

ある非線形波動方程式の解の予想

広 大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

浅い水の波を記述する方程式として、次の非線形偏微分方程式が Whitham のテキスト "Linear and Nonlinear Wave Equations" p.465 に出てゐる。

$$\begin{cases} \eta_t + (1 + \alpha \eta) w_x - \frac{1}{6} \beta w_{xxx} + O(\alpha \beta, \beta^2) = 0, \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x - \frac{1}{2} \beta w_{xxt} + O(\alpha \beta, \beta^2) = 0. \end{cases}$$

ここで α, β はオ-ダ-パラメータである。

この式で

$$w = u + \frac{1}{2} \beta u_{xx} + O(\alpha \beta, \beta^2) \quad \text{とすると, 上式は}$$

$$\begin{cases} \eta_t + [(1 + \alpha \eta) u]_x + \frac{1}{3} \beta u_{xxx} + O(\alpha \beta, \beta^2) = 0, \\ u_t + [\eta + \frac{\alpha}{2} u^2]_x + O(\alpha \beta, \beta^2) = 0. \end{cases}$$

となる。

c.f. E.V. Krishnan: J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 2391.

S. Kawamoto: J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 2922.

この式は, Krishnan によつて "classical Boussinesq Equation" と呼ばれている。オーダー $O(\alpha\beta, \beta^2)$ の項を無視するとスケーリングによつて "classical Boussinesq Equation" は次の形になる。

$$\begin{cases} u_t = [(1+u)v + v_{xx}]_x \\ v_t = (u + \frac{1}{2}v^2)_x \end{cases}$$

この式のように物理現象を記述する非線形波動方程式は一般にソリトン方程式(可積分系)である可能性は少ない。したがって、逆散乱形式を探したり、 N -ソリトン解を求めたりするのは無駄な努力になることが非常に多い。こういう式を見て、先ず我々がやるべき事は高次保存量を求めたり、Weiss-Painlevé テストを行うことである。この時、数式処理は非常に有効である。非線形波動方程式の高次保存量を求める REDUCE PROGRAM は我々の研究室の伊藤雅明によつて殆んど完成している。Computer Physics Communications に投稿する予定である。Weiss-Painlevé テストも数式処理で殆んど自動的に計算できる。

まず高次保存量が存在することを確認され、ついで Weiss Painlevé テストにも合格することから古富士男により、確認された。これに力を入れて、この方程式の2次形式への変換に成功した。結果は次の通りである。

$$\begin{aligned} \text{変換 } u &= u_0 + 2\rho_{xx}, \quad v = v_0 + 2\phi_x \\ \rho &= \log(fg), \quad \phi = \log(f/g) \end{aligned}$$

なお“Classical Boussinesq Equation”は2次形式

$$(D_\tau - D_x^2)f \cdot g = 0$$

$$[D_x D_\tau - (1 + u_0)D_x - D_x^3]f \cdot g = 0$$

$$\text{すなわち } D_\tau = D_t - v_0 D_x \text{ である。}$$

$D_x^m D_\tau^n$ は2項演算子で、次式で定義される

$$D_x^m D_\tau^n f(x, \tau) \cdot g(x, \tau)$$

m, n は自然数

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau'} \right)^n f(x, \tau) g(x', \tau') \Big|_{x'=x, \tau'=\tau}$$

2次形式に変換されると、 N -ソリト=解を求めるのは容易である。まず数式処理を用いて3-ソリト=解まで確認する

れた。所が 3-ソリト = 解を眺めてゐるうちに、この解が Modified KP 方程式の $pq = \text{const}$ に相当する REDUCTION になっている事がわかり、それをもた REDUCE を使うことが出来た。

この研究の途中、中村明氏より連絡が来て、上の 2 次方程式で $u_0 = -1$ とおき、 $x \rightarrow it$ とおき換えた式

$$\begin{cases} (iD_t + D_x^2)g \cdot f = 0 \\ (iD_x D_t + D_x^3)g \cdot f = 0 \end{cases}$$

が多項式解

$f = x^2 + 2it$, $g = f^*$
 であることが発見され、解は Explode-Decay mode solution になる事が示された。

c.f. A. Nakamura and R. Hirota: "A New Example of Explode-Decay Solitary Waves in One-Dimension" accepted to J. Phys. Soc. Jpn.

中村氏の解にヒントを得て、力を入れて予想 1 行の次の解がある。 $W \in \text{Wronskian}$ として

$$f = w \{ H_{2n}(z), H_{2n-1}(z), \dots, H_n(z) \} \quad (n\text{次})$$

$H_n(z)$ は Hermite の多項式 (n 次),

z は similarity variable $z = x/\sqrt{2it}$,

g は f の complex conjugate.

この結果を n が小さいときでも手計算でやるのは大変だが、REDUCE 3.0 を使えば簡単に $n = 1, 2, 3, 4, 5$ まで確かめられる。予想は確かであると思われるが証明は未だである。Modified KP 方程式の $pq = 0$ REDUCTION の極限として得られるようである。