

Property P をもつ link について

上智大 理工 横山 和夫

§ 1. 序

PL 3次元 topology における次の問題を考えようというのが目的です。

[問題] 三次元球面 S^3 から互いに交わらないいくつかの solid torus を取り除き, それらをちがった方法で埋め直すことによって Poincaré の予想の反例を構成できないか?

この目的のために我々は次の様な link の問題を考える。

link $\ell = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_\mu \ (\subset S^3)$ に対して

$N(\ell)$ を S^3 における ℓ の正則近傍とすると, $N(\ell)$ は μ 個の solid torus $\bigcup_{i=1}^{\mu} D_i^2 \times S^1$ に位相同型である。任意の位相同型写像 $f_i: \partial D_i^2 \times S^1 \longrightarrow \partial N(k_i)$ を使って向き付け可能な compact で境界のない 3次元多様体

$$M = \overline{S^3 - N(\ell)} \cup_f \bigcup_{i=1}^{\mu} D_i^2 \times S^1$$

を構成する。ここに $f = \bigcup_{i=1}^{\mu} f_i$ は $\bigcup_{i=1}^{\mu} \partial D_i^2 \times S^1$ から

$\partial N(\ell)$ への位相同型写像である。もちろん M は link ℓ と位相同型写像 f に依存してきまる。我々はこれを $M(\ell, f)$ で表わす。

このとき link ℓ の各 component k_i の正則近傍 $N(k_i)$ の境界上の simple closed curve が $N(k_i)$ で 2-cell を bound するとき、その curve m_i を k_i の meridian と呼ぶ。また $N(k_i)$ の境界上の simple closed curve が $S^3 - N(k_i)$ で homologous に 0 ならば、その curve n_i を longitude ということにする。 $\partial N(k_i)$ 上で isotopy の範囲を除けば、もちろん m_i, n_i は unique である。そうすれば、ある点 $p \in S^1$ に対して $f_i(\partial D_i^2 \times \{p\})$ は $\partial N(k_i)$ 上の simple closed curve であるので $f_i(\partial D_i^2 \times \{p\}) = m_i^{p_i} n_i^{q_i}$ と一意的に表わせる。ここに p_i, q_i は整数である。今後簡単のために $f_i(\partial D_i^2 \times \{p\})$ を $f_i(\partial D_i^2)$ で表わす。

そして我々は上の問題を考えるために link ℓ に対して次のような定義を行なう。

Def. 1

link ℓ が Property P_a をもつとは

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi_1(M(\ell, f)) = 1$ であるためには、位相同型写像 f がすべての i について

$$f_i(\partial D_i^2) = m_i$$

を満たしていなければならない)。すなわち、 $\pi_1(M(l, f)) = 1$ になるためには、すべての solid torus を元の通りに埋めなおさなければならないということである。

Def. 2

link l が Property P_1 をもつとは

$\Leftrightarrow_{\text{def.}}$ $\pi_1(M(l, f)) = 1$ であるためには、位相同型写像 f において、

$$\exists i_0 \ (1 \leq i_0 \leq \mu) ; f_{i_0}(\partial D_{i_0}^2) = m_{i_0}$$

を満たしていなければならない。すなわち、 $\pi_1(M(l, f)) = 1$ になるためには、少なくとも一つの solid torus は元の通りに埋めなおさなければならないということである。

Def. 3

link l が Property P^* をもつとは

$\Leftrightarrow_{\text{def.}}$ $\pi_1(M(l, f)) = 1$ なる任意の位相同型写像 f に対して向き付け可能な compact で境界のない 3 次元多様体 $M(l, f)$ は 3 次元球面 S^3 である。

このとき、Property P^* をもつ link l は「問題」をみたすような（すなわち Poincaré の反例になるような）3 次元多様体は作れないということになる。

逆に全ての向き付け可能な compact で境界のない 3 次元多

様体は上のような方法で構成できることは分る。こゝで [7] ので、もしも全ての link が Property P^* をもてば Poincaré の予想は成立する。

Property P_0 と Property P_1 は component が 1 つの場合、すなわち knot の場合は同じになるが、この時我々は knot が Property P をもつという。そして Bing の [1] [2] [4] [5] によつて、色々な knot が Property P をもつことが示されている。この概念を link にまで拡張したものが上の定義である。

§ 1. Property P^* について.

Property P^* については、前回にも述べたのであるが、ここでは - 応結果だけを上げておくことにする。

Theorem 1

l_1, l_2 ; Property P^* をもつ link のとき l_1 と l_2 の任意の product $l_1 \cdot l_2$ も Property P^* をもつ。

この定理の証明のためには次の二つの Lemma が本質的である。その Lemma を述べる前に言葉の説明を行なう。

次にあげるように (図 1 を参照されたい) 簡単にからみあつてゐる link O_1, O_2, O_3 を考える。

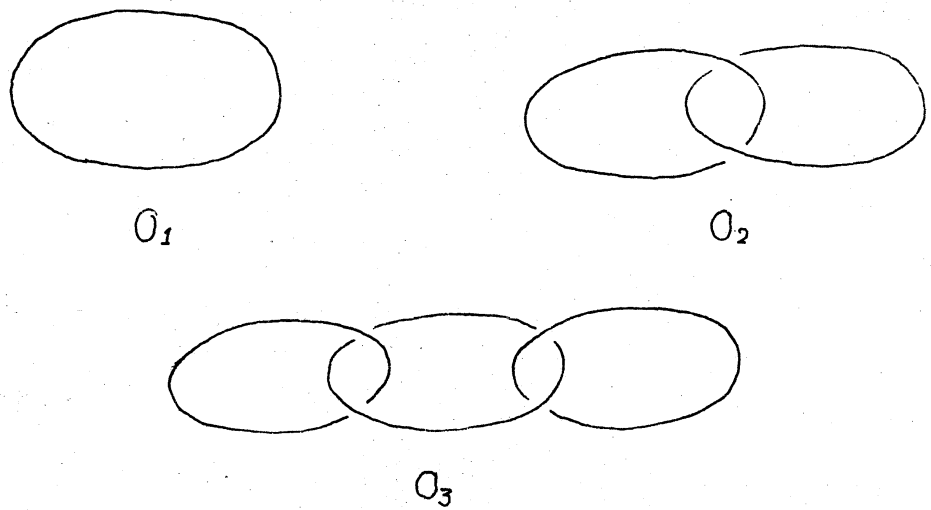


図 1

Lemma 1

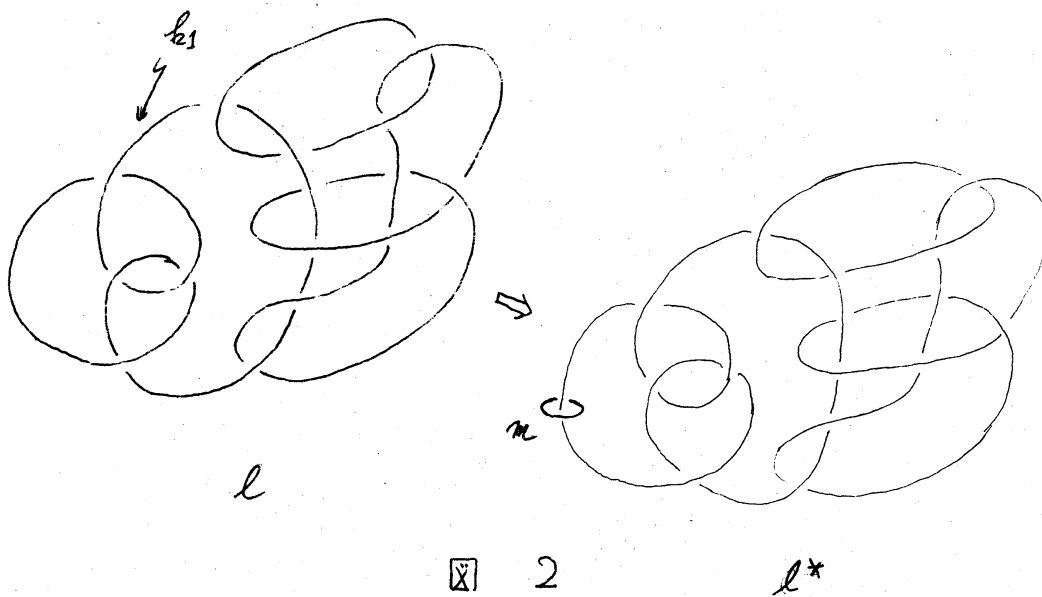
link O_1, O_2, O_3 はそれぞれ Property P^* を持つ。

link $l = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n (\subset S^3)$ に対して、 $k_2 \cup k_3 \cup \dots \cup k_n$ とは交わらない S^3 における k_1 の正則近傍を $N(k_1)$, solid torus $N(k_1)$ の meridian を m とする。その時、我々は新しい link $m \cup k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$ を考えることができる。この link を我々は l^* で表わす。図 2 を参照されたい。その時

Lemma 2

l ; Property P^* を持つ link

$\Rightarrow l^*$ も Property P^* を持つ link.



この定理の簡単な系として次のようなことが分かる。

Corollary

すべての torus link は Property P^* をもつ。

その他、簡単な link については定理を使うと Property P^* をもつことが分かる。詳細については [6] を参照して下さい。

§2. Property P_0 と Property P_1 について

準備としてまず次のような記号を導入する。

S^3 の中に互いに交わらない 3-ball を標準的に embed して、その中に knot k_1 と k_2 を図 3 のようにそれぞれの 3-ball

に *proper* に *embed* しておく。そして図3のように単純にからませることができる link を我々は $k_1 \cup k_2$ と表わす。そのとき次の結果が成り立つ。

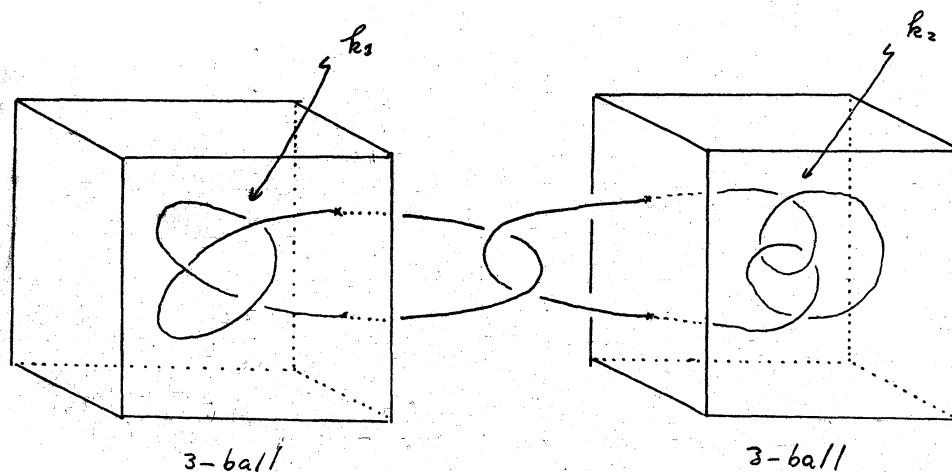


図 3

Theorem 2

k_1, k_2 が Property P を持つ knot

$\Rightarrow l = k_1 \cup k_2$ は Property P_a を持つ

[証明の outline]

次の図4のような genus 1 の surface F を考え、3次元球面 S^3 が F によって分けられる2つの領域のうち、link l を含む方の closure を A とすると A は solid torus である。この solid torus A の meridian を μ_A とすると、knot k_1 が Property P を持つことにより、 A は link l の正

則近傍を取り除き、 $\pi_1(M(\ell, f)) = 1$ になるような位相同型写像 $f = f_1 \cup f_2$ により、2 つの solid torus を埋めこんで A より得られる境界として F をもつ次元多媒体 (すなわち、 $\overline{M(\ell, f) - S^3 - A}$) を A' とすると、 A' は homotopy solid torus でかつ μ_A を boundary としてもつ 2-cell が A' 内に存在することが分かる。

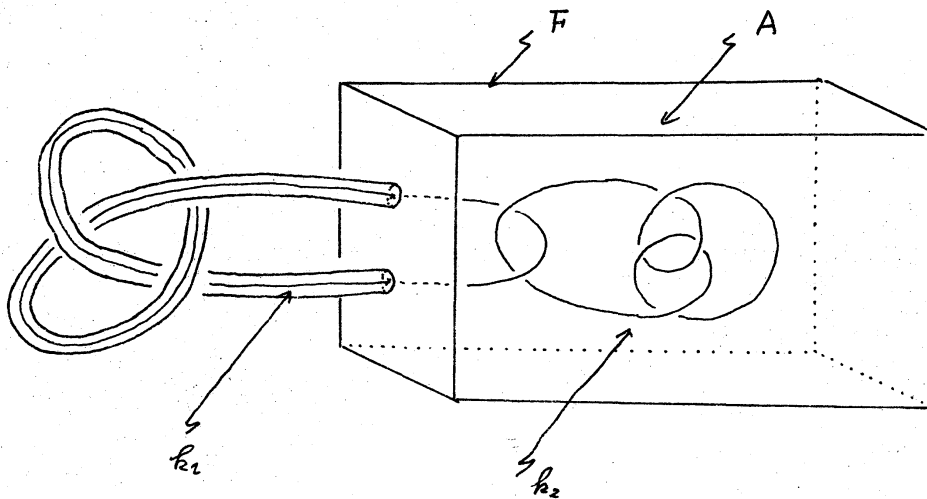


図 4

この 2-cell と $f_1(\partial D_1^2 \times S^1)$ との交わりを考え、 A' 内で 2-cell を isotopic に動かして、この交わりを簡単にし、さらにこの 2-cell と $f_2(\partial D_2^2 \times S^1)$ との交わりも A' 内で 2-cell を isotopic に動かして簡単にする。すると f_1 により、solid torus が元通りに埋めこまれていると仮定し、そして $f_2(\partial D_2^2) = m_2 \mu_2 \nu_2$ とおくと $|\mu_2| = 1$ ということが分かる。ここに μ_2, ν_2 は solid torus $N(k_2)$ のそれぞれ

meridian, longitude である。

同様に solid torus $N(k_1)$ の meridian, longitude をそれぞれ m_1, n_1 とおき、そして $f_1(\partial D_1^2) = m_1^{p_1} n_1^{q_1}$ とする。すると f_2 によ、この solid torus が元通りに埋めこまれていないとすると $|p_1| = 1$ ということになる。

A より k_1 だけの正則近傍 $N(k_1)$ をとりのでき、 f_1 によって solid torus $D_1^2 \times S^1$ を埋めこんで A より得られる 3 次元多様体を $\tilde{A}$ とすると、 $f_1(\partial D_1^2) = m_1^{p_1} n_1^{q_1}$, $\varepsilon = \pm 1$ ということによって、 $\tilde{A}$ は solid torus である。そして solid torus $\tilde{A}$ の中に knot k_2 は次の図 5 のように embed している。

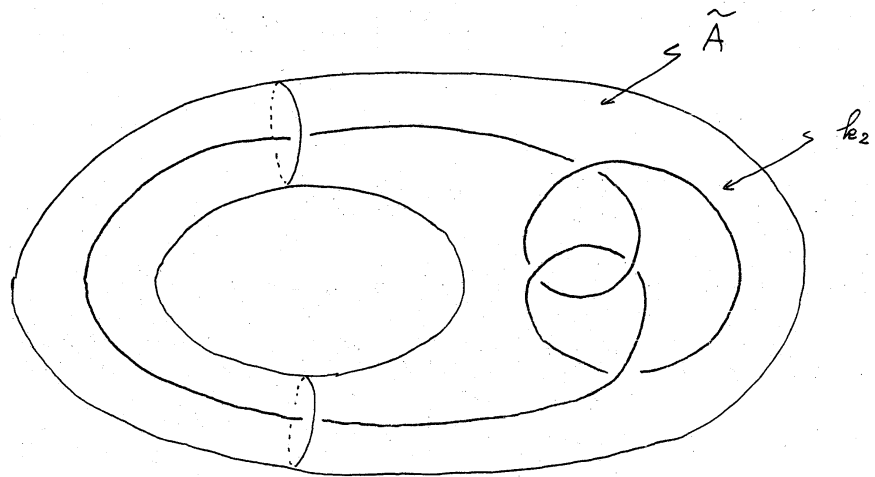


図 5

よ、で、最後に knot k_1 と knot k_2 の product $k_1 \cdot k_2$ が Property P をもつことによ、で、 f_2 は元の通りに solid torus

を埋めこんでいなければならぬことが分かる。すると f_1 が元の通りに埋めこんでいなければならぬことは明らかになる。

色々な knot が Property P をもつことは分かる。このので、この定理によつて $\mu=2$ の時 Property P_a をもつ link が存在することが分かる。 $\mu \geq 3$ の時も同様の証明を行なえば次の図 6 のような link は Property P_a をもつことが分かる。但し各 knot k_i は Property P をもつものとする。



図 6

次に, knot k に対して $\sharp$ -unknotting number なるものを定義する。

Def. 4

knot k ($\subset S^3$) に対して, 十分大きな n をとれば, 次の条件をみたす trivial link $O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n$ ($\subset S^3$) が存在する。

① 任意の i ($1 \leq i \leq n$) について, k と O_i との linking number $lk(k, O_i) = 0$ である。

② $k \cup O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n$ の complement は, ある trivial knot O が存在して, $O \cup O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n$ の complement と位相同型である。

このような n の最小数を knot k の $\sharp$ -unknotting number といい, $\sharp(k)$ で表わす。図 7 参照

明らかに普通の意味の unknotting number より小さいことは分かる。

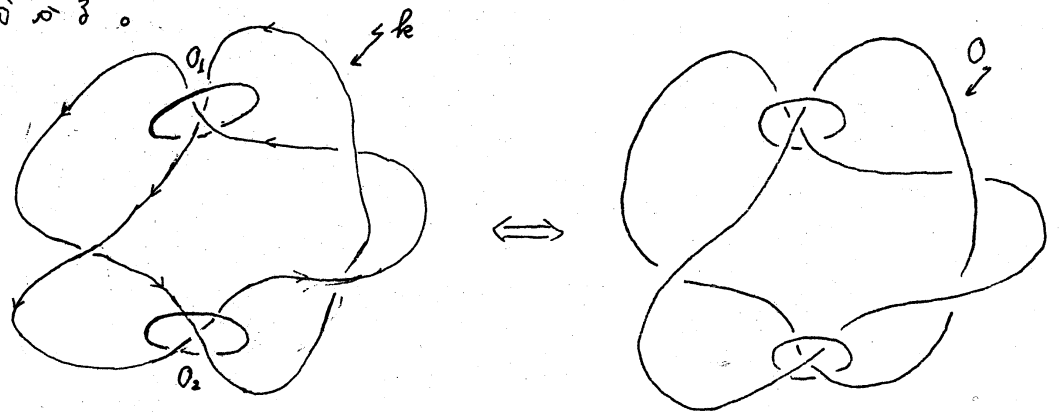


図 7

Def. 5

knot k が Property P_T をもつとは

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (1) trivial knot $O_1 (\subset S^3)$ が存在して、定義 4 の ①

② をみたす ($\#(k) = 1$)。そして $\overline{S^3 - N(O_1)}$ は solid torus である。これを T で表わすと、 $S^3 \supset T \supset k$ である。そして

(2) $\pi_1(M(k, f)) = 1$ なる位相同型写像 f に対して

$$\widehat{T} = \overline{T - N(k)} \cup_f D^2 \times S^1$$

は homotopy solid torus である。

すると簡単に次のことが示される。

Proposition

component が 2 つの component が unknot,かつ linking number $lk(k_1, k_2) = 0$ である trivial でないすべての link $l = k_1 \vee k_2$ が Property P_I をもつ。

$\Leftrightarrow$ すべての $\#(k) = 1$ である knot が Property P をもつ。

$\Leftrightarrow$ すべての $\#(k) = 1$ である knot が Property P_T をもつ。

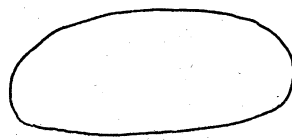
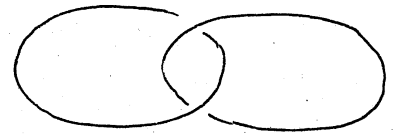
Corollary

trivial でない knot k_1 の正則近傍を N とする。また条件 ① $lk(\partial D^2, k) = 0$ ② k は $D^2 \times S^1$ で trivial でない。
③ k は S^3 で trivial。をみたす knot k が標準的に S^3 内にある solid torus $D^2 \times S^1$ に embed していきとす。 k を

$D^2 \times S^2$ から N の $\pm$ への位相同型写像とすると, knot $k(l) \subset S^3$ は Property P を持つ。

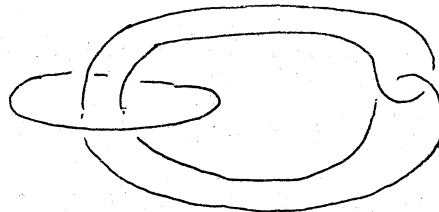
§3. Examples.

[Example 1] Property P_1 をもたないが Property P^* をもつ link の例として次のような link がある。

 O_1  O_2  O_3

link l が Property P_a をもてば Property P_1 をもつことは明らかであるが、逆に次のような例によって成立しない。

[Example 2] Property P_a をもたないが Property P_1 をもつ link.



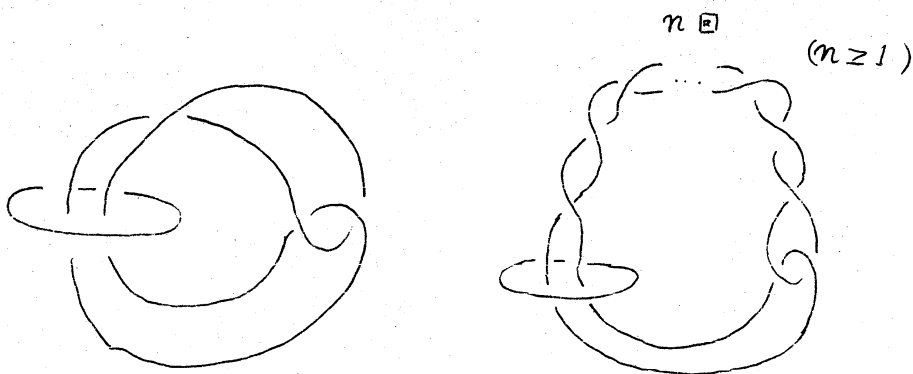
この link が Property P_a をもたないことは、一方を元通りに埋めると、もう一方は knot しているのだから、 $f_2(\partial D_2^2) = m_2^{P_2} n_2^{\delta_2}$ で $|\delta| = 1$ であればいつも $\pi_1(M(\ell, f)) = 1$ となる。で、 ℓ が Property P_a をもたないことが分かる。

次に $f_1(\partial D_1^2) = m_1^{P_1} n_1^{\delta_1}$ とすれば、linking number が 0 ということから $\delta_1 = 0$ 又は $|\delta_1| = 1$ となる。 $|\delta_1| = 1$ のときは doubled knot が全て Property P をもつことから ℓ が Property P_1 をもつことは分かる。

この例は component は 2 つとも knot しているが Property P_1 をもつことがあることを示している。

Property P をもたないが Property P^* をもつ knot は trivial knot しか知られている。では Property P_1 をもたないが、Property P^* をもつ link は各 component が unknot なのものだけだろうか？ これは次のような例によって否定される。

[Example 3]



References

- [1] R.H. Bing & J.M. Martin ; Cubes with knotted holes ,
Trans. Amer. Math. Soc., 155 (1971) 217 - 237.
- [2] F. González-Acuña ; Dehn's construction of knots, Bol.
Soc. Mat. Mexicana, 15 (1970) 58 - 79.
- [3] J. Hempel ; Construction of orientable 3-manifolds ,
Topology of 3-manifolds, Prentice-Hall, 1962.
- [4] ——— ; A simply connected 3-manifold is S^3 if it
is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot,
Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964) 154 - 158.
- [5] J. Simon ; Some classes of knots with Property P ,
Topology of Manifolds' 1970, Markham, 195 - 199.
- [6] K. Yokoyama ; On links with Property P^* , (to appear)
- [7] A.H. Wallace ; Modifications and cobounding manifolds,
Canad. Jour. Math., 12 (1960) 503 - 528.