

VLASOV 流体のエントロピーについて

名古屋大学プラズマ研究所 中山 壽夫

1 はじめに

H-定理の概念は、 N 個の粒子から成る系の非平衡統計力学を考へる時、系の時間的发展の方向を指定すると云ふことで、非常に大切な役割を演じて来た。ボルツマン以来、もしも小さな系に於ては二体分布函数が考へられ、その分布函数を支配する方程式が、系を記述するにふさわしいものであるならば、この二体分布函数で定義された H-函数は、時間と共に非増^加であると信じられて来た。一方微視的にこの系を眺めるとき、系を支配する運動方程式は、時間に関して可逆であるから、非可逆性^{と云ふこと}とは考へられない。即ち非可逆性^{と云ふ概念}は、系の記述上我々が課する所の粗分の粗さに緊密に関連したものである。云々考へるならば、考へている系の知識を制限して、より不完全な知識で満足するならば、そしてその知識の制限が、^各適切なものであるならば、巨視的非可逆性が期待されるのである。

さて、場合によつては、プラズマはブラッソン方程式

$$\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} - \int \frac{\partial \phi(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial \vec{x}} f(\vec{x}', t) \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \vec{p}} d\vec{x}' = 0 \quad (1)$$

で充分よく近似される。但し $\vec{x}$ は $\vec{x} \equiv (\vec{r}, \vec{p})$ 、 ϕ はクーロンポテンシャルを表している。このブラッソン方程式は、B.B.G.K.Y 方程式に於いて

二体相関函数 $f_2(x_1, x_2, t) - f(x_1, t)f(x_2, t) = g(x_1, x_2, t)$ を考慮すること
 によつて得られる。今(1)式の解 $f(x, t)$ を用いて、H-函数を

$$H(t) \equiv \int dx f(x, t) \log f(x, t) \quad (2)$$

と定義すると容易に分る様に $dH(t)/dt = 0$ となる。^{(1),(2),(3)} 今(1)式で
 記述される系(以後ブラツソフ流体と呼ぶことにする)に乱流状態があま
 としよう。そして外界と何の接觸もないものとするれば、系は平衡状態、少
 くとも定常状態に近づくであろうと想像される。その場合にも系は(1)式で
 記述され、そして(2)式で定義したH-函数は時間と共に一定である。果し
 て(1)式は良い近似とした結果得られたものであるうが、それとも(2)式で定
 義するH-函数は、この場合不変でないものなのであるうかと云ふ疑
 問が生じる。

この小論文では(2)式で定義したH-函数の見方を変へて、(2)式の導き
 出された系を論理を用いて、乱流を記述するに不変な形式化を行つて
 H-函数を導入して、その時間的变化を述べることにする。

2. プラズマの弱い乱流——汎函数形式

詳しい内容は参考文献⁽⁴⁾にあるので、簡単に概略を述べることにする。
 ブラツソフ方程式(1)の時刻 $t = t$ に於ける解 $f(x, t)$ の作る空間 Ω_f を考
 へる。そしてこの空間に確率を考へる。その確率密度を $P(f, t)$ としよう。
 この様な確率密度 $P(f, t)$ を用いて、1体分布函数の平均、それの積の平
 均を考へることによつて、モーメント方程式が作られる。しかしこの小論文の

モーメント方程式は困じているのが不便である。しかし、今迄の標準特性関数 $\Phi(y, t)$ (或は母関数と呼ぶ)

$$\Phi(y, t) = \int_{\Omega_f} e^{i \int y(\vec{z}) f(\vec{z}) d\vec{z}} P(f, t) d[f] \quad (3)$$

を導入してこの時間的変化と違ふと、これからモーメントが、関数微分によって何次でも得られるから、非常に便利である。(3)式で導入した y は初観空間($\vec{z}$)に於ける位置の滑らかな関数である。関数 $\Phi(y, t)$ の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & -i \int y(\vec{z}) \frac{\delta}{m i \delta y(\vec{z})} \Phi(y, t) d\vec{z} \\ & + i \iint y(\vec{z}) \frac{\partial y(\vec{z}-\vec{z}')}{\partial \vec{z}} \frac{\delta}{i \delta y(\vec{z})} \frac{\partial}{\partial \vec{z}'} \frac{\delta}{i \delta y(\vec{z}')} \Phi(y, t) d\vec{z} d\vec{z}' \quad (4) \end{aligned}$$

となる。ここで $\delta / i \delta y(\vec{z})$ は関数微分を示す記号である。(4)式から得られるモーメント方程式は、 P として適当なものと考えると、ブラツソフ方程式に於いて、ベテノフ及ドラモンド・パイレスが考へた準線形理論と同等である。(4)(5)

さて文献(6)で述べた様に、準線形理論に於いてモード間の相互作用をみると $\Phi(y, t)$ は次の様に近似される。

$$\Phi_{qL}(y, t) = \exp \left\{ i \int y(\vec{z}) \langle f(\vec{z}) \rangle_{qL} d\vec{z} - \frac{e}{2} \iint y(\vec{z}) y(\vec{z}') G_{qL}(\vec{z}, \vec{z}', t) d\vec{z} d\vec{z}' \right\} \quad (6)$$

但し ϵ は小さな数であり, $\langle f(\vec{x}) \rangle_{a,L}$ 及 $G_{a,L}(\vec{x}, \vec{x}', t)$ は次の関係式で定義されるものである。

$$\left. \frac{\delta \Phi_{a,L}}{\delta y(\vec{x})} \right|_{y=0} \equiv \langle f(\vec{x}) \rangle_{a,L} \quad (6)$$

及

$$\left\{ \frac{\delta^2 \Phi_{a,L}}{\delta y(\vec{x}) \delta y(\vec{x}')} - \frac{\delta \Phi_{a,L}}{\delta y(\vec{x})} \frac{\delta \Phi_{a,L}}{\delta y(\vec{x}')} \right\}_{y=0} \equiv \epsilon G_{a,L}(\vec{x}, \vec{x}', t) \quad (7)$$

$\langle f(\vec{x}) \rangle_{a,L}$ 及 $G_{a,L}(\vec{x}, \vec{x}', t)$ に関する運動方程式は文献(4)にある通り,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f(\vec{x}_1) \rangle_{a,L}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial \langle f(\vec{x}_1) \rangle_{a,L}}{\partial \vec{g}_1} + \vec{F}(\vec{g}_1) \frac{\partial \langle f(\vec{x}_1) \rangle_{a,L}}{\partial \vec{p}_1} \\ - \int \frac{\partial \varphi(\vec{g}_1 - \vec{g}_2)}{\partial \vec{g}_1} \cdot \frac{\partial G_{a,L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)}{\partial \vec{p}_1} d\vec{x}_2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

及

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{a,L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)}{\partial t} + \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1,2} \vec{p}_i \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} \right) G_{a,L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) - \left(\sum_{i=1,2} \vec{F}(\vec{g}_i) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \right) G_{a,L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \\ - \sum_{i=1,2} \frac{\partial \langle f(\vec{x}_i) \rangle_{a,L}}{\partial \vec{p}_i} \int \frac{\partial \varphi(|\vec{g}_i - \vec{g}_j|)}{\partial \vec{g}_i} G_{a,L}(\vec{x}_i, \vec{x}_j, t) d\vec{x}_j = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

但し $j=(1,2) (\neq i)$, そして $\vec{F}(\vec{g})$ と $\vec{x}_1$ のは

$$\bar{F}(\delta) \equiv \int \frac{\partial \varphi(\delta - \delta')}{\partial \delta} \langle f(\vec{x}') \rangle_{q.l.} d\vec{x}' \quad (10)$$

である。

空間的に均一な系に於いては $\langle f(\vec{x}) \rangle_{q.l.}$ と云ふのは空間的に均一でも
 $\partial \langle f(\vec{x}) \rangle_{q.l.} / \partial \delta$ は $\bar{F}(\delta)$ の因子ともった項は零となる。

3. ブラツソフ流体の乱流のエントロー (H-主数の符号と変へたもの) の一定義

ボルツマンによつて導入されたエントロピーの概念と振り返つてみることにしよう。ボルツマン方程式は、B.B.G.K.Y.方程式に於いて2体の分布函数 $f_2(\vec{x}, \vec{x}', t)$ に近似とすることによつて得られる。従つて、B.B.G.K.Y.方程式のよつて立つ方程式、リュビユ方程式の解をもつて、H-主数と $H(t) = \int f_2(\vec{x}, t) \log f_2(\vec{x}, t) d\vec{x}$ と定義したならば、 $dH(t)/dt$ は0となる。このリュビユの方程式の出て来る過程は、乱主数方程式(4)の出て来る過程と良く似ている。なぜならば、N個の粒子から成る系の性質は、ハミルトンの運動方程式で充分良く記述されるのであるが、これを解くことは不可能に近いので、ハミルトンの運動方程式の時刻 $t=t_0$ に於ける解の作る空間、 Γ -空間を考へ、その空間に確率密度 $f(\Gamma, t)$ と導入し $f_N(\vec{x}, t)$ の運動と違いがけるのが、リュビユの方程式であった。従つてこの段階でH-主数を考へると、 f は、すべての知識を含んでいるものであるから、非可逆性がありながら $dH(t)/dt$ と云ふものは0となる。この事情は(4)式の解をもつて来ると $H(t) = \int_{\Gamma} P(f, t) \log P(f, t) d[f]$ と定義

するならば $dH(t)/dt = 0$ となることとよく似ているのである。⁽⁷⁾ ボルツマニの導入した H-函数の成功は、与えられた初期条件のもとに、リュビル方程式が時間と共に発展し、初期段階を経て後にはボルツマニ方程式で充分近似し得る系が存在して、その様な段階で H-函数を導入したことになることである。言い換へると、 f_N が

$$f_N(\{x_i\}, t) = \prod_{i=1}^N f_0(x_i, t) \quad (11)$$

と近似される f_0 を用いて H-函数を定義すると H-定理が成立するのである。

さて導線形理論に相当する汎函数方程式(4)の解(5)を考へてみることにする。(5)式に現れた相関函数 $G(x, x', t)$ は、(9)式の解であるから相関函数は一体の函数 $\langle f(x) \rangle$ で書きあらわされることになっている。したがって、近似汎函数(5)は、古典統計に於ける f_0 に対応したものとになっている。今(5)式をフュリエ変換した確率密度を $P_{qL}(f, t)$ (以後乗字 qL は省略する)としよう。そして H-函数を

$$H(t) = \int_{q_f} P_{qL}(f, t) \log P_{qL}(f, t) df \quad (12)$$

と定義する。

(12)式の P は

$$P(f, t) = \int_{q_f} e^{-i \int_{q_f} f(x) dx} \Phi_{qL}(q, t) dq$$

で与えられる量であり Φ_{qL} がガウス形となっているから解析的に計算が

可能で、その結果は

$$P(f, t) = \frac{1}{Z(t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \iint [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t) d\vec{x} d\vec{x}' \right\} \quad (13)$$

となる。但し $Z(t)$ 及 $\tilde{G}$ は

$$Z(t) = \int_{\mathcal{Q}_f} \exp \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \iint [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t) d\vec{x} d\vec{x}' \right\} d[f] \quad (14)$$

$$\int \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t) G(\vec{x}', \vec{x}'', t) d\vec{x}' = \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (15)$$

で与えられる。

さて、 H -函数の時間変化は(13)式と(14)式に代入して時間微分をとるとよい。即ち

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{\mathcal{Q}_f} \frac{\partial P(f, t)}{\partial t} \left\{ 1 + \log P(f, t) \right\} d[f] = \int_{\mathcal{Q}_f} \frac{\partial P(f, t)}{\partial t} \log P(f, t) d[f] \quad (16)$$

P の運動方程式は、(13)、(14)、(15)式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & P \left\{ \frac{1}{\epsilon} \iint d\vec{x} d\vec{x}' \frac{\partial \langle f(\vec{x}) \rangle}{\partial t} [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\epsilon} \iint d\vec{x} d\vec{x}' [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \frac{\partial \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t)}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -P \int_{\Omega_f} P \left\{ \frac{1}{\epsilon} \iint d\vec{x} d\vec{x}' \frac{\partial \langle f(\vec{x}) \rangle}{\partial t} [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\epsilon} \iint d\vec{x} d\vec{x}' [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \frac{\partial^2 \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t)}{\partial t^2} \right\} d[f] \quad (17)
\end{aligned}$$

確率密度の対数は(13)式から

$$\log P = -\frac{1}{2\epsilon} \iint [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] [f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle] \tilde{G}(\vec{x}, \vec{x}', t) d\vec{x} d\vec{x}' - \log Z \quad (18)$$

であり、又次の関係式も確率汎函数の定義から容易に分かる。

$$\langle [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] \rangle = \int_{\Omega_f} [f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle] P d[f] = 0 \quad (19)$$

$$\langle \prod_{i=1}^3 [f(\vec{x}_i) - \langle f(\vec{x}_i) \rangle] \rangle = 0 \quad (20)$$

$$\langle [f(\vec{x}_1) - \langle f(\vec{x}_1) \rangle] [f(\vec{x}_2) - \langle f(\vec{x}_2) \rangle] \rangle = \epsilon G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\langle \prod_{i=1}^4 [f(\vec{x}_i) - \langle f(\vec{x}_i) \rangle] \rangle &= \epsilon^2 \left[G(\vec{x}_1, \vec{x}_2) G(\vec{x}_3, \vec{x}_4) + G(\vec{x}_1, \vec{x}_3) G(\vec{x}_2, \vec{x}_4) \right. \\
&\quad \left. + G(\vec{x}_1, \vec{x}_4) G(\vec{x}_2, \vec{x}_3) \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

(17), (18)式を $dH(t)/dt$, (16)式, に代入し, (19)式, 及 (17)~(22)式の関係式を用いて整理すると, 結局

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \iint \tilde{G}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \frac{\partial G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)}{\partial t} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \quad (23)$$

を得る。

(23)式によると、H-函数の時間微分変化の割合は、相関函数Gの時間変化の割合によって与えられる。今Gとまじり量がどんなものであるかと(21)式とは別の観点から考えてみる。電場 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ は、 $[f(\vec{r}) - f(\vec{r}')] / (t - t')$ と云う様な関係にある。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \int \frac{\partial \varphi(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial \vec{r}} [f(\vec{r}') - f(\vec{r})] d\vec{r}' \quad (24)$$

であるから

$$\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle = \iint \frac{\partial \varphi(\vec{r} - \vec{r}_1)}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \varphi(\vec{r} - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}} G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (25)$$

即ち、Gは電場のエネルギーに関係した量である。(23)式の右辺は、従って電場のエネルギーが増大するならば、H-函数は時間と共に増大することを云うている。

4. 二～三の考察

前節に於いて、ブラッソフ流体の乱れのうち、ベテノフ、ドラモンド・パインス流の準常形理論を取扱へる様な系のエントロピーの時間変化を考察した。(23)式からもし初期条件として位置量の相関が与えられるとすると、(あくまでも準常形理論を取扱へる様なものに即ちなれば「いいから」)

その相関の中には、安定なモードも不安定なモードも多数存在するであろう。しかし安定なモードは、 $\langle f(t) \rangle$ に特長的な成長時間の間に、殆んど等視されるレベル迄退化する。⁽⁷⁾ ここで行った議論は、果が(8)式及(9)式で良く記述される場合のみに限る。それは古典統計のボゴリヌボフ理論と良く似たものである。 (8)式及(9)式で果が良く記述されるときは、ある初期条件のもとに果が発展するとすると、ある初期段階を經過した後に(8)式及(9)式で記述される果があるであろうと云いことである。即ち安定なモードたりと含んだ果であるのは初期段階と定むには、 $\frac{dH}{dt} \sim 0$ となるであろう。そして不安定なモードをもつ果では、初期段階を經過後に於いて $\frac{dH}{dt} > 0$ であろう。従ってその相関領域では、

$$\frac{dH(t)}{dt} < 0$$

である。 $dH(t)/dt$ の下限の証明は、やゝ困難な問題である。何故ならば、成長率の時間変化を考へに取り入れなければならないからである。成長率の時間変化は、この形式で云うならば $[\langle fff \rangle - \langle f \rangle \langle f \rangle \langle f \rangle - \Sigma G(t)]$ と云い量に關係があつて、今迄問題にして来た領域の外にあるからである。最後にもっとも興味ある問題、強い乱れから、弱い乱れへの移行素わりの問題については、(8)式、(9)式を眺める即ち、少なくとも弱い乱れに移った後に於いては、ここでのベロリ法海は可能でありそうである。しかしそれは数式の上だけのことであつて、少くも云いことは今の所むづかしい。

最後に、著者の興味と、乱れの汎函数形式化に導き、終始熱心な指導と
 及討論として頂いた梁教授に心から感謝の意を表します。又この小論文に
 ついて討論に参加して頂いた方々、中でもブリットン、ドーン、寺本、オ
 ーバマとの各氏に感謝致します。

References

- (1) Ira B. Bernstein, Phys. Rev. 109, 10(1958)
- (2) D. C. Montgomery and D. A. Tidman, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill (1964), N.Y., Also see the lecture note by Montgomery given at the Institute of Theoretical Physics, University of Colorado, summer 1966.
- (3) E. Minardi and F. Santini, Physica 32, 497(1966). However, their definition of entropy is not same as the minus of H-function defined here by Eq.(2).
- (4) Toshio Nakayama and John Dawson, PPL-AF-5, Princeton University Plasma Physics Laboratory, May 1966. J. Math. Phys. (To be published)
- (5) A. A. Vedenov, J. Nucl. Energy Pt. C, 5, No. 3, 169(1963)
 W. Drummond and D. Pines, Ann. Phys. (N.Y) 28, 478(1964)
- (6) Toshio Nakayama, Phys. Fluids (to be published)
- (7) T. Tatsumi and N. Ikeda, Private Communication (To be published)
- (8) Ira B. Bernstein and Folker Engleman, Phys. Fluids 9, 937 (1966)