自己変調モデルによる長時間相関の導出と経済現象への応用

高安　美佐子
公立はこだて未来大学システム情報科学部複雑系科学科
〒041-8655　北海道函館市亀田中野町 116-2
takayasu@fun.ac.jp

要旨　自己変調モデルとは、自分の履歴の移動平均値に対して乗算型でランダムに値が変化していくような確率過程である。金融市場の取引間隔のような点過程の場合には、間隔の分布がベキ乗則に従うことやパワースペクトルが 1/f に従うことが厳密に証明できる。自分の履歴にしたがって未来の振る舞いが影響を受けるため、結果として、長時間相関を持つようになり、定常過程と非定常過程のちょうど境目としての振る舞いを示すのである。市場は、直近の影響を受けやすいので、自己変調モデルがよく当てはまる典型的な例であるが、経済現象以外にもいろいろな応用が考えられている。

はじめに

エコノフィジックスの研究で解析されている高頻度の為替データには、取引発生に関する秒単位のタイムスタンプが付いているものがある。著書らは、価格の変動よりもより基本的な統計量として、取引発生の間隔の統計性を調べた[1]。取引の発生間隔は、図１及び図２のように長時間相関とベキ分布に近い裾野の長い分布によって特徴付けられる。

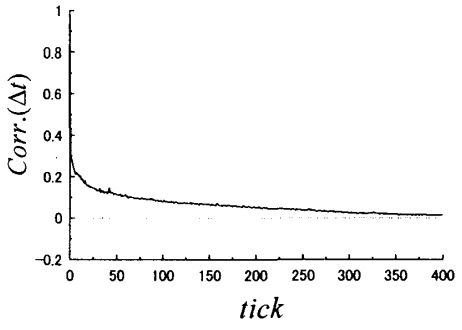


図１　取引間隔の自己相関関数

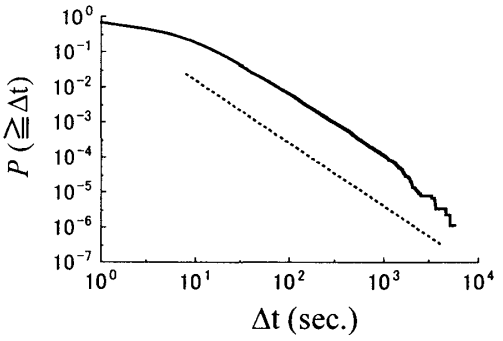


図２　取引間隔の累積分布

また、取引発生の事象のパワースペクトルは、図３のように 1/f スペクトルに従う。

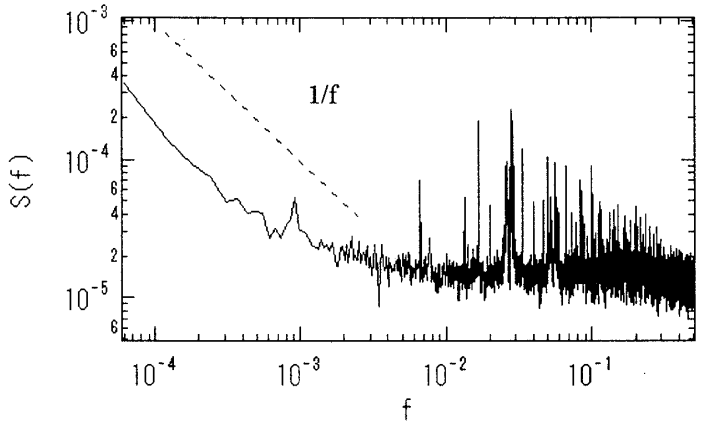


図３　取引発生事象のパワースペクトル

自己変調モデル

取引間隔を Δt としたとき、次のような変換を行う[2]。

$$\Delta t_{n+1} = \mu_n \overline{\Delta t_n} + f_n , \quad \overline{\Delta t_n} = \frac{1}{N}\sum_i \Delta t_i \qquad (1)$$

移動平均を適切に選ぶと、μ の自己相関は０になり、その分布は指数分布に従うことが確かめられる。すなわち、円ドルの為替取引の場合には、移動平均をおよそ２分間程度にすると、取引発生のゆらぎはポアソン過程に非常に近いものになることがわかる。

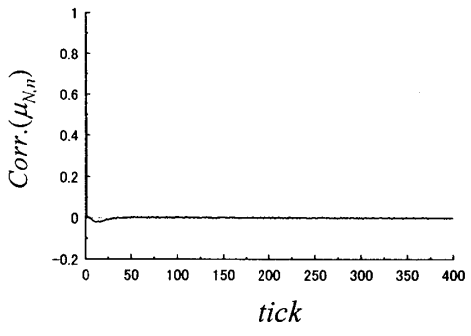


図４　μ の自己相関関数

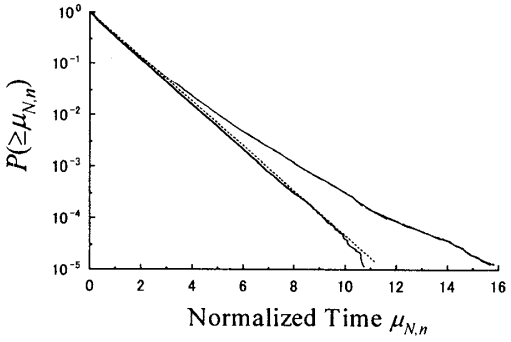


図５　μ の分布(下は約２分間の移動平均、上は約７分間の移動平均の場合の分布)

自己変調過程は、移動平均を直前の実現値のみによって与えられる極限的な場合には理論的に厳密な解析を行うことができる。すなわち、b と F を独立なランダムな変数としたときに、次のような確率過程を考える。

$$\Delta t_{j+1} = b_j \Delta t_j + F_j \qquad (2)$$

ここで、特性関数を導入する。

$$Z(\rho, j) \equiv < e^{-\rho \Delta t_j} > \qquad (3)$$

時間発展の確率的方程式から、次のように特性方程式の満たす関係式を導くことができる。

$$\begin{aligned} Z(\rho, j+1) &\equiv < e^{-\rho \Delta t_{j+1}} > \\ &= < e^{-\rho (b_j \Delta t_j + F_j)} > \\ &= < e^{-\rho b_j \Delta t_j} >< e^{-\rho F_j} > \\ &= Z(\rho, j)\Phi(\rho, j) \quad \text{ここで} \quad \Phi(\rho, j) \equiv < e^{i\rho F_j} > \end{aligned} \qquad (4)$$

時間に依存しない定常解を仮定し、特性関数を原点の周りで次式のように展開する。

$$Z(\rho) = 1 - c|\rho|^{\beta} + o(\rho^{\beta}), \qquad (5)$$

この形を代入すると、定常分布が次のように導かれる。

$$P(\geq \Delta t) \propto (\Delta t)^{-\beta} \quad \text{ただし、} \quad \Delta t >> 1 \qquad (6)$$

ここで、$< (b_j)^{\beta} >= 1$ であり、 $0 < \beta < 2$。

すなわち、取引間隔に相当する量は常にべき乗の分布に従い、その指数は、掛け算で導入される乱数の統計性だけから決まることがわかる[3]。また、特殊な場合として、$< b_j >= 1$ のとき、すなわち、直前の値が未来の値の期待値と一致する場合には、$< \Delta t_{j+1} >|_j = \Delta t_j$、が成立し、いわゆるジップの法則が成立することになる。

$$P(\geq \Delta t) \propto (\Delta t)^{-1}. \qquad (7)$$

さらに、このときのパワースペクトルを厳密に評価することができる。時系列を、$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \delta(t - t_j)$ とする。このとき、パワースペクトルは次式によって計算できる。

$$S(f)\equiv<|\hat{x}(f)|^2>=<\frac{1}{N}\sum_{j,k=1}^{N}e^{ift_j}\,e^{-ift_k}>$$

$$=1+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{N-n}{N}\{<e^{if\tau_n}>+<e^{-if\tau_n}>\} \qquad (8)$$

ここで、$\tau_n\equiv t_{j+n}-t_j=\Delta t_{j+n}+\Delta t_{j+n-1}+\cdots+\Delta t_{j+1}$. 多体の特性関数、$Z_n(\rho)\equiv<e^{-\rho\tau_n}>$ 、を導入すると、パワースペクトルは次のように表される。

$$S(f)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n(if)+Z_n(-if)) \qquad (9)$$

例えば、2 体の特性関数、$Z_2(\rho)\equiv<e^{-\rho(\Delta t_{j+1}+\Delta t_j)}>$、は、$\Phi(\rho)=1-\frac{<(F_j)^2>}{2}\rho^2+o(\rho^2)$ を持ちいると、次のように評価できる。

$$Z_2(\rho)=<Z_1((b_j+1)\rho)>\Phi(\rho)$$

$$\begin{aligned}&=1-c<(b_j+1)>|\rho|+o(\rho^1)\\&=1-2c|\rho|+o(\rho^1)\end{aligned} \qquad (10)$$

同じように評価をすると、一般に n 体の特性関数は、1 体の特性関数によって近似できる。

$$Z_n(\rho)=(Z_1(\rho))^n+o(\rho^1) \qquad (11)$$

この評価を（9）式に代入すれば、$f\to 0$ の極限で次の漸近形が成立する。

$$S(f)=1+\frac{Z_1(if)}{1-Z_1(if)}+\frac{Z_1(-if)}{1-Z_1(-if)}+o(f)\ \to\ \frac{2}{c}\cdot f^{-1} \qquad (12)$$

すなわち、パワースペクトルは 1/f に従うことがわかる[3]。

このように最も典型的な自己変調モデルにおいて、パワースペクトルが 1/f に従うことは、長時間相関が結果的に発生したことを意味しており、非常に興味深いことである。確率過程としては、自分の軌跡が将来の値に影響を与えるという効果を入れるだけで、無相関なランダムノイズから長時間相関を持った変動が生まれるのである。

自己変調モデルの応用

自己変調モデルによる時系列の解析を現在、脈拍のゆらぎ、インターネットの情報量のゆらぎに適用しており、為替の取引間隔の場合と同様にかなりうまく近似できることがわかってきている。また、市場データの解析でも、取引間隔だけでなく、価格の変動、特に、ボラティリティの長時間相関の発生の説明に有効であることがわかってきている。これらの成果に関しては、近い将来、論文としてまとめて発表する計画である。

参考文献

[1] Misako Takayasu, Hideki Takayasu, M. P. Okazaki,
Proceedings of "*Empirical Science of Financial Fluctuations*" in Tokyo.
(edited by H. Takayasu, Springer, 2001) 18-26.
"Transaction interval analysis of high resolution foreign exchange data"

[2] 高安美佐子
数理科学、2002、10月号、33-37
" 取引数のゆらぎと心理時間"

[3] Misako Takayasu and Hideki Takayasu
[**Physica** A324(2003), 101-107]
"Self-modulation processes and resulting generic 1/f fluctuations"