

空間 $B_{p,\mu}(R^N)$ における跡作用素について.

広島大 総合科 板野 暢之

$\mathcal{H}_{(m)}(R^N)$ はユークリッド空間 R^N での緩増加超関数 $u \in \mathcal{S}'(R^N)$ で, その Fourier 変換 $\hat{u}$ が局所可積分関数, かつ

$$\int_{R^N} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^m d\xi < \infty$$

となる u 全体の作る空間である. これは temperate weight function μ として $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ とした場合の空間 $H^m(R^N)$ である. $\mathcal{H}_{(m,\delta)}(R^N)$ も $H^m(R^N)$ の特殊な場合であり, これは偏微分方程式論でよく使われてくる基礎空間である.

$m > \frac{1}{2}$, $l \leq m - \frac{1}{2}$ より小さい最大整数とすると, 写像

$$\mathcal{H}_{(m)}(R^N) \ni u \rightarrow (u(x,0), \dots, \frac{\partial^l}{\partial x_N^l} u(x,0)) \in \prod_{j=0}^l \mathcal{H}_{(m-j-\frac{1}{2})}(R^N)$$

は epimorphism であることが知られている.

== 2 == は, 空間 $B_{p,\mu}(R^N)$ ($B_{2,\mu}(R^N) = H^m(R^N)$) において跡作用素を中心として研究し, 超関数の筆跡, section との関係が明らかになった. とくに上記に対応する trace mapping が, epimorphism に与える簡単な十分条件を求めた.

R^N とその共役空間 R^N の任意の点 $x = (x_1, \dots, x_N)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$

とし、そのスカラー積を $\langle x, z \rangle = \sum x_j z_j$, x の長さ $|x| = (\sum x_j^2)^{1/2}$ とする。微分演算子 $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ に対して $D = (D_1, \dots, D_N)$ とおき、多項式 $P(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$ に対して $P(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$, $\bar{P}(z) = \sum \bar{a}_\alpha z^\alpha$, $\tilde{P}_p(z) = \left\{ \sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(z)|^p \right\}^{1/p}$ とおく。 $p \geq 1$ のとき $P^{(\alpha)}(z) = i^{|\alpha|} D^\alpha P(z)$ である。

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の任意の元 ϕ に対して、その Fourier 変換を

$$\hat{\phi}(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) e^{-i\langle x, z \rangle} dx$$

とし、 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ の Fourier 変換は

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

で定義する。

$\mathbb{Z}^N$ 上で定義された正值連続関数 $\mu(z)$ が

$$\mu(z+\eta) \leq C(1+|z|)^k \mu(z), \quad z, \eta \in \mathbb{Z}^N$$

を満たす定数 C, k が存在するとき、 μ は temperate

weight function と呼ばれる。 μ_1, μ_2 が temperate weight

function ならば、 $\mu_1 + \mu_2, \mu_1 \mu_2, 1/\mu_1$ は temperate weight

function である。 $C_1 \leq \mu_1/\mu_2 \leq C_2$ なる定数 C_1, C_2 が存

在するとき、 μ_1, μ_2 は同値と見て $\mu_1 \sim \mu_2$ と記す。

$1 \leq p \leq \infty$ とし、 μ は temperate weight function とする。 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ で $\hat{u}(z)$ が局所可積分関数、かつ

$$\|u\|_{p, \mu} = \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int |\hat{u}(z) \mu(z)|^p dz \right)^{1/p} < \infty$$

となる u 全体の作る空間を $B_{p, \mu}(\mathbb{R}^N)$ とする。 $p = \infty$ のとき

3, $\|u\|_{p,\infty}$ は $\sup |\hat{u}(\xi)\mu(\xi)|$ とする. $p=2$ のとき $B_{2,\mu}(R^N)$

は $H^M(R^N)$ と一致す. 一般の空間の性質は, L. Hörmander,

L. R. Volevič - B. P. Panejah に示すように調べられている.

$B_{p,\mu}(R^N)$ は Banach 空間で $\mathcal{S}(R^N) \subset B_{p,\mu}(R^N) \subset \mathcal{S}'(R^N)$ であり,

$p < \infty$ の場合 $\mathcal{D}(R^N)$ が $B_{p,\mu}(R^N)$ で稠密で, $B_{p,\mu}(R^N)$ の strong dual $(B_{p,\mu}(R^N))'$ は $B_{p',1/\mu}(R^N)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) である.

3. 以下 $1 < p < \infty$ とする.

$u \in B_{p,\mu}(R^N)$, $w \in B_{p',1/\mu}(R^N)$ に対して

$$\langle w, \bar{u} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{w} \bar{\hat{u}} d\xi.$$

$N = n+m$ とし, $x = (x', x)$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $x = (x_{n+1}, \dots, x_N)$, $\xi = (\xi', \xi)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi_{n+1}, \dots, \xi_N)$, $\partial = D_{x'} D_x$ と記す.

Volevič - Panejah は μ が $\mathbb{R}^{n+m}$ 上の temperate weight function のとき

$\int_{\mathbb{R}^m} \mu(\xi', \xi) d\xi$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の点 ξ' で発散するか, 有限

に収束するか, 1) つかれかであり, 42章すると

きは, $\mathbb{R}^n$ 上の temperate weight function である. 以下

1. 7.

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 $u(x)$ に対して $u(x', 0) \in \mathcal{D}(R^n)$ と対応

させる写像は連続である. $\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密である.

もし $u \rightarrow u(x', 0)$ が $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $\mathcal{D}'(R^{n+m})$ に連続的に拡張されるならば,

この拡張された写像を trace mapping

と呼び, u のこの写像による像を u の $t=0$ 上の

trace とする $u(x', 0)$ と記す。

これは, 任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して

$$\phi \otimes \delta \in B_{p, 1/\mu}(R^{n+m})$$

が成り立つことは, $B_{p, \mu}(R^n)$ の任意の元 u に対して $\text{trace } u(x', 0)$

をもつための条件は $1/\mu(x', z) \in L^{p'}(R^m)$ である。

$\mathcal{S}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して

$$u(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \iint \hat{u}(z', z) e^{i\langle x', z' \rangle} dz' dz = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{u}_r(x', z) dz$$

より

$$\widehat{u(x', 0)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Xi^m} \hat{u}(z', z) dz \quad \text{を得る。} \quad \text{すなわち式}$$

$P(z) = \widehat{p}(z)$ と $\tilde{p}_p(z)$ は $-\infty$ の temperate weight function である

とわかる

定理 1. $P(z) = p(z', z)$ は non-trivial polynomial, $\mu \in \Xi^{n+m}$ 上の temperate weight function とする。 $B_{p, \mu}(R^{n+m})$ の各元 u に対して R^n 上の trace $P(D)u(x', 0)$ が存在するための条件は, 次の条件 (1), (2) の一つれかが成立するとはである。

$$(1) \quad \Xi^n \text{ のある点 } z' \text{ で } \frac{1}{M_{\tilde{p}_p, \mu}(z')} = \left\{ \int_{\Xi^m} \frac{\tilde{p}_p^{\mu'}(z', z)}{\mu^{\mu'}(z', z)} dz \right\}^{1/\mu'} < \infty.$$

$$(2) \quad \Xi^n \text{ の任意の点 } z' \text{ で } \int_{\Xi^m} \frac{|p(z', z)|^{\mu'}}{\mu^{\mu'}(z', z)} dz < \infty.$$

とすると, $P(D)u(x', 0) \in B_{p, \mu_{\tilde{p}_p, \mu}}(R^n)$ である。

$B_{p, \mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対して $P(D)u(x', 0) \in B_{p, \mu}(R^n)$ になるための条件は, 次の条件 (1)', (2)' の一つれかである。

$$(1)' \quad \nu(z') \leq C_1 \mu_{p,p'}(z').$$

$$(2)' \quad \nu'(z') \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P(z', z)|^{p'}}{\mu^{p'}(z', z)} dz \leq C_2.$$

証. $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ の各元 u が $\text{trace } P(D)u(x', 0)$ であることと仮定する.

任意の $\eta \in \mathbb{R}^{n+m}$ に対して写像 $u \rightarrow e^{i\langle x, \eta \rangle} u$ は $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ から $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ へ連続, また $P(D) e^{i\langle x, \eta \rangle} u = e^{i\langle x, \eta \rangle} P(D+\eta)$ より任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$B_{p,\mu}(\mathbb{R}^{n+m}) \ni u \rightarrow \langle P(D+\eta)u(x', 0), \phi \rangle = \langle u, \bar{P}(D+\eta)(\phi \otimes \delta) \rangle$$

は $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ 上の continuous linear functional, 即ち

$$\bar{P}(D+\eta)(\phi \otimes \delta) \in B_{p', 1/\mu}(\mathbb{R}^{n+m}), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

従って $\bar{P}(z+\eta) \hat{\phi}(z')/\mu(z) = \hat{\phi}(z') \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \bar{P}^{(\alpha)}(z)/\mu(z) \in L^{p'}(\mathbb{R}^{n+m}).$

$\{\eta^\alpha\}$ は一次独立だから, 各 α に対して $\hat{\phi}(z') \bar{P}^{(\alpha)}(z)/\mu(z) \in L^{p'}(\mathbb{R}^{n+m})$. 故に $\mathbb{R}^n$ の a.e. の点 z' で $\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\bar{P}_p^{(\alpha)}(z', z)}{\mu^{p'}(z', z)} dz < \infty$.

$\bar{P}_p, \mu$ は temperate weight function だから, 上の積分は, すべての点 $z' \in \mathbb{R}^{n+m}$ で存在し temperate weight function である.

(1) $\Rightarrow$ (2) は明らかであるから (2) を仮定する.

$$\widehat{P(D)u(x', 0)}(z') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^m} P(z) \hat{u}(z) dz, \quad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

より, 任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned} |\langle P(D)u(x', 0), \bar{\phi} \rangle| &= \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n+m}} P(z) \hat{u}(z) \bar{\hat{\phi}}(z') dz \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(z')|^{p'} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|P(z)|^{p'}}{\mu^{p'}(z)} dz \right) dz' \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{u}(z)|^p \mu^p(z) dz \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

$P(z) = \sum_{|a'| \geq 0} \frac{z^{a'}}{a'!} P^{(a')}(0, z)$ と仮定から $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P^{(a')}(0, z)|^{p'}}{\mu^{p'}(z)} dz < \infty$. z, z' に
 $\mu(0, z) \leq C(1+|z'|^k) \mu(z', z)$ より

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P^{(a')}(0, z)|^{p'}}{\mu^{p'}(z', z)} dz \leq C^{p'}(1+|z'|^k)^{p'} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P^{(a')}(0, z)|^{p'}}{\mu^{p'}(0, z)} dz.$$

従って $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P(z)|^{p'}}{\mu^{p'}(z)} dz$ は z' にかんして緩増加関数である。す
 べて $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ は $B_{p, \mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ で稠密だから $B_{p, \mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ の任意の元 u
 は trace $P(D)u(x', 0)$ をもつ。

なお $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ の任意の元 u に対して

$$\|P(D)u(x', 0)\|_{p, \mu_{\tilde{p}, p'}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/p'} \|u\|_{p, \mu}$$

を示すことができる。このことから $B_{p, \mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ の任意の元 u
 に対して $P(D)u(x', 0)$ は $B_{p, \mu_{\tilde{p}, p'}}(\mathbb{R}^n)$ に属するといえる。
 後半の証明も同様である。

定理 2 $\frac{1}{\mu_{\tilde{p}, p'}(z)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tilde{P}_{p'}(z', z)}{\mu^{p'}(z', z)} dz$ $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\mu^{p'}(z', z)} dz < \infty$ とする。写像

$$\mathcal{T}: B_{p, \mu}(\mathbb{R}^{n+m}) \ni u \rightarrow P(D)u(x', 0) \in B_{p, \mu_{\tilde{p}, p'}}(\mathbb{R}^n)$$

が epimorphism になるための条件は次の条件の 1) だけである。

(1) $\mathcal{T}$ の range が $B_{p', 1/\mu}(\mathbb{R}^{n+m})$ の中に含まれる。

(2) $\frac{1}{\mu_{\tilde{p}, p'}(z)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P(z', z)|^{p'}}{\mu^{p'}(z', z)} dz$ が temperate weight function になる。

(3) $f(z')$ が $\mathbb{R}^n$ の局所可積分関数で $f(z')\tilde{P}(z)/\mu(z) \in L^{p'}(\mathbb{R}^{n+m})$ なる

5 is " $f(z)/\mu_{\tilde{p},p}(z) \in L^p(\mathbb{Z}^n)$ " is true.

is true $\nu_{p'}(z) \sim \mu_{\tilde{p},p}(z)$ is true.

is the theorem that $P(z, z)$ is the only polynomial of the form

$$\frac{1}{\nu_{p'}(z)} = \int_{\mathbb{Z}^n} \frac{|P(z)|^{p'}}{\mu_{\tilde{p},p}(z, z)} dz \quad \left\{ \begin{array}{l} 1/p' < \infty \end{array} \right.$$

is true is, $\nu_{p'}$ is $\mathbb{Z}^n$ on temperate weight function is true, the image $u \rightarrow P(D_z)u(x', 0)$ is $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ to $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$ is an epimorphism is true.

M is non-negative integer is true, $\int_{\mathbb{Z}^n} \frac{|z|^{Mp'}}{\mu_{\tilde{p},p}(z, z)} dz < \infty$ is true.

non-negative integer k_j is true $k = (k_1, \dots, k_m)$ is true $|k| \leq M$ is true

$$\frac{1}{\nu_{k,p}(z)} = \int_{\mathbb{Z}^n} \frac{|z|^{k,p'}}{\mu_{\tilde{p},p}(z, z)} dz \quad \left\{ \begin{array}{l} 1/p' \end{array} \right.$$

is true, trace mapping τ :

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \rightarrow \{D_z^k u(x', 0)\}_{|k| \leq M} \in \prod_{|k| \leq M} B_{p,\nu_{k,p'}}(R^n)$$

is true. τ is $H' = \prod_{|k| \leq M} B_{p',1/\nu_{k,p'}}(R^n)$ to $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$

is the image of $v = \{v_k\}_{|k| \leq M} \in H'$ is true τ

$$\widehat{\tau v}(z) = \sum_{|k| \leq M} \widehat{v}_k(z) z^k$$

is true is true τ is injective is true is true is true, the result is true.

定理 3. τ が epimorphism になるための条件は, τ の range が $B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じていることである.

定理 4. $p=2$ のとき, τ が epimorphism になるための条件は 次の条件のうちのいくつかが成立することである.

$$(1). \det |X_{Rre}| \geq C \prod_{|R|=M} X_{2R} \quad \tau \in L \quad X_R(z) = \int_{\mathbb{Z}^n} \frac{z^k}{\mu(z; z)} d\tau.$$

$$(2). \quad u \in H^{1/p}(R^{n+m}) \quad \tau, \quad \hat{u}(z) = \sum_{|R| \leq M} f_R(z') z^k \quad \tau \in \mathcal{B},$$

すなわち k に對して $f_R / \nu_{R,2} \in L^2(\mathbb{Z}^n).$

$$(3) \quad u \in H^{1/p}(R^{n+m}) \quad \tau, \quad \hat{u}(z) = \sum_{|R| \leq M} f_R(z') z^k \quad \tau \in \mathcal{B},$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad \text{に對して}$$

$$\hat{u}(z', z_1, \dots, z_{j-1}, \frac{z_j}{2}, z_{j+1}, \dots, z_m) / \mu(z) \in L^2(\mathbb{Z}^{n+m}).$$

$1 < p < \infty$ なる任意の p に對して

定理 5. 次の条件は同値である.

$$(1) \quad u \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m}), \quad \hat{u}(z) = \sum_{|R| \leq M} f_R(z') z^k \quad \tau \in \mathcal{B}$$

$$\text{すなわち } k \text{ に對して } f_R / \nu_{R,p'} \in L^p(\mathbb{Z}^n).$$

$$(2) \quad u \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m}), \quad \hat{u}(z) = \sum_{|R| \leq M} f_R(z') z^k \quad \tau \in \mathcal{B}$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad \text{に對して}$$

$$\hat{u}(z', z_1, \dots, z_{j-1}, \frac{z_j}{2}, z_{j+1}, \dots, z_m) / \mu(z) \in L^{p'}(\mathbb{Z}^{n+m}).$$

$$(3) \quad u \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m}), \quad \hat{u}(z) = \sum_{|R| \leq M} f_R(z') z^k \quad \tau \in \mathcal{B},$$

$$\text{任意の整数 } l_j \geq 0 \text{ に對して } \hat{u}(z', \frac{z_1}{2^{l_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{l_m}}) \in L^{p'}(\mathbb{Z}^{n+m}).$$

このとき, 上記 trace mapping τ は epimorphism である.

証) (1) $\Rightarrow$ (2). (1) より $f_R / \nu_{R, \mu} \in L^p(\mathbb{Z}^n)$. これは $f_R(z) z^k / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$ を意味する. $f_R(z) z^k / z^k \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$ と $k=0, \dots, 2^m-1$ を加えると $\hat{u}(z', z_1, \dots, \frac{z_1}{2}, \dots, z_m) / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$ を得る.

(2) $\Rightarrow$ (3). (2) より $\hat{u}(z', z_1, \dots, \frac{z_1}{2}, \dots, z_m) / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$. $\exists k$
 $\hat{u}(z', z_1, \dots, \frac{z_1}{2}, \dots, z_m) = \sum_{|k| \leq M} f_R(z) z^k / z^k$ より $\hat{u}(z', z_1, \dots, \frac{z_1}{2}, \dots, z_m) / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$.
 これは τ より $\hat{u} / \mu \in L^p(\mathbb{Z}^n)$ である. (3) を得る.

(3) $\Rightarrow$ (1). (3) より $\hat{u}(z', \frac{z_1}{2^{i_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{i_m}}) / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$. $i_1, \dots, i_{m-1}$ を固定して $i_m \in 0, 1, \dots, M$ と動かすことにすると, 各 $j = 0, 1, \dots, M$ に対して

$$\sum_{|k_1| + \dots + |k_{m-1}| \leq M-j} f_{R, \dots, R_{m-1}}(z') \left(\frac{z_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{z_{m-1}}{2^{i_{m-1}}}\right)^{k_{m-1}} z_m^j / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m}).$$

この条件下で $k=0, \dots, 2^m-1$ とする k に対して $f_R(z) z^k / \mu(z) \in L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$ を得る. $f_R / \nu_{R, \mu} \in L^p(\mathbb{Z}^n)$ を得る.

(3) が成立すると, τ の range が $B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じていることを示す. $\vec{v}^j = (v_k^j)_{|k| \leq M} \in H' = \prod B_{p', 1/\mu}(R^n)$ に対して

$\tau \vec{v}^j$ が $B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ で u に収束するとする. 即ち

$\sum_{|k| \leq M} \hat{v}_k^j(z') z^k / \mu$ は $L^p(\mathbb{Z}^{n+m})$ で $\hat{u} / \mu$ に収束する. μ は正

値連続関数だから $\sum \hat{v}_k^j(z') z^k$ は $L^p_{loc}(\mathbb{Z}^{n+m})$ で $\hat{u}$ に収束する.

このことから $\hat{u} = \sum_{|k| \leq M} \hat{v}_k^j(z') z^k$, $\hat{v}_k^j \in L^p_{loc}(\mathbb{Z}^{n+m})$

と書かれる. (3) より $\hat{u}(z', \frac{z_1}{2^{i_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{i_m}}) / \mu =$

$$\sum \hat{v}_k(z') \left(\frac{z_1}{z''_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{z_m}{z''_m}\right)^{k_m} / \mu \in L^{p'}(\mathbb{Z}^{n+m}). \quad i_1, \dots, i_{m-1} \text{ 固定して}$$

$i_m = 0, 1, \dots, M$ と動かす = とに依り, 各 $j = 0, 1, \dots, M$ に対して

$$\sum_{k_1 + \dots + k_{m-1} \leq M-j} \hat{v}_k(z') \left(\frac{z_1}{z''_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{z_{m-1}}{z''_{m-1}}\right)^{k_{m-1}} z''_m^j / \mu \in L^{p'}(\mathbb{Z}^{n+m})$$

を得る. この操作をくりかえす = とに依り, $|k| \leq M$ なる k

に対して $\hat{v}_k(z') z^k / \mu \in L^{p'}(\mathbb{Z}^{n+m})$ がわかる. $v_k = \mathcal{F}_{z'}^{-1}(\hat{v}_k(z'))$ と

定義すれば $v_k \in B_{p', 1/\nu_k}(R^n)$ となり u は $\mathcal{F}$ の range に属

する.

系 μ が $\mathbb{Z}^{n+m}$ 上の temperate weight function として

$$\mu(z', z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_m) \geq C \mu(z', z), \quad j=1, 2, \dots, m$$

とみえれば定数 $C > 0$ が存在すれば, trace mapping $\mathcal{F}$ は

epimorphism である.

次に $\prod_{|k| \leq M} B_{p, \nu_k}(R^n)$ の元を添えて, それを trace にもつ

$u \in B_{p, \mu}(R^{n+m})$ を L. Hörmander の方法で構成する.

定理 6. $\prod_{|k| \leq M} B_{p, \nu_k}(R^n)$ の任意の元を $\vec{f} = (f_k(z'))_{|k| \leq M}$ と

する. χ は $\mathcal{D}(R^n)$ の元で 0-近傍で 1 に等しい任意の関

数とする. temperate weight function $\mu(z', z)$ に対して

$$\mu(z', \lambda_R(z')z) \leq \lambda_R^{\frac{1}{p} + \frac{m}{p'}}(z') \nu_R(z') \overline{\mu}_R(z)$$

とみたす Ξ^n 上の正値連続関数 λ_k と, Ξ^n 上で緩増加の連続関数 $\Xi_k(z)$ が存在するとき,

$$\hat{u}_{x'}(z', t) = \sum_{|k| \leq M} \hat{f}_k(z') \frac{(it)^k}{k!} \psi(\lambda_k(z')t)$$

と $\bar{t} < t$, $u \in B_{p, \mu}(R^{n+m})$ で $|k| \leq M$ なる各 k に対して

$$D_z^k u(x', 0) = f_k(x') \quad \text{とみたす.}$$

$$\begin{aligned} \text{証.} \quad \hat{u}(z', z) &= \sum_{|k| \leq M} \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \hat{f}_k(z') D_z^k \int_{\Xi^m} \psi(\lambda_k t) e^{-i\langle t, z \rangle} dz \\ &= \sum_{|k| \leq M} \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \hat{f}_k(z') \frac{1}{\lambda^{|k|+m}} D_z^k \hat{\psi}\left(\frac{z}{\lambda_k}\right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int_{\Xi^{n+m}} |\hat{u}|^p dz &\leq C \sum_{|k| \leq M} \int_{\Xi^n} \frac{1}{(k!)^p} |\hat{f}_k(z')|^p \frac{dz'}{\lambda_k^{p(|k|+m)-m}} \int_{\Xi^m} |D_z^k \hat{\psi}(z)|^p |\mu(z', \lambda_k z)|^p dz \\ &\leq C \sum_{|k| \leq M} \int_{\Xi^n} \frac{1}{(k!)^p} |\hat{f}_k(z')|^p \lambda_k^p(z') dz' \int_{\Xi^m} |D_z^k \hat{\psi}(z)|^p |\Xi_k(z)|^p dz. \end{aligned}$$

$\hat{\psi}(z) \in \mathcal{S}(\Xi^m)$, $\Xi_k(z)$ は緩増加関数だから右辺の積分は収束する. u の作りより $D_z^k u(x', 0) = f_k(x')$ は明らか.

trace mapping と他の概念との関係を調べてみる.

$u, v \in \mathcal{D}'(R^N)$ とする. R^N 上の任意の δ -列 $\{f_j\}$ に対して, 超関数的極限 $\lim_{j \rightarrow \infty} (u * f_j)v$ が存在すれば, この極限は一意的に定まるから, これを u, v の strict sense の乗法積

とよゝ $u \cdot v$ とかく. 二つの任意の δ -列 $\{p_j\}$ に對して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u(v * p_j) \text{ が存在する}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (u * p_j) v = \lim_{j \rightarrow \infty} u(v * p_j) .$$

$\mathcal{D}(R^N)$ の元 ϕ が $\phi \geq 0$, $\int_{R^N} \phi dx = 1$ を満たすとき,
 $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ とおき, 上の $\{p_j\}$ の代りに $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ を
 置きかえたとき $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u * \phi_\varepsilon) v$ が存在すれば weak sense の積
 とよゝ $u \cdot v$ とかく. 二つのとき $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ は 次の restricted
 δ -sequence に對して置きかえられる. 以下に白石氏により示さ
 れてゐる. Restricted δ -seq. とは $p_j \in \mathcal{D}(R^N)$ として

$$(i) \quad \text{supp } p_j \rightarrow \{0\} \quad (j \rightarrow \infty)$$

$$(ii) \quad \int p_j dx \rightarrow 1 \quad (j \rightarrow \infty)$$

$$(iii) \quad \int |x|^{|\alpha|} |D^\alpha p_j(x)| dx \leq M_\alpha \quad (M_\alpha \text{ は } p_j \text{ に無関係な定数})$$

を満たす列である.

strict sense の場合も同様に論じられるので weak sense の場
 合に限って以下のべる. $w \in \mathcal{D}'(R^m)$, $u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ に對して部
 分積 wu は $(1 \otimes w)u$ が存在するとき, 二れで定義する.

$\delta \in \mathcal{D}'(R^m)$ とする. δu は R^m 上の任意の restricted δ -
 seq. $\{p_j\}$ に對して $\lim_{j \rightarrow \infty} (\delta * p_j)u$ である $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta(u * p_j)$ と
 して定義される. 二つの $*$ は t にかゝる partial con-
 volution である. $\{p_j\}$ は上の $\wedge$ である $\{\phi_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon > 0}$ である置きか
 えられる.

S. Łojasiewicz は超関数に對し section の概念を導入した。
 $u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ が R^n 上に section $\in \mathcal{D}'(R^n)$ であるとは、超関
 数的極限 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(x', \varepsilon t)$ が存在し、 t に無関係であることであ
 る。これは δu の存在と同値である。事実 u が R^n 上
 に section であるとは、 $\phi(t) \geq 0$, $\int_{R^m} \phi(t) dt = 1$ なる任意の
 $\phi \in \mathcal{D}(R^m)$ に対して、超関数的極限 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle u, \phi_\varepsilon \rangle$ が存在し、
 ϕ に無関係にきつるものである。 $\langle u, \phi_\varepsilon \rangle \otimes \delta = \delta(u * \check{\phi}_\varepsilon)$
 であるから section の存在は δu の存在と同値である。 u の
 section を α とすると $\alpha = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle u, \phi_\varepsilon \rangle$ であり、 $\forall x$
 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(x', \varepsilon t) = \alpha \otimes \delta$, $\delta u = \alpha \otimes \delta$ である。

定理 7. 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ において次の条件は同値である。

- (1) trace mapping $B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \rightarrow u(x', 0) \in \mathcal{D}'(R^n)$ が存在する。
- (2) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u が section である。
- (2)' 条件 (2) が strict dense である。
- (3) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対し、 $\delta \in \mathcal{D}'(R^m)$ との乗
 法積 δu が存在する。
- (3)' $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対し $\delta \cdot u$ が存在する。
- (4) $\mathcal{D}(R^{n+m})$ のある δ -列 $\{\rho_j\}$ に対し $\lim_{j \rightarrow \infty} (u * \rho_j) \delta$ が
 存在する。
- (5) $\mathcal{D}(R^m)$ のある δ -列 $\{\rho_j\}$ に対し $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j u$ が存在する。

証) (2), (3) の同値は既に済ませた. 同様 (2)', (3)' も同値.
 (3)' $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4), (5) は定義より明らかだから (1) $\Rightarrow$ (3)', (4) $\Rightarrow$ (1),
 (5) $\Rightarrow$ (1) を証明すればよい.

(1) $\Rightarrow$ (3)'. (1) を仮定すれば任意の $\gamma \in \mathcal{D}(R^n)$ に対し?
 $\gamma \otimes \delta \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$. $u \in B_{p, \mu}(R^{n+m})$ とし, $\{f_j\} \in R^{n+m}$ 上の
 任意の δ -列とす. $u * f_j$ は $B_{p, \mu}(R^{n+m})$ で u に収束する.
 任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して等式

$$\langle (u * f_j) \delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u * f_j, \phi(x', 0) \otimes \delta \rangle_{B_{p, \mu}, B_{p', 1/\mu}}$$

より $\lim_{j \rightarrow \infty} (u * f_j) \delta$ の存在がわかる. 即ち $\delta \cdot u$ が存在する.

(4) $\Rightarrow$ (1). $\{f_j\} \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ とある固定した $\mathcal{D}(R^{n+m})$ での δ -列とす.

$$B_{p, \mu}(R^{n+m}) \ni u \rightarrow (u * f_j) \delta = (u * f_j)(x', 0) \otimes \delta \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

なる写像は, 各 j に対して連続で, 空間 $B_{p, \mu}(R^{n+m})$ は
 barreled だから写像

$$B_{p, \mu}(R^{n+m}) \ni u \rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} (u * f_j) \delta \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続である. 故に任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対し?

$$\langle \lim_{j \rightarrow \infty} (u * f_j) \delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \omega_\phi \rangle_{B_{p, \mu}, B_{p', 1/\mu}}$$

なる $\omega_\phi \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ が存在する.

$$u = \alpha \in \mathcal{D}(R^{n+m})$$

$$\langle \alpha \delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \alpha, \phi(x', 0) \otimes \delta \rangle = \langle \alpha, \omega_\phi \rangle.$$

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密だから $\phi(x,0) \otimes \delta = \omega_p \in B_{p,1/\mu}(R^{n+m})$.

すなわち trace mapping が存在する.

(5) $\Rightarrow$ (1). $\{f_j\} \in \mathcal{D}(R^n)$ である δ -列とする. 写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow f_j u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続であるから Banach-Steinhaus の定理から, 写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f_j u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続になり, 任意の $u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j u = u(x,0) \otimes \delta$

だから, $\omega_p =$ とは trace mapping の存在を示している.

$1/\mu(x,z) \in L^{p'}(\mathbb{R}^m)$ を仮定し, $\frac{1}{\nu_p(x)} = \left\{ \int \frac{1}{\mu^{p'}(z)} dz \right\}^{1/p'}$ とおく.

$t_0 \in \mathbb{R}^n$ の任意の点, $u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ の元とすると, $\tau_{t_0} u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ で, $(\tau_{t_0} u)^\wedge = e^{i\langle t_0, z \rangle} \hat{u}$ である. 7.2 定理

1 の証明の中で $\hat{u}$ のように

$$\|u(\cdot, t)\|_{p,\nu_p} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'} \|u\|_{p,\mu}$$

である. $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u にとると, $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の中で $u = \lim u_j$ とする $u_j \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ が存在し

$$\|u_j(\cdot, t_0) - u(\cdot, t_0)\|_{p,\nu_p} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'} \|u_j - u\|_{p,\mu}.$$

この式から $u_j(\cdot, t_0)$ は $B_{p,\nu_p}(R^n)$ で $u(\cdot, t_0)$ に t_0 にかんして

一様に収束することがわかる. $x \rightarrow u_j(\cdot, t)$ は $B_{p,\nu_p}(R^n)$ -valued continuous function だから $u(\cdot, t)$ は t にかんして連

続に $B_{p,\nu}(R^n)$ -valued function $u(t)$ である. $\square$

定理 8. $1/\mu(0,t) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ と仮定すると, $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべ
ての元は $B_{p,\nu_p}(R^n)$ -valued continuous function $u(t)$ で与えられる超関数
とみなされる. ここで ν_p は $\frac{1}{\nu_p(t)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\mu^{1/(1+1/p)}(t,z)} dz \right\}^{1/p}$ で定ま
る $\mathbb{R}^n$ 上の temperate weight function である.

証 $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 ϕ に対して

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{R^n} \langle u(t), \phi(\cdot, t) \rangle dt$$

と置く.

$u(t) = u(x, t) \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ にとると $\langle u, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$.

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密であるから, $\square$ の関係は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$
の任意の元 u に対して成立する.

引用文献

- [1] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, (1963).
- [2] M. Itano, On a trace theorem for the space $H^\mu(R^N)$, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 30(1966), 11-29.
- [3] M. Itano, Note on the canonical extensions and the boundary

values for distributions in the space H^{μ} , Hiroshima Math.

J. 1(1971), 405-425.

[4] B. P. Panejah, Theorems on traces and on the extension of distributions, Mat. Zametki 2(1967), 577-588.

[5] R. Shiraishi, On the value of distributions at a point and the multiplicative products, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 31(1967), 89-104.

[6] L. R. Volevič and B. P. Panejah, Some spaces of generalized functions and embedding theorems, Uspehi Mat. Nauk, 121 (1965), 3-74.