h(b) \equiv a) \rightarrow \exists c (k(c) \equiv a)$. 同様に, $\exists c (k(c) \equiv a) \rightarrow \exists b (h(b) \equiv a)$. 従って $P = Q$.

4. 高階直観論的理論とトポス

$\mathcal{T}$ が Heyting (又は直観論的) 理論で, 対応 $(\cdot): \Sigma \mathcal{L} \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ と射 $A_p: \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \rightarrow \sigma$ ($\sigma^{\bar{\sigma}} \in \Sigma \mathcal{L} \Sigma^+$) が条件

$$(C) \quad \forall \bar{x} \exists! y \text{ ev}(\bar{x}, y, \alpha) \rightarrow \exists! u \forall \bar{x} \text{ ev}(\bar{x}, A_p(\bar{x}, u), \alpha)$$

をみたすとき, $\mathcal{T}$ を 適用射 $A_p: \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \rightarrow \sigma$ ($\sigma^{\bar{\sigma}} \in \Sigma \mathcal{L} \Sigma^+$) をもつ 高階 Heyting (又は直観論的) 理論 という.

条件 (C) は次のスキーマと同等である:

$$\forall \bar{x} \exists! y P \rightarrow \exists! u \forall \bar{x} (P \left(\begin{smallmatrix} y \\ A_p(\bar{x}, u) \end{smallmatrix} \right)),$$

但し, u は P に含まれない.

定理 1. トポス $\mathcal{E}$ に対し, $\tilde{\mathcal{E}}$ を次のような圏とする.

(1) $\tilde{\mathcal{E}}$ の対象全体は $(\mathcal{E} \cup \mathcal{E} \mathcal{L} \mathcal{E}^+)^*$, 但し, $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ の対象全体のなすクラスである.

(2) $\mathcal{E}$ の対象 $A_1, \dots, A_n$ に対し, 列 $A_1 \cdots A_n$ は $\tilde{\mathcal{E}}$ に於て $A_1, \dots, A_n$ の積である. 但し, $n=0, 1, 2, \dots$.

(3) $\mathcal{E}$ の対象 $A, A_1, \dots, A_n$ に対し, $A^{A_1 \cdots A_n}$ は $\tilde{\mathcal{E}}$ に於て, A を底, $A_1 \cdots A_n$ を指数とする冪である. ($n=1, 2, \dots$)

(4) $\mathcal{E}$ は $\tilde{\mathcal{E}}$ の充満部分圏である.

このとき, $\tilde{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ と同等であり, また, $(\mathcal{E}, \mathcal{E} \mathcal{L} \mathcal{E}^+)$ 上の高階直観論的理論である. かかる $\tilde{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ に対して一意に存在す

る.

証明. 明らか.

定理 2. T が高階 Heyting 理論で,

- (1) $\models \exists! b Q(c, b)$ なる射 $Q: C \times B \rightarrow \Omega$ に対し,
 $\models Q(c, g(c))$ なる射 $g: C \rightarrow B$ が一意に存在し,
 (2) 各射 $P: A \rightarrow \Omega$ に対し, $P = \lambda a. \exists b (h(b) \equiv a)$ なる
 単射 $h: B \rightarrow A$ が存在する
 ならば, T はトポスである.

証明. $A_p: \sigma(\sigma^\sigma) \rightarrow \sigma$ ($\sigma^\sigma \in \Sigma \mathbb{I} \Sigma^+$) を T の通用射とす.
 条件 (C) より $\models \exists! u \forall x (A_p(x, u) \equiv ev(x, \alpha))$. 従って, 条
 件 (1) より, $\models \forall x (A_p(x, CD(\alpha)) \equiv ev(x, \alpha))$ なる射
 $CD: \sigma^\sigma \rightarrow |\sigma^\sigma|$ ($\sigma^\sigma \in \Sigma \mathbb{I} \Sigma^+$) が存在す. また, 条件 (C)
 より, $\forall x (A_p(x, u) \equiv A_p(x, v)) \rightarrow u \equiv v$. 従って, §2 命
 題 1, 命題 3 より, T は Cartesian-closed.

条件 (2) より, §3 命題 6 から, T は直観論的理論であつ.
 また, 条件 (1) と §3 命題 5 (2) とから, 各単射 $h: B \rightarrow A$
 ($B \in \Sigma^+$) に対し, 図 (i) が pullback となつような射 $P: A \rightarrow \Omega$
 が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & 1 \\ h \downarrow & (i) & \downarrow \text{true} \\ A & \xrightarrow{P} & \Omega \end{array}$$

条件 (1), (2) より, 各射 $P: A \rightarrow \Omega$ に対し, 図 11) を pullback とする単射 $k: B \rightarrow A$ が存在する.

従って, $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ は subobject classifier である.

故に, $\mathcal{T}$ はトポスである.

(証明終)

$\mathcal{T}$ が高階 Heyting 理論のとき,

$$\begin{aligned} (\exists x_1 \dots x_n) P & \text{ で } v \mapsto \exists z_1 \dots z_n P \left(\begin{matrix} x_1 & x_n \\ z_1^* & z_n^* \end{matrix} \right), \\ (\exists! x_1 \dots x_n) P & \text{ で } v \mapsto \exists! z_1 \dots z_n P \left(\begin{matrix} x_1 & x_n \\ z_1^* & z_n^* \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

を表す. ここに, $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n$ は互に異なる変数で, $z_1, \dots, z_n$ はいずれも P に含まれない. また, z_i^* は, x_i の変域が Σ の元の場合は z_i 自身, x_i の変域が $\Sigma \setminus \Sigma^+$ の元の場合は $\bar{u} A_P(\bar{u}, z_i)$ なるアブストラクトである.

値域が Ω の射 P, Q, G, G' に対し,

$$P(\bar{x}), Q(\bar{y}) \rightarrow G(\bar{x}, \bar{y}) \equiv G'(\bar{x}, \bar{y})$$

のとき, $G \sim_{P,Q} G'$ とする. $\sim_{P,Q}$ は同値関係である.

G を含む $\sim_{P,Q}$ に関する同値類を $\bar{G}: P \rightarrow Q$ で表す.

定理 3. $\mathcal{T}$ は高階 Heyting 理論とする. $\bar{\cdot}$ を次のような圏とする.

(1) 対象は, 値域を Ω とする $\mathcal{T}$ の射.

(2) P から Q への射は

$$P(x) \rightarrow (\exists! y)(G(x, y) \wedge Q(y))$$

なる G も含む $\widetilde{P, Q}$ に関する同値類 $\bar{G}: P \rightarrow Q$.

(3) 射 $\bar{G}: P \rightarrow Q$ と射 $\bar{H}: Q \rightarrow R$ の合成は

$$\lambda x y. (\exists y)(G(x, y) \wedge Q(y) \wedge H(y, z))$$

を含む $\widetilde{P, R}$ に関する同値類.

このとき, $\mathcal{T}$ はトポスである.

証明. $\mathcal{T}$ は, 定理 2 の条件 (1), (2) が成り立つように,
 $\mathcal{T}$ を拡張したものであるから, 明らか.

$\mathcal{T}$ が高階 *identifying* 理論で, $J: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$ は次の条件も満たす関手とする. 但し, $\mathcal{E}$ はトポスである.

(1) $\Sigma \cup \Sigma \cup \Sigma^+$ の元 $t_1, \dots, t_n$ に対し, $J(t_1 \dots t_n)$ は $J(t_1), \dots, J(t_n)$ の積で, 射影 $\pi_i: t_1 \dots t_n \rightarrow t_i$ に対し,
 $J(\pi_i): J(t_1 \dots t_n) \rightarrow J(t_i)$ は射影である.

(2) $J(\sigma^{\sigma_1 \dots \sigma_n})$ は底 $J(\sigma)$, 指数 $J(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ の冪で, 評価射 $ev: \sigma_1 \dots \sigma_n \sigma^{\sigma_1 \dots \sigma_n} \rightarrow \sigma$ に対し, $J(ev): J(\sigma_1 \dots \sigma_n \sigma^{\sigma_1 \dots \sigma_n}) \rightarrow J(\sigma)$ は評価射である.

(3) $J(true): J(1) \rightarrow J(\Omega)$ は *subobject classifier*.

(4) 適用射 $A_p: \sigma(\sigma^\sigma) \rightarrow \sigma$ に対し, $J(A_p): J(\sigma(\sigma^\sigma)) \rightarrow J(\sigma)$ は評価射である.

(5) $J(\equiv) : J(\tau\tau) \rightarrow J(\Omega)$ は同射である。即ち,

$$\begin{array}{ccc} J(\tau) & \longrightarrow & 1 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ J(\tau\tau) & \xrightarrow{J(\equiv)} & J(\Omega) \end{array}$$

は pullback である。

このとき, J を T の 論理モデル という。

定理 4. T は高階 Heyting 理論, $\bar{T}$ は定理 3 で定義されたトポスとする。 $I : T \rightarrow \bar{T}$ を次のような関手とする。

(1) T の各対象 A に対し, $I(A) = \text{true}_A$ 。

(2) T の各射 $f : A \rightarrow B$ に対し, $I(f) = \overline{\lambda xy. f(x) \equiv y} : \text{true}_A \rightarrow \text{true}_B$ 。

このとき, I は T の論理モデルである。

また, T の各論理モデル $J : T \rightarrow E$ に対し, $K \circ I = J$ なる論理関手 $K : \bar{T} \rightarrow E$ が, 同形に関して, 一意に存在する。

証明 明らか。

T_1, T_2 をそれぞれ, $(\Sigma_1, \Sigma_1, \Sigma_1^+)$, $(\Sigma_2, \Sigma_2, \Sigma_2^+)$ 上の高階 Heyting 理論とする。関手 $F : T_1 \rightarrow T_2$ が次の条件を満たすとき, F は H-関手であるという。

(1) $\sigma \in \Sigma_1$ ならば $F(\sigma) \in \Sigma_2$ 。

- (2) $\sigma^{\bar{\sigma}} \in \Sigma_1 \sqcup \Sigma_1^+$ ならば $F(\sigma^{\bar{\sigma}}) = F(\sigma)^{F(\bar{\sigma})}$.
- (3) $t_1, \dots, t_n \in \Sigma_1 \cup \Sigma_1 \sqcup \Sigma_1^+$ ならば $F(t_1 \dots t_n) = F(t_1) \dots F(t_n)$.
- (4) $F(\equiv : \tau\tau \rightarrow \Omega) = \equiv : F(\tau\tau) \rightarrow \Omega$.
- (5) $F(A_p : \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \rightarrow \sigma) = A_p : F(\bar{\sigma})(F(\sigma)^{F(\bar{\sigma})}) \rightarrow F(\sigma)$.

対象を small な高階 Heyting 理論とし, 射を H-関手の同形に関する同値類とする圏を HH で表す.

対象を small なトポスとし, 射を論理関手の同形に関する同値類とする圏を TT で表す.

定理 5. 定理 1 で定義した $\sim$ も, 関手 $\sim : TT \rightarrow HH$ に拡張し, 定理 3 で定義した $\dashv$ も, 関手 $\dashv : HH \rightarrow TT$ に拡張すると, $\dashv$ は $\sim$ の左随行関手である.

証明. 定理 4 より明らか.