

相関の強い電子系 $-0, 1, \dots, \infty$ 次元 -

東京工業大学 斯波弘行

(講義内容の予定)

- 「フェルミ流体」対「Mott 絶縁体」
 - ・ 系の次元とフェルミ流体論成立の条件
 - ・ バンド理論の破綻と Mott 絶縁体
- ゼロ次元多体問題
 - ・ 「フェルミ流体」の典型としての金属中の磁性不純物（近藤効果）
- 一次元 Hubbard モデル：「非フェルミ流体」の典型例
 - ・ 強相関極限から： $U/t \rightarrow \infty$ での解の性質
 - ・ スピンと電荷の「分離」
 - ・ 弱相関極限から： 摂動論における発散、bosonization 理論
- ∞ 次元 Hubbard モデル：「平均場」的振舞いを示す厳密に解ける系
 - ・ ∞ 次元の特徴
 - ・ Mott 転移、反強磁性への相転移など
- 二次元、三次元系など
 - ・ 一次元と ∞ 次元のいずれに近いか
 - ・ 異なる次元の間のクロスオーバー

(講義の概要)

固体電子における「電子間相互作用の効果」、すなわち、「電子相関」は古くからの問題で、初期の段階では d 電子が主役となる遷移金属や遷移金属化合物が対象であったが、 $4f$ 電子にからむ「重い電子系」の実験的研究、「酸化物高温超伝導」の発見などによって、その重要性が再認識されている。

この講義では、話題を絞り、ハバード・モデルをプロトタイプとする「相関のある電子系」の性質について、多くの研究によって分かってきたことを述べる。一般に電子間相互作用が強くなると、電荷の揺らぎが抑えられ、スピンの揺らぎが大きくなるが、その詳細は系の次元などに依る。系の次元が 0 次元、1 次元の場合にはほぼ完全に解け、 ∞ 次元の場合も現在解明されつつある。現在の所、二、三次元系については確実に分かっていることは限られている。講義では、特に、「相関の弱い極限」と「相関の強い極限」について初等的計算に基づく考察をし、次にその二つの極限がどのような関係になっているか、を考え、相関の強さを弱い極限から強い極限まで変えていったときの相図などを求める。以下に講義のアウトラインを述べ、関係する参考文献をやや詳しく挙げておく。ここではスペースの関係で書けない詳しい説明は講義で行なう予定である。全般的な参考書としては [1.1-3] を薦める

[1.1] 芳田 奎：磁性（岩波書店, 1991）。

[1.2] 山田耕作：岩波講座「現代の物理学」—電子相関（岩波書店, 1993）。

[1.3] 川畑有郷：電子相関（丸善, 1992）。

「フェルミ流体」対「Mott 絶縁体」

相互作用のある電子系の性格が、相互作用がない系と連続的につながっているのであれば、相互作用の弱い極限からの摂動論が有効である。「フェルミ流体論」はこのような考えを定式化したものである。[2.1-3]（フェルミ流体論は、たとえ相互作用が弱くなくても、弱い領域と連続的につながっていれば適用出来る。）

「フェルミ流体論」が成立するためには、フェルミ流体での相互作用の着物を着た「準粒子」のエネルギーを ε とするとき、準粒子同志の散乱による寿命 $\tau(\varepsilon)$ に伴うエネルギー幅が無視出来るという条件

$$\frac{\hbar}{\tau(\varepsilon)} \ll \varepsilon \quad (1)$$

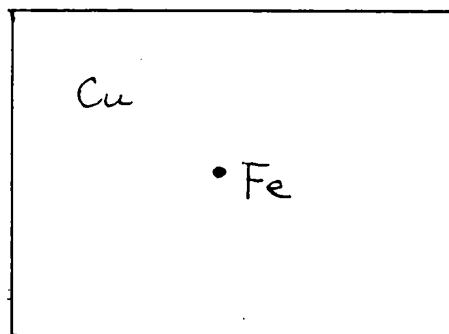
が満たされねばならない。この条件は一次元系では満たされない。（二次元以上でも、フェルミ面が特殊で一つの方向を除いて k 依存性がないときは一次元系と同様である。）二次元以上では、円（あるいは球）形のフェルミ面に対して、上の条件は満たされる。[2.4] 二次元、三次元の系では「フェルミ流体」は準粒子間の相互作用のため、何らかの秩序状態（超伝導状態、強磁性状態など）へ向けての「不安定化」が起こる可能性がある。

相互作用がない系と連続的につながっていないケースとして「Mott 絶縁体」がある。
 [2.5-7] Mott 絶縁体とは、単位胞当りの電子総数が奇数で、バンド理論を適用すれば金属になると期待されながら絶縁体になっている系で、電子間相互作用が本質的に重要な場合である。電子間相互作用が電子のバンド幅より十分大きく、電子は各原子に局在している状態から出発して、一つの電子を別の原子へ移動すると電子間のクーロン・エネルギーが増大して、それが電子の移動によるエネルギーの低下を上回るとしよう。そのときは励起に大きいエネルギーを要し、結果的に電子の移動が起こらない（絶縁体）。電子の局在によりスピンの自由度が残っている。

- [2.1] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii: *Statistical Physics* Part 2 (Pergamon)
- [2.2] D. Pines and P. Nozières: *The Theory of Quantum Liquids* I (Benjamin)
- [2.3] P. Nozières: *Theory of Interacting Fermi Systems*
- [2.4] C. Hodges, H. Smith and J. W. Wilkins: *Phys. Rev.* B4, 302 (1971); P. Bloom: *Phys. Rev.* B12, 125 (1975); S. Fujimoto: *J. Phys. Soc. Jpn.* 59, 2316 (1990).
- [2.5] J.H. de Boer and E.J.W. Verwey: *Proc. Phys. Soc. London* A49, 59 (1937); N.F. Mott: *Proc. Phys. Soc. London* A62, 416 (1949).
- [2.6] N.F. Mott: *Metal-Insulator Transitions* (Taylor and Francis, 1974).
- [2.7] 藤森 淳: *パリティ* 3, No.6, p.16 (1988); J. Zaanen, G.A. Sawatzky and J.W. Allen: *Phys. Rev. Lett.* 55, 418 (1985).

「フェルミ流体」の典型としての金属中の磁性不純物（近藤効果）

Cu 中の Fe のような、金属中の原点に鉄族不純物が一個ある系を考える。この系は「近藤効果」[3.1] の起こる系として知られている。



これを記述する最も簡単なモデルは Anderson モデル [3.2]

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_{\sigma} \epsilon_d n_{d\sigma} + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow} + \sum_{k\sigma} (V c_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{H.c.}) \quad (2)$$

である。右辺の四つの項は、伝導電子のエネルギー、不純物局在レベル、そこでのクーロ

ン相互作用、局在レベルと伝導電子との波動関数の混成である。(これに類似のモデルとして Wolff モデル [3.3])

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)\sigma} t_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \sum_{\sigma} \varepsilon_0 n_{0\sigma} + U n_{0\uparrow} n_{0\downarrow} \quad (3)$$

がある。tight-binding モデルの原点 (サイト 0) に不純物があり、そのレベルは ε_0 だけずれ、不純物原子上でだけクーロン斥力 (第 4 項) が働いているとするものである。(2) と (3) の物理には本質的違いはない。以下では (2) を対象とする。

(2) で U 項が電子間相互作用を表しているが、 U の大きい場合の系の基底状態とその近傍の性質を知りたい。この系はゼロ次元系であるからその基底状態の性格は U の大きさを 0 から ∞ まで増すとき連続的に変化すると期待される。即ち、十分低温では系は「フェルミ流体」となっているはずで、そうであれば U についての摂動論が基底状態の研究に有効である。[1.1,2]

まず、 $U = 0$ のケースを考える。(後の為に磁場があるとして $\varepsilon_d \rightarrow \varepsilon_{d\sigma}$ としておく。)(2) は「共鳴散乱」を記述しているから、フェルミ・エネルギー ($\varepsilon = 0$) での伝導電子の不純物による散乱の t 行列は、量子力学の共鳴散乱の表式より

$$t_{\sigma}(0+i\delta) = \frac{|V|^2}{0 - \varepsilon_{d\sigma} + i\Delta} = -\frac{1}{\pi N(0)} \sin \eta_{\sigma}(0) e^{i\eta_{\sigma}(0)} \quad (4)$$

となる。ここで、 δ は正の無限小の量、 $N(0)$ はフェルミ準位 ($\varepsilon = 0$) での状態密度、 $\Delta = \pi |V|^2 N(0)$ は共鳴の幅である。 $\eta_{\sigma}(\varepsilon)$ はスピン σ 、エネルギー ε の電子の散乱の「位相のずれ」で、上の関係式から

$$\eta_{\sigma}(0) = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{0 - \varepsilon_{d\sigma}}{\Delta} \quad (5)$$

である。もう一つ重要な関係は局在電子数 $\langle n_{d\sigma} \rangle$ とフェルミ・エネルギーでの「位相のずれ」との関係 (Friedel の総和則)

$$\langle n_{d\sigma} \rangle = \frac{1}{\pi} \eta_{\sigma}(0) \quad (6)$$

である。

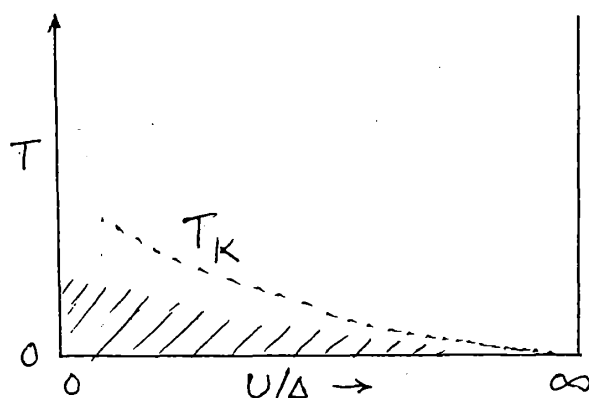
U についての摂動論を用いると、(4)-(6) の関係を $U \neq 0$ の場合に一般化出来る。この際の条件は、電子間の相互作用による非弾性散乱による電子の寿命効果が無視出来ることである。(U についての摂動論が使えるときにはそれは ε^2 に比例するから、フェルミ・エネルギー上では確かに成り立つ。) この条件が満たされるときには、 $U \neq 0$ の場合への一般化は

$$\varepsilon_{d\sigma} \rightarrow \varepsilon_{d\sigma} + \Sigma_{d\sigma}(0) \quad (7)$$

という置き換えでよい。 $\Sigma_{d\sigma}(0)$ はフェルミ・エネルギーでの局在 d 電子の「自己エネルギー部分」で、上の議論から実数である。多体効果はすべて $\Sigma_{d\sigma}(0)$ に入っており、必要があれば摂

動計算によって（少なくとも低次は）計算出来る。絶対0度における不純物のスピン帯磁率 $\Delta\chi_s$ 、電荷感受率 $\Delta\chi_c$ は、 $\varepsilon_{d\uparrow}$ と $\varepsilon_{d\downarrow}$ を微小に変化したときの局在電子数 $\langle n_{d\sigma} \rangle$ の変化と関係している。

このような摂動展開から、(1) 当然期待されるように、 U が増加すると不純物スピン帯磁率が増大し、電荷感受率が減少する。すなわち、 U が十分大きい極限では電荷の揺らぎは抑えられ、スピンの揺らぎが支配的となる。(2) 不純物による低温比熱係数 $\Delta\gamma$ は不純物スピン帯磁率 $\Delta\chi_s$ と電荷感受率 $\Delta\chi_c$ の和に比例していることが示せる。その結果 Wilson 比 R_W ($\Delta\gamma/\Delta\chi_s$ を $U=0$ で1に規格化した量) は U の増加と共に $R_W=1$ から $R_W=2$ まで単調に増大することが示される。こうして、 U の小さい領域から出発した摂動論は、図の近藤温度 T_K 以下の低温領域（斜線部）において、 U の大きい領域までを記述出来る。[1.1,2]



[3.1] J. Kondo: Prog. Theor. Phys. **32**, 37 (1964).

[3.2] P. W. Anderson: Phys. Rev. **124**, 41 (1961).

[3.3] P. A. Wolff: Phys. Rev. **124**, 1030 (1961).

一次元 Hubbard モデル : 「非フェルミ流体」の典型例

次に考えるのは、鉄属原子が一次元的に並んだような系である。人工的に作った幅の狭い量子細線などを対象にしていると思ってもよい。この一次元系ではフェルミ流体論は適用出来ない。むしろ「非フェルミ流体」の典型と考えるべきである。

具体的に、最も簡単な一次元 Hubbard モデル [4.1]

$$\mathcal{H} = -t \sum_{(i,j),\sigma} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \text{H.c.}) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad (8)$$

について見よう。このモデルは Bethe 仮説によって厳密に解けることはよく知られているが、[4.1-3] この講義では別の解法をのべよう。

一次元 Hubbard モデルでは、 U を摂動として摂動計算をすると発散に遭遇する。むしろ強相関極限 ($U/t \rightarrow \infty$) の方がある意味で簡単で、縮退のある系の摂動論で完全に解ける。[4.4] すなわち、 $1/U$ 展開である。初等的摂動計算から、 $U \rightarrow \infty$ での基底状態の波

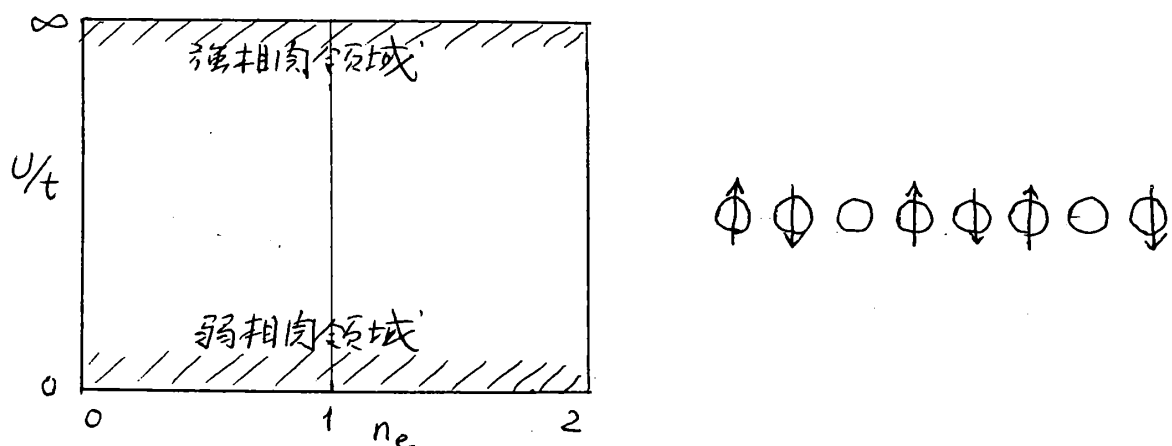
動関数については、 N 個の電子がサイト $x_1, \dots, x_N$ にあって、その中で M 個の $\downarrow$ スピンの順番が $y_1, \dots, y_M$ であるときの基底状態の波動関数の振幅を $f(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_M)$ とすると、

$$f(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_M) = \det[\exp(ik_i x_j)] \cdot \Phi(y_1, \dots, y_M), \quad (9)$$

が成り立つことが示せる。即ち、電荷の自由度を記述する「自由なスピンレス・フェルミオン」のスレーター行列とスピンの自由度を記述する部分 Φ の積で書け、 Φ は一次元 $S = 1/2$ Heisenberg 反強磁性体の基底状態の波動関数 (Bethe の解[4.5]) である。(9) を使って、基底エネルギーは $1/U$ のオーダーまで正確に

$$E/N_A = -\frac{2t}{\pi} \sin(\pi n_e) + 2J_{\text{eff}} \times (-\ln 2) \quad (10)$$

と求まる。ここで $J_{\text{eff}} = Jn_e^2(1 - \sin(2\pi n_e)/(2\pi n_e))$ は有効交換相互作用で、($J \equiv 2t^2/U$) n_e は電子密度である。[4.4] (10) は $n_e = 1$ のとき、一次元 Heisenberg モデルの基底エネルギーを再現する。



基底状態の波動関数 (9) は際だった特徴を持つ。まず、電荷の自由度とスピンの自由度の分離である。この系から一個の電子を取り去ると、電荷のホール (ホロン) とスピン状態の「欠陥」(スピノン) に分離する。すなわち、ホロンとスピノンが基本励起になっている。波動関数 (9) からスピン相関関数の漸近形が解析的に計算されている。[4.6] 重要な点は (9) の与える相関関数はすべて「べき乗則」に従い、「非フェルミ流体的」で、この後述べる U の小さい「弱相関領域」と自然につながっていることである。

次に U の小さい領域を考える。前に述べたように、単純な摂動計算をすると対数発散にすぐ直面する。この発散は「非フェルミ流体的」性格が顔を出した、とみることができる。ところで、弱い相互作用をしている一次元電子系の場合は、電荷密度、スピン密度の揺らぎで系を記述する bosonization 理論が有用であることはよく知られている。[4.7-10] それによると電子密度 $n_e < 1$ で磁場がないとき、ハミルトニアンは電荷密度の揺らぎを記述

する部分（添字に ρ がつく）とスピン密度の揺らぎを記述する部分（ σ がつく）の和として書ける。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= H_\rho^0 + (H_\sigma^0 + H'_\sigma) \\ H_\rho^0 &= \int dx \left[\frac{\pi}{2} u_\rho K_\rho \Pi_\rho^2 + \frac{u_\rho}{2\pi K_\rho} \left(\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x} \right)^2 \right] \\ H'_\sigma &= \frac{2g_{1\perp}}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \cos(\sqrt{8}\phi_\sigma),\end{aligned}\tag{11}$$

と書ける。 H_σ^0 は H_ρ^0 で ρ をすべて σ で置き換えればよい。ここで $\phi_\rho(\phi_\sigma)$ は電荷（スピン）密度の揺らぎの位相であり、 Π_ρ, Π_σ はそれぞれの共役な運動量密度、 u_ρ, u_σ はそれらの揺らぎの速度である。 $g_{1\perp}$ は $-k_F$ から $+k_F$ への $2k_F$ -散乱（後方散乱）の強さである。斥力 Hubbard モデルの場合、 H'_ρ -項は 0 へ繰り込まれ、[4.11] 漸近的に $H_\rho + H_\sigma$ にスケールされる。（その際パラメータは繰り込まれた値になる。）即ち、Gauss モデル（Tomonaga-Luttinger モデル）をうる。

この Tomonaga-Luttinger モデルは Gaussian ゆえ、一般に相関関数の $x \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\langle \hat{O}(x) \cdot \hat{O}(0) \rangle = \frac{1}{|x|^\gamma} (\text{oscillatory part}),\tag{12}$$

となる。指数 γ と振動部分の形は物理量 $\hat{O}$ に依存し、 K_ρ, K_σ の関数である。Hubbard モデルはスピンについて等方的であることをに注意すると $K_\sigma = 1$ となり、指数は唯一のパラメータ K_ρ により決まることになる。従って、臨界指数の間には様々な関係式（scaling relation）が成り立つ。[4.9] こうして得られた結果は $U/t \rightarrow \infty$ について結果とも辻褄が合っている。また、 K_ρ は、Hubbard モデルの場合、Bethe 仮説からも U/t と n_e の関数として計算されていて [4.2,3,10]、それとも合っている。

- [4.1] E. H. Lieb and F. Y. Wu: Phys. Rev. Lett. **20**, 1445(1968); C. N. Yang: Phys. Rev. Lett. **19**, 1312(1967).
- [4.2] N. Kawakami and S.-K. Yang: Phys. Lett. A**148**, 359 (1990); 川上則雄：日本物理学会誌 **46**, 565 (1991).
- [4.3] H. Frahm and V. E. Korepin: Phys. Rev. B**42**, 10551 (1990).
- [4.4] H. Shiba and M. Ogata: Int. J. Mod. Phys. B**5**, 31 (1991); M. Ogata and H. Shiba: Phys. Rev. B**41**, 2326(1990); M. Ogata, T. Sugiyama and H. Shiba: Phys. Rev. B**43**, 8401 (1991).
- [4.5] H. Bethe: Z. Phys. **71**, 205(1931); L. Hulthén: Arkiv. Mat. Astron. Fys. **26A**, No.11 (1938).
- [4.6] A. Parola and S. Sorella: Phys. Rev. Lett. **64**, 1831(1990).
- [4.7] J. Sólyom: Adv. Phys. **28**, 201 (1979); V. J. Emery: *Highly Conducting One-Dimensional Solids*, (Plenum, 1979), p. 247; 杉山忠男：物性研究 **42**, 259 (1984).

- [4.8] F. D. M. Haldane: J. Phys. C **14**, 2585(1981); Phys. Rev. Lett. **45**, 1358 (1981); Phys. Lett. **81A**, 153 (1981).
 [4.9] S. Sorella, A. Parola, M. Parrinello and E. Tosatti: Europhys. Lett. **12**, 729 (1990).
 [4.10] H. J. Schulz: Phys. Rev. Lett. **64**, 2831(1990).
 [4.11] S. T. Chui and P. A. Lee: Phys. Rev. Lett. **35**, 315 (1975).

∞次元 Hubbard モデル : 「平均場」的振舞いを示す厳密に解ける系

∞次元というようなこの世にないケースをなぜ考えるのだろうか。∞次元は自明ではないが、以下に記すように原理的に解ける系であること、また、三次元系（あるいは、二次元系も）∞次元に近いと予想されるからである。（相転移の理論で、4次元とか、成分数 n が ∞ の場合とかを出発点と、3次元、 $n=3$ あるいは $n=2$ の性質を調べるのと同じ発想である。）[5.1-3]

モデルとしては最も簡単な Hubbard モデル

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{2d}} \sum_{(ij)\sigma} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \text{H.c.}) + U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} \quad (13)$$

をとる。ここで、 d は系の次元で、格子としては「超立方格子」（立方格子の d 次元への一般化）で、 $d \rightarrow \infty$ の極限をとるとしよう。第一項で $d^{-1/2}$ の因子があるのは、こうすると平均のバンド幅が $d \rightarrow \infty$ で d に依らないで 1 のオーダーになり、 U と競争出来るためである。第一項のエネルギー・スペクトル $\varepsilon_k = -\sqrt{\frac{2}{d}} \sum_{\alpha=1}^d \cos k_\alpha$ の状態密度 $D(\varepsilon)$ は $d \rightarrow \infty$ の極限で

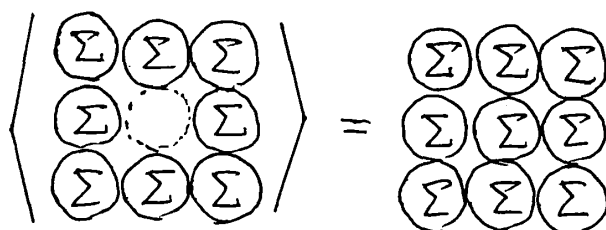
$$D(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \quad (14)$$

となり、Gaussian である。[5.4-6]

最も重要な点は、∞次元では多体効果がある程度簡単になって、Green 関数の自己エネルギー部分が局所的（即ち、 k 依存性のない）になることである。これは U の二次の自己エネルギー部分で具体的に d 依存性をみると容易にわかる。[5.5,6] 結局、 $d \rightarrow \infty$ では一個のサイトの多体問題、すなわち、「拡張された Anderson モデル」を解くことに帰着する。「拡張された」というのは、周りのサイトと辻褄が合うように $\Sigma(\omega)$ を決めねばならないからである。この理論では Hartree-Fock 近似理論と違って、局所的電子相関が $\Sigma(\omega)$ の ω 依存性を通して入っているので、相互作用が強い場合も正しい。

∞次元の Hubbard モデルでは、一般に、「対称性の破れ」が起こる可能性がある。従って、 $\Sigma(\omega)$ は一般にはサイトとスピンに依存すると考えねばならない。可能な状態は様々あるが、代表的なものとしては、(1) 常磁性状態： Σ がサイトとスピンに依らない、(2) 強磁性状態： Σ がスピンに依るがサイトに依らない、(3) 反強磁性状態： Σ が副格子とスピンに依存する、などである。

ここで常磁性状態を考えよう。このとき、 $\Sigma(\omega)$ は次の図でシンボリックに示す関係式で辻褃があうように決められる。この図の意味は、左辺の $\langle \dots \rangle$ は原点のサイトにおける U の効果を取り込んだ Green 関数（但し、原点以外のサイトは $\Sigma(\omega)$ という自己エネルギー部分を持つ）を求め、それを原点にも $\Sigma(\omega)$ を置いたときの Green 関数と等しい、とする。この関係は、等式を満たす $\Sigma(\omega)$ を求めよ、という要請である。（注意：この考え方は、合金の取り扱いでよく知られる「コヒーレント・ポテンシャル近似」と同じである。）



右辺で原点から原点へのプロパゲーターは、 $\Sigma(\omega)$ が与えられているときには、

$$\bar{G}(\omega) = \sum_k \frac{1}{\omega - \varepsilon_k - \Sigma(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) \frac{1}{\omega - \Sigma(\omega) - \varepsilon} \quad (15)$$

によって求まる。左辺の計算に必要な、原点には $\Sigma(\omega)$ がなく、周りのサイトだけに $\Sigma(\omega)$ があるときの原点から原点へのプロパゲーターを $G_0(\omega)$ とすると、

$$\bar{G}(\omega)^{-1} = G_0(\omega)^{-1} - \Sigma(\omega) \quad (16)$$

が成り立つ。

こうして、 $G_0(\omega)$ が求まると、後は Anderson モデルを解くのと同じである。[5.7-10] ただし、 $G_0(\omega)$ を同時に矛盾なく決めねばならない。この問題では数値計算が避け難いが、 U についての摂動論以外に、量子モンテカルロ法 [5.9-12] と数値繰り込み群法 [5.13] が最も信頼出来るものと考えられている。以下に主な結果をまとめる。

(1) 常磁性状態での「金属・絶縁体転移」

$n_e = 1$ では、 U が小さいときには、（常磁性状態であれば）フェルミ・エネルギーでの状態密度が有限で、金属的であると期待される。 U を大きくしていくと、状態密度は次第に 3 ピーク構造に変わる。中央のフェルミ・エネルギーの所のピークは近藤ピークと類似していて、その幅は U の増大と共にどんどん狭くなる。 U が限りなく大きくなったときの振舞いとしては、幅が限りなく狭くなる可能性とある臨界値で中央のピークが消失するか可能性の二つある。semi-elliptic なバンドのようにバンド幅が有限であれば、 U を十分大き

くすれば絶縁体となると期待される。金属・絶縁体転移の臨界値や転移が一次か、二次か、を決めるには精度のよい計算が求められる。

(2) 常磁性状態から反強磁性状態への転移

$n_e = 1$ では、超立方格子を取ると、ネスティングが起こっているので、十分低温では反強磁性状態になるはずで、相図が決められている [5.9,10]。

(3) $n_e < 1$

$n_e = 1$ と異なり、 $n_e < 1$ についてはその基底状態は自明ではない。常磁性状態についての研究はなされていて、フェルミ流体的振舞いが見いだされている。

(4) そのほかの系

周期的 Anderson モデル [5.14,15] や Holstein モデル [5.16] など調べられている。

∞ 次元の結果は、我々が興味を持っている三次元系の結果にかなり近いと期待される。

- [5.1] D. Vollhardt: *Correlated Electron Systems* ed. by V. J. Emery (World Scientific, 1993), p.57.
- [5.2] A. Georges, G. Kotliar and Q. Si: *Strongly Correlated Electron Systems III* (World Scientific, 1992), p.257.
- [5.3] M. Jarrell, H. Akhlaghpour and T. Pruschke: *Quantum Monte Carlo Methods in Condensed Matter Physics* ed. by M. Suzuki (World Scientific, 1993), p.221.
- [5.4] W. Metzner and D. Vollhardt: Phys. Rev. Lett. **62**, 324 (1989).
- [5.5] E. Müller-Hartmann: Z. Phys. **B74**, 507 (1989).
- [5.6] E. Müller-Hartmann: Z. Phys. **B76**, 211 (1989).
- [5.7] A. Georges and G. Kotliar: Phys. Rev. **B45**, 6479 (1992).
- [5.8] A. Georges and W. Krauth: Phys. Rev. Lett. **69**, 1240 (1992).
- [5.9] M. Jarrell: Phys. Rev. Lett. **69**, 168 (1992).
- [5.10] M. Jarrell and T. Pruschke: Z. Phys. **B90**, 187 (1993).
- [5.11] M. J. Rozenberg, X. Y. Zhang and G. Kotliar: Phys. Rev. Lett. **69**, 1236 (1992).
- [5.12] T. Pruschke, M. Jarrell and D. Cox: Phys. Rev. **B47**, 3553 (1993).
- [5.13] O. Sakai and Y. Kuramoto: Solid State Comm.
- [5.14] H. Schweitzer and G. Czycholl: Solid State Comm. **69**, 171 (1989).
- [5.15] M. Jarrell, H. Akhlaghpour and T. Pruschke: Phys. Rev. Lett. **70**, 1670 (1993).
- [5.16] J. K. Freericks, M. Jarrell and D. J. Scalapino: Phys. Rev. **B**.