

Coupled Crisis Map (CCM) に見られる雪崩現象の解析

世古 千博, 斎藤 静司
(名古屋大学人間情報学研究科)

1. Introduction

複数のカオスアトラクターが存在する場合、それらを融合させることによってトラジェクトリーは各アトラクター間を遍歴する。こういった現象は crisis として知られている。crisis という概念は Grebogi, Ott, Yorke らによって提唱され、低次元系の crisis に関して精力的な研究がなされてきた。が、高次元の crisis に関してはほとんど分かっていないというのが現状である。

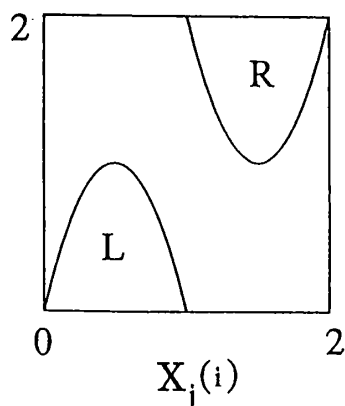
高次元空間におけるそのダイナミクスはどのようなものか？ 我々が興味あるのはこの点である。高次元 crisis のダイナミクスを解析するために1つの簡単なモデルを構成した。それは、crisis を引き起こす要素（セル）を多数個（250 個）1次元上に連結させたものである。各セルはその内部に2つのカオスアトラクター領域（L, R 領域）を持っており、crisis によって内部状態 X は L, R 間を遍歴する。（ $L \rightarrow R$, $R \rightarrow L$ へのスイッチング）L, R 領域のオーバーラップの度合はパラメータ a によって規定されており、あるセルの a の値は内部状態 X とそのセルに最近接のセルの内部状態 X から決められる。

このモデル内で様々な現象が観測される。その1つが、各セルにおいて $L \rightarrow R$, $R \rightarrow L$ へのスイッチングが一方に連鎖的（ドミノ倒し的）に起きる現象である。ここでは、この現象を雪崩現象と呼ぶことにする。本研究ではこの現象に着目し、詳しい解析を行う。

2. Model

我々が扱うモデルは図1(a)のセルを多数個1次元上に連結させることによって構成されている。各セルは2個の logistic map を組み合わせたものである。であるから、その内部に2つのカオスアトラクター（L, R 領域）を持っている。 a が 4.0 より小さい時は L 領域と R 領域はコンタクトしていない。つまり、分離されている。仮に、初期値を L 領域に選ぶと内部状態 X はいつまでも L 領域に留まっており、決して $L \rightarrow R$ へのスイッチングは起きない。

それに対して、 a が 4.0 より大きくなると L 領域と R 領域がコンタクトし、 $L \rightarrow R$ へのスイッチングが起きるようになる。このように a の値によって各セルの持つ性質が大きく変わる。



$$\begin{aligned} X_j(i+1) &= a_j(i)X_j(i)(1-X_j(i)) && \text{in L} \\ &= a_j(i)(X_j(i)-1)(X_j(i)-2)+2 && \text{in R} \end{aligned}$$

図1

j 番目のセルの a の値は次のようにして決められる。

$$\begin{aligned} &\text{if } X_j(i) \text{ is in L region} \\ &\quad \text{then } a_j(i)=4+d(xave-1) \\ &\quad \text{else } a_j(i)=4-d(xave-1) \end{aligned}$$

$$\text{where } xave=(X_{j-1}(i)+X_{j+1}(i))/2$$

即ち、あるセルの a の値はそのセルの内部状態 X とその最近接にあるセルの内部状態 X の平均値から決められる。ここで、パラメータ d は各セルが最近接のセルからどの程度影響を受けているか、あるいは最近接のセルにどの程度影響を及ぼしているかを表す量である。各セル間の結合の強さを表すパラメータである。様々な d の値についてシミュレーションを行った。

3. Results

(A) 系の振舞いに対する d 依存性

様々な d に対して各セルの内部状態 X がどのように時間発展していくのか調べた。各セルの内部状態 X はランダムに与えた。結果を図 2 (a)(b)(c) に示す。横軸は空間座標 (j) を表し、縦軸は時刻 (i) を表す。時刻 (i), 空間座標 (j) に対する内部状態 $X_j(i)$ の値は明るさで表現している。(明るい色ほど値は大きい。)

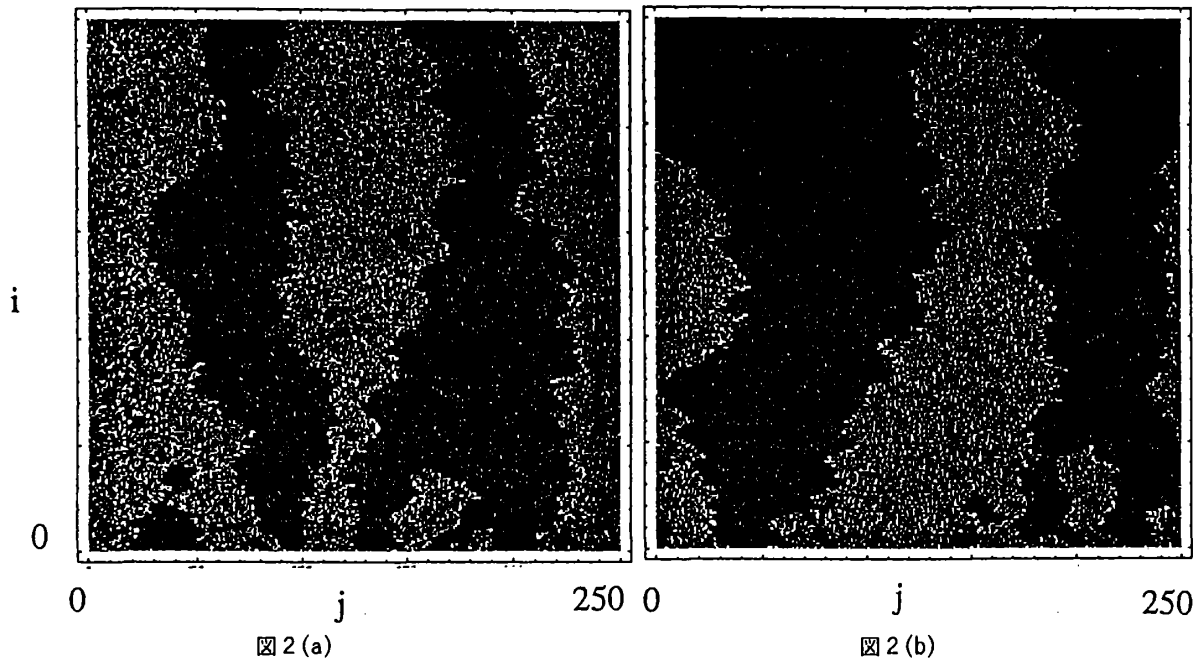
$d=0.90$ の場合(図 2 (a))

この場合、各セルは最近接のセルからあまり影響を受けない。つまり、各々のセルはほとんど独立に振舞う。モデル内で集団的な運動は見られない。

$d=1.30$ の場合(図 2 (b))

各セルが最近接から受ける影響が大きいため、初期状態における系のランダム性が長い間後を引く。つまり相互作用が強すぎるために、ある時刻 i で LRLRLRLR となっていたパターンが次の時刻 $i+1$ で RLRLRLRL と全体が反転するような状況が生じるのである。このため、初期値のランダム性は長い間保持されるのである。このように、周囲との相互作用が強すぎるモデル系においても集団的な運動は見られない。

5000



$d = 1.15$ の場合(図 2 (c))

相互作用が適度な大きさの場合には、先の 2 例にはない新しい現象が現れる。それは各セルにおける $L \rightarrow R$ ($R \rightarrow L$)へのスイッチングがあるセルからその隣のセルへと 1 方向に連鎖的 (ドミノ倒しの) に 現象である。この現象を雪崩現象と呼ぶことにする。

雪崩現象が起きる過程を調べると次のことが分かった。各セルにランダムに与えられた内部状態 $X_j(i)$ は時間発展と共にグループ化されていく。つまり、部分的にコヒーレントな状態が生成される。これが第一段階。そして、あるグループと隣のグループが接触することにより雪崩現象が起きる。グループ内のセルのコヒーレント性が高いほど (高次のオーダーまで各セルの内部状態 $X_j(i)$ が一致しているほど) 雪崩の規模は大きくなる。一方、コヒーレント性が低いと雪崩はグループに属するセルの途中で止まってしまい、小規模なものになる。

規模の分布については(B)で、隣のグループがある特定の値の場合にしか雪崩現象が起きないことを(C)で調べる。

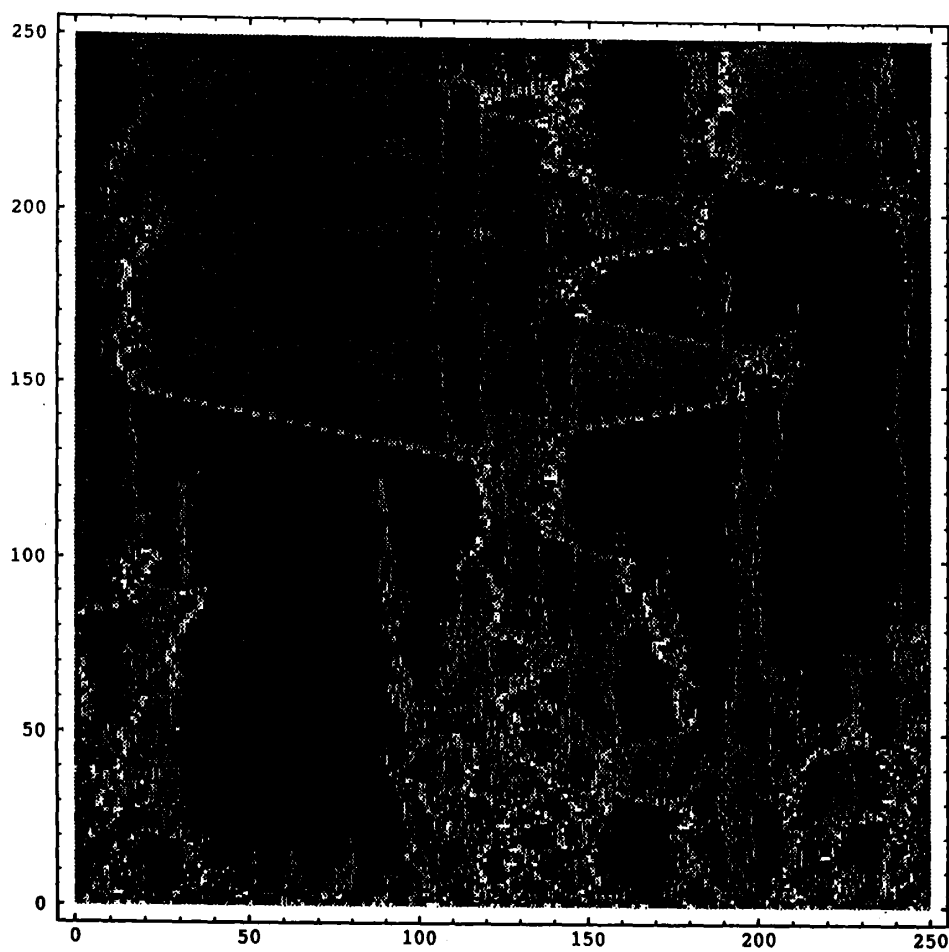


図 2 (c)

(B) 雪崩の規模の分布

$d = 1.15$ の場合について雪崩の規模の分布を調べた。雪崩の規模は $L \rightarrow R$, ($R \rightarrow L$) のスイッチングが連鎖的に起きたセルの個数 M と考えた。結果を図 3 に示す。

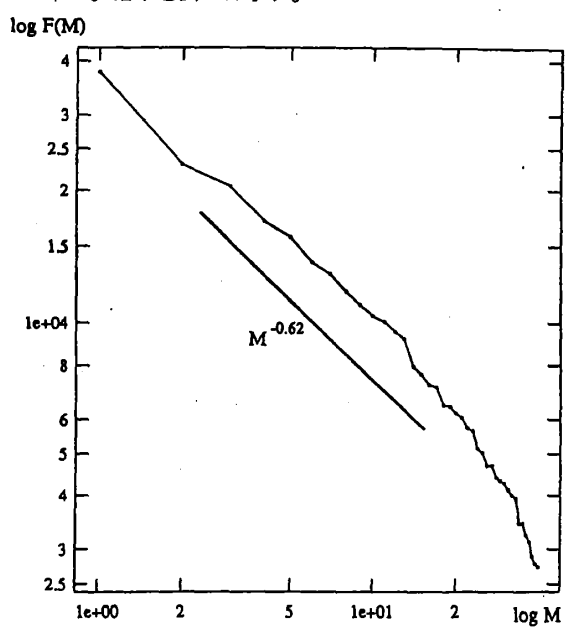


図 3

図 3 より、雪崩の規模は M のべき関数 M^α に従っていることがわかる。係数 α は 0.62 で地震学の分野でよく知られているグーデンベルグ・リヒター則の $\alpha = 2/3$ とよく一致する。

(C-1) 雪崩現象が起きる付近のパラメータ空間の構造

ある特定の雪崩に着目し、どのような場合に雪崩が起きるのか調べた。着目した雪崩は時刻 $i=4476$ に始まり、195, 196 番目のセルがその引き金になっている。195, 196 番目のセル以外のセルの内部状態 $X_j(4476)$ は固定し、195, 196 番目のセルの内部状態 $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ を変化させ、その後の系の時間発展を調べた。ある内部状態 $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ の組み合わせに対して雪崩が起きた場合、その組み合わせに対して値 1 を与える。起きなかった場合は値 0 を与える。図 4 に結果を示す。(値 1 は白に、値 0 は黒に対応している。)

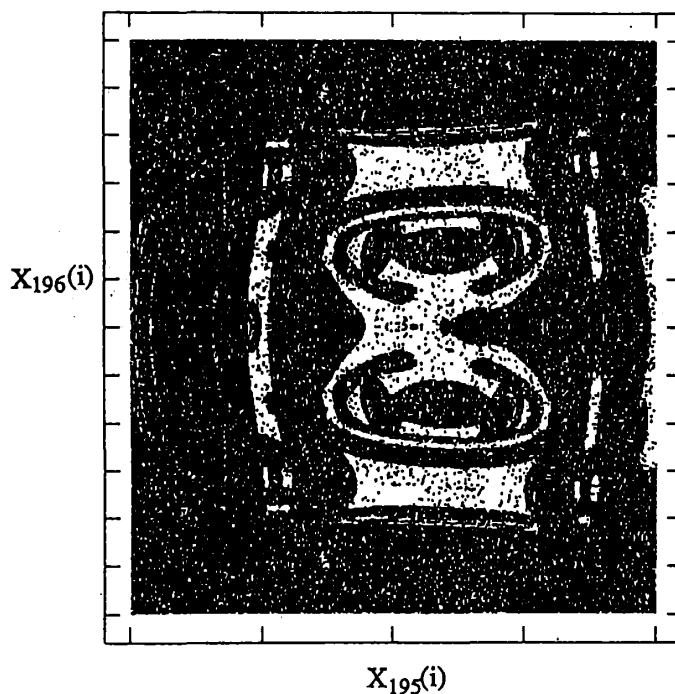


図 4

雪崩を起こす内部状態 $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ の集合はボイドを形成している。このことは、雪崩現象が起きる瞬間に外部からわずかな摂動を加えても雪崩が起きることを意味している。

(C-2) 雪崩の速度 (内部状態 X が R 領域に留まっているセルの個数の変化速度)

先程と同じように $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ 以外は固定し、 $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ をいろいろ変化させて、その後の系の時間発展を調べた。内部状態 $X_j(i)$ が R 領域に留まっているセルの個数の変化速度を調べた。結果を図 5 に示す。(変化速度が速いものほど明るい色で表した。)

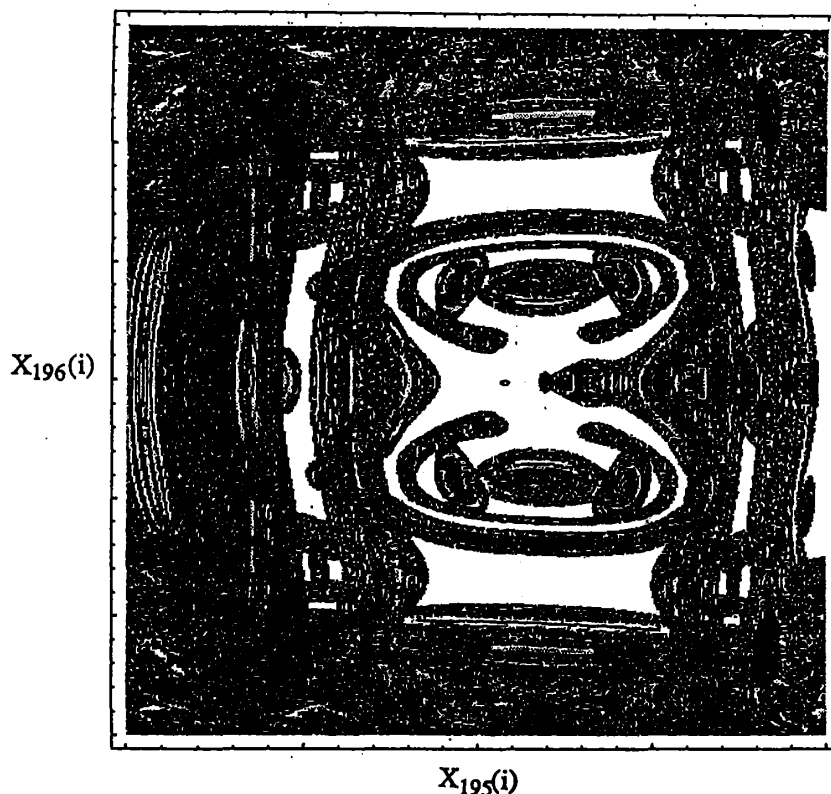


図 5

図 4 と図 5 を比較すると、非常によく似ていることがわかる。R 領域に留まっているセルの個数を急激に変化させる内部状態 $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ の集合と雪崩現象を引き起こす内部状態 $X_{195}(4476)$, $X_{196}(4476)$ の集合は密接に関連している。このことは、雪崩現象が実際に起きるか否かを早い段階から知ることが可能であることを示唆している。

4. Summary

- ① パラメータ d をある値にすると系全体が非常にゆっくりアトラクターに近づく。その過程で雪崩現象が間欠的に起きる。
- ② 雪崩の規模の分布はグーデンベルグ・リヒター則に良く合う。
- ③ 雪崩現象が起きる付近で雪崩を引き起こすパラメータ領域 $X_j(i)$, $X_{j+1}(i)$ はボイドを形成している。(雪崩現象の外部ノイズに対するロバスト性)
- ④ セルの個数を急激に変化させるパラメータの集合 $X_j(i)$, $X_{j+1}(i)$ は雪崩現象を引き起こすパラメータの集合 $X_j(i)$, $X_{j+1}(i)$ とほぼ一致する。(初期段階の情報で雪崩が発生するか否かを判定できる。)
- ⑤ ③, ④の結果は雪崩現象の Controlling 可能性を示唆している。

参考文献

- (1) K. Kaneko, *Physica* 41D, 137-172(1990).
- (2) C. Grebogi, E. Ott, and J. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1507-1510(1982);
C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Physica* 7D, 181-200(1983);
C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke, *Phys. Rev.* A36, 5365-5380(1987).

御質問、御意見、御批判, etc. ごさいましたら
e-mail m93131@info.human.nagoya-u.ac.jp までお願いします。