

Anosov automorphism の存在問題

名大理学部 伊藤 清

序

Smale 学派 により、離散力学系の研究が進められて
いるが構造安定系の例として Anosov diffeomorphism が
重要視されている ([N1]). Smale の予想とは Anosov diffeo-
morphism が位相的天役を除けば代数的例につきるとい
う予想をこの説明と 6 次元以下での代数的例を分類
した筆者の結果 [It] を報告する。

§1 Smale の予想について

Anosov diffeomorphism の定義を述べる。Compact 多様体
 M 上の diffeomorphism $f \in \text{Diff}(M)$ が Anosov である
とは接束 TM が df で不変な 2 つの subbundle E_s, E_u
の Whitney 和であり定数 $C > 0, \lambda > 1$ で条件

$$\begin{aligned} \|df^n v\| &\geq C \lambda^n \|v\| & v \in E_u \\ \|df^{-n} v\| &\leq C \lambda^{-n} \|v\| & v \in E_s \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \|\cdot\| \text{ は接ベクトルの長さ} \\ n \text{ は任意の自然数} \end{array} \right)$$

を満すものが存在する事である。

次の双曲型 infra-nilmanifold diffeomorphism が中心的例

である。 N を連結単連結 Lie 群とし、その左移動と自己同型
がある N の Lie 変換群 $N \rtimes \text{Aut}(N)$ の離散部分群 Γ で

- $(\Gamma \cap \Gamma_n N) < \infty$, ◦ $N/\Gamma_n N$ は compact
- Γ の N への作用は free

を満たすものを考える。 として $g = n \circ \psi \in N \rtimes \text{Aut}(N)$ で

$$1) g \Gamma g^{-1} = \Gamma$$

2) $d\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{r})$ は双曲型 (絶対値 1 の固有値を持たぬ)

を満たす g が導く Anosov diffeomorphism $\bar{g} \in \text{Diff}(\Gamma \backslash N)$ を

双曲型 intranilmanifold diffeomorphism と呼ぶ (双曲型

自己同型を持つ Lie 環 $\mathfrak{r}$ は nilpotent である [Bo, P.111]).

注意 1 $g = n_0 \psi \in \text{Diff}(N)$ の不動点 $n_0 \in N$ の存在
が知られている ([To, P.312]) ので $\bar{g}$ は 双曲型 nilmanifold diffeo
morphism $\bar{g}: \Gamma' \backslash N \ni \Gamma' x \rightarrow \Gamma' \psi(x) \in \Gamma' \backslash N$

$$(\Gamma' = n_0(\Gamma \cap N)n_0^{-1}, \quad \psi'(x) = n\psi(x)n^{-1})$$

において有限に被覆される ($d\psi'$ と $d\psi$ の固有値全体は等)。

Smale の予想とは "任意の Anosov diffeomorphism $f \in \text{Diff}(M)$ に対し、ある双曲型 intranilmanifold diffeomorphism $\bar{g} \in \text{Diff}(\Gamma' \backslash N)$ と同相写像 $h: M \rightarrow \Gamma' \backslash N$ が存在し

$h \circ f = \bar{g} \circ h$ を満たすであろう" という予想である。これについて

① Franks-Newhouse の定理 ([Fr], [Ne])

$\dim E_s$ or $\dim E_u = 1 \Rightarrow N = \mathbb{R}^n$ で予想は正

② A. Manning の定理

$M = \mathbb{R} \setminus N$ (intra-nilmanifold) $\Rightarrow$ 予想は正

が知られている主な結果である。

注意2 位相共役だが微分共役ではないものの例が
5次元以上の exceptional torus 上で構成されて
いる ([F-J])。

Smale の予想が正しければ, Anosov diffeomorphism の
軌道構造を見るには, 双曲型 intra-nilmanifold diffeo-
morphism のそれを見ておけば十分という事になるし, 反例
があるのなら双曲型 intra-nilmanifold diffeomorphism が
どれだけあるかをある程度 正確に調べる必要がある。

何れにせよ, Anosov diffeomorphism を持つ intranilmanifold
を特長づける事は重要である。実際 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^n$ につい
て Porteus が調べている ([Po])。そこで双曲型 nil-
manifold diffeomorphism を持つ nilmanifold がどれだけ
あるかを以下の節で述べる (cf. 注意1)

§2. Anosov automorphism の定義と存在の必要条件
 nilmanifold N/Γ に対し, $\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環
 が対応する事と, N/Γ が Anosov diffeomorphism を持つか
 どうかは その $\mathbb{Q}$ 上の Lie 環が Anosov automorphism
 を持つ事が同値である事, として比較的容易に
 存在条件について述べる。

双曲型 nilmanifold diffeomorphism $\bar{\psi} \in \text{Diff}(N/\Gamma)$
 $(\psi \in \text{Aut}(N))$ が存在とする。微分同相である指数
 写像 $\exp: \mathcal{N} \rightarrow N$ を使って $\mathcal{N}$ 上で考えると

$$d\psi(\exp^{-1}P) = \exp^{-1}P, \quad d\psi \in \text{Aut}(\mathcal{N})$$

である。ここで $\exp^{-1}P$ の $\mathbb{Q}$ -linear span を $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ と書くと
 $[\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}] \subset \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ である事, $\exp^{-1}P$ の $\mathbb{Z}$ -linear span
 L は $\mathcal{N}$ の格子をなす事が知られている ([Mal], [Ra]).
 $d\psi L = L$ だから 一般の $\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$
 に対し次の定義を行う

定義 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の双曲型自己同型 ($\mathbb{Q}$ 上の) φ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の
 ある格子 L ($\text{rank } L = \dim \mathfrak{g}$ なる加群) を保つ時,
 φ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の Anosov 自己同型と呼ぶ。

逆に $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の Anosov automorphism φ と $\varphi L = L$ なる L に對し,

$G = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ に対する連結単連結 Lie 群.

$\Gamma = \exp L$ から生成される G の部分群

$\psi : d\psi = \varphi \otimes \mathbb{R}$ なる $\psi \in \text{Aut } G$

とすれば $\bar{\psi} \in \text{Diff}(G/\Gamma)$ は 双曲型 nilmanifold diffeomorphism である.

2> の nilmanifold $M_i = G_i/\Gamma_i$ ($i=1,2$) に対するある nilmanifold M_3 と有限被覆写像 $p_i: M_3 \rightarrow M_i$ ($i=1,2$) が存在する時, M_1 と M_2 は commensurable と呼ばれる. 自然な全単射対応

$\{\text{nilmanifold の commensurable class}\}$

$\longleftrightarrow \{\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環の同型類

が成立つ. [Moo, Theorem 2] と [It, Remark 1.4] から

命題 1 nilmanifold G/Γ が Anosov diffeo を持つ事は commensurable な nilmanifold G'/Γ' が持つ事と同値で, 更に対応する $\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環が Anosov automorphism を持つ事に同値である. が導ける.

以下簡単の為 Lie環 $\mathfrak{g}$, subalgebra $\mathfrak{h}$, 自己同型写像 φ 等は 特に記さぬ限り $\mathbb{Q}$ 上のものとする。

$L \subseteq \mathfrak{g}$ の格子とすると $\mathfrak{g}$ の任意の部分空間 $\mathfrak{h}$ に対し $L \cap \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の $P(L)$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の格子である。

注意2 もし $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{R}$ が irrational な部分空間だと (例 平面における傾きが無理数の直線) $L \cap \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の格子とはならぬ。

従って次の補題が成立する

補題3 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}' : \mathfrak{g}$ の特性 subalgebra.
(任意の自己同型で保たれる ideal)

$\varphi \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ が Anosov $\Rightarrow \varphi|_{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ の Anosov automorphism を導く。

そこで $L \subseteq \mathfrak{g}$ 任意の特性 subalgebra より 有限集合族とすると, $\varphi \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ が Anosov なら φ は 実代数群

$$SA(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{R}) = \{ \varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{R}) \mid (\det \varphi|_{\mathfrak{h}})^2 = 1 \text{ for } \mathfrak{h} \in L \}$$

に含まれている事が判る。実代数群の連結成分が有限

な事 ([Mos]) と, 簡単な考察より次の命題が導ける

命題 4 ([It]) $\mathfrak{g}$ の微分環 $\text{Der } \mathfrak{g}$ の subalgebra $\text{SD}(\mathfrak{g})$ を

$$\text{SD}(\mathfrak{g}) = \{D \in \text{Der } \mathfrak{g} \mid \text{Tr}(D|_{\mathfrak{g}_i}) = 0 \text{ for } \mathfrak{g}_i \in \mathcal{L}\}$$

で定義する。2つの特性 subalgebra $\mathfrak{g}_i \supset \mathfrak{g}_i'$ から生

ずる $\text{SD}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_i'$ への自然な表現を ρ と記

すと ρ が $-{}^t\rho$ が $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_i'$ 上に (同時に) 固有ベクトル

を持つとは $\mathfrak{g}$ は Anosov automorphism を持たぬ。

ただし t は $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_i'$ の適当な基底に対する ρ の行列表示の転置を表す。

注意 5 nilpotent Lie 環 $\mathfrak{g}$ の 特性 subalgebra の例としては $\mathfrak{g}$ との交換子環を取る事で生ずる lower central series の外に次の2系列 $\{\mathfrak{g}_i\}$ がある。

$$\mathcal{V} = \text{ad } \mathfrak{g} \text{ of } \{D \in \text{Der } \mathfrak{g} \mid \text{Tr } DD' = 0 \text{ for } \forall D' \in \text{Der } \mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid DX = 0 \text{ for } \forall D \in \mathcal{V}\}$$

$$\mathfrak{g}_{i+1} = P_i^{-1} \{X + \mathfrak{g}_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_i \mid DX \in \mathfrak{g}_i \text{ for } \forall D \in \mathcal{V}\}$$

($P_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_i$).

$\mathcal{V} = \text{ad } \mathfrak{g}$ ではない方に対する ascending central series に

合わせて $\mathfrak{g}$ の basis を選ぶと ($\mathbb{Q}$ 上定義された) 実代数群 $\text{Aut}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{R})$ の Chevalley 分解と自然に (ブロック diagonal な部分群が 極大完約部分群 F) が得れる。 $\mathfrak{g}$ が Anosov automorphism を持つ事と $F \cap \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ が 双曲型の元を持つ事は同値である。(Chevalley 分解については [Ra, p11] を参照)

§3. 具体例.

この節でも何も記さなければ基礎体は $\mathbb{Q}$ とする。Anosov automorphism を持つ Lie 環の例を 2 種挙げる。

まずは $\mathbb{Q}^n$ ($n \geq 2$) の拡張で, free な k -step nilpotent Lie 環 $\mathcal{N}_k(\mathbb{Q}^n)$ ($k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$) である。ただし $\mathcal{N}_k(\mathbb{Q}^n)$ は $\mathbb{Q}^n$ の basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ に対する長さ k 以下の words $[e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots [e_{i_{j-1}}, e_{i_j}] \dots]]$ ($j \leq k$) から張られるベクトル空間に ブラケットを

◦ 歪対称. ◦ Jacobi 恒等式 ◦ $k+1$ 回以上は 0

のみで交換関係とするよう定義した Lie 環である。

Hirsch の補題 ([F-J, Lemma 1]) を使って具体的に

Words の $\mathbb{Z}$ -span がなす, 格子を不変にする Anosov automorphism の存在を示せる。

注意 1 論文 [A-S] では $\mathfrak{re}(\mathbb{Q}^n)$ が k -step nilpotent Lie 環全体の中で "universality" を持つ事を用いて 幾つかの定理を示しているが, check すべき条件が多く, 具体的な計算は困難と思える。なお $\mathfrak{re}(\mathbb{Q}^n)$ ($n \geq m$) は Anosov automorphism を持たぬ。([It, Proposition 3.1])

オニの例は Borel-Smale の例 ([Sm, p. 2]) の一般化 ([It, Proposition 3.2]) である。この構成法で得られる例は素数でない次元においては豊富にあるのであるが, $(\mathfrak{re}^3 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathfrak{re}^3 \otimes \mathbb{R})$ の非自明な $\mathbb{Q}$ -構造 ($\mathbb{R}$ へ係数拡大して与えられた実 Lie 環となるような $\mathbb{Q}$ 上の Lie 環) が例である事に限って説明する。ただし $\mathfrak{re}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ は

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_i, e_3] = 0 \quad (i=1, 2)$$

で決まる 3次元 Heisenberg Lie 環である。

これを 2次 Galois 拡大とする。既に

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \quad (m \in \mathbb{N}, \text{平方因子を持たぬ})$$

と書ける。\$K\$ の代数的整数全体 \$\mathcal{O}_K\$ は

$$\mathcal{O}_K = \left\{ \frac{a+b\sqrt{m}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a-b \equiv 0 \pmod{2} \right\} \dots m \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\mathcal{O}_K = \{a+b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \dots m \equiv 2 \text{ or } 3 \pmod{4}$$

である。\$\mathcal{V}^3 \otimes_{\mathbb{Q}} K \supset \mathcal{V}^3_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K\$ (\$\mathcal{V}^3_{\mathbb{Z}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Z}}\$) であるが

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{V}^3 \otimes_{\mathbb{Q}} K = 6, \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathcal{V}^3_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K = 6$$

なので、\$K\$ の Galois 変換 \$\sigma\$ (\$\sigma \neq 1\$) を使い diagonal に \$(\mathcal{V}^3 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathcal{V}^3 \otimes \mathbb{R})\$ の中に次のように埋め込む。

$$\mathcal{G}' = \{ (X, X^\sigma) \mid X = \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i \sqrt{m}) e_i \ (a_i, b_i \in \mathbb{Q}) \}$$

$$L' = \{ (X, X^\sigma) \mid X = \sum x_i e_i, (x_i \in \mathcal{O}_K) \}$$

すると \$L'\$ は \$(\mathcal{V}^3 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathcal{V}^3 \otimes \mathbb{R}) = \mathcal{G}' \otimes \mathbb{R}\$ において格子である事が (\$K/\mathbb{Q}\$ の判別式を \$D_K\$ とすると \$\sqrt{|D_K|} \neq 0\$ により) 判る。

一方 Dirichlet の単数定理より単数群 \$\mathcal{O}_K^\times\$ の rank は 1 であり \$K\$ 上の Lie 環 \$\mathcal{V}^3 \otimes K\$ の双典型自己同型

$$\varphi = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 \eta_2 \end{pmatrix} \in \text{Aut}(\mathcal{V}^3 \otimes K) \cap GL(3, \mathcal{O}_K)$$

が十分存在し \$\varphi^\sigma\$ も同様の性質を持つ。そこで

$$\varphi' = (\varphi, \varphi^\sigma)$$

とすれば φ' は L' を保つ Anosov automorphism である。

注意 2. 一般の nilpotent Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対しては
 この構成法の仮定が満たされない場合がある。例えば
 $\mathfrak{g}$ が特性 p 中零 ([Bo, p110]) な双曲型自己同型
 を持たない。しかし、 $\text{Per}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{R})$ が $\mathbb{Q}$ 上対角化
 される非退化行列を持つば全ての $d \geq 2$
 に対し $\mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}$ は Anosov automorphism
 $\sim d\pi$
 を持つ事が容易に判る。この条件は筆者の知る
 大部分の nilpotent Lie 環で満たされている。

§4. 低次元における分類

§3 のオ-の例で $\mathbb{Q}^n (n \geq 2)$ 以外の Lie 環が
 表れるのは $\dim \mathfrak{re}_1(\mathbb{Q}^n) \geq \dim \mathfrak{re}_2(\mathbb{Q}^3) = 6$,
 オ-の例でも非自明 nilpotent Lie 環の次元
 最小のものが 3 次元 Heisenberg Lie 環 $\mathfrak{re}^3$ である
 事から 6 次元以上となってしまう。そこで 6 次元
 以下の nilpotent Lie 環で Anosov automorphism を持つ
 ものかどれだけあるかが問題となるが、§3 で述べ

たものにつくるというのか [It] の系果である。既に

命題 1 5次元以下の infra-nilmanifold $\Gamma \backslash G$ で Anosov diffeo を持つものは $G = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) に限る。(従って [Po, §8] に述べられているものに限る。特に3次元までは torus しかない)

定理 2 6次元の nilmanifold で Anosov diffeo morphism を持つものは 対応する Lie 環で述べると

$$\mathbb{Q}^6$$

$$\pi_2(\mathbb{Q}^3)$$

$$\mathfrak{g}'(m) \quad (m=2,3,5,6, \dots \text{平方因子を持たぬ自然数})$$

に限る。そしてそれらは互いに commensurable ではない。($m \neq m' \Rightarrow \mathfrak{g}'(m) \not\sim \mathfrak{g}'(m')$)

証明は、lower central series の次元に対する考察と 0 でない交換関係が少くなるような basis を使っての Derivation algebra の決定の後に §2: 命題 4 を適用するという方針で行う。

注意 3 特性 subalgebra $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}'$ で $\dim \mathfrak{h} / \mathfrak{h}' = 1$ を満たすものがあるが §2, 補題 2 より $\mathfrak{g}$ は Anosov

automorphism を持たない事が判る。この事でかなりの nilpotent Lie 環が除外される。

注意 注意3 によって特性 subalgebra を多数持つと Anosov automorphism は存在しない。実際 7 次元でも Anosov automorphism を持つものは 2-sep で $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2$ or 3 で 非自明特性部分環が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のみである事が必要とされる。

References.

- [A-S] : L. Auslander and J. Scheuneman, On certain automorphisms of nilpotent Lie groups
Proc. Symp. pure Math. 14 (1970) 9-15
- [Bo] : N. Bourbaki, 原論. 1-環 (1巻) 東京国書 1960
- [F-J] : F.T. Farrell and L.E. Jones, Anosov diffeomorphisms constructed from $\Pi_1 \text{Diff}(S^n)$, Topology 17 (1978), 273-282
- [Fr] : J. Franks, Anosov diffeomorphisms,
Proc. Symp. pure Math. 61-93
- [It] : K. Ito, Classification of nilmanifolds M^n ($n \leq 6$) admitting Anosov diffeomorphisms, to appear.

- [Ma1] : A. Malcev, On a class of homogeneous spaces,
Amer. Math. Soc. Transl. ser.1. vol.9 (1962) 276-307.
- [Man] : A. Manning, There are no new Anosov
diffeomorphisms on tori, Amer. J. Math. 96
(1974), 422-429.
- [Moo] : C.C. Moore, Decomposition of unitary repre-
sentations defined by discrete subgroups of
nilpotent groups, Ann. of Math. (2) 82 (1965) 146-182
- [Mos] : G.D. Mostow, Fundamental groups of homogeneous
spaces, Ann. of Math. 66 (1957), 249-255
- [Ne] : S.E. Newhouse, On codimension one Anosov
diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 761-770.
- [Ni] : Z. Nitecki, Differential Dynamics, The M.I.T.
Press, Cambridge, Mass., 1971
- [Po] : H.L. Porteous, Anosov diffeomorphisms of flat
manifolds, Topology 11 (1972) 307-315
- [Ra] : M.S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie
groups, Springer 1972.

[To]: P. Tomter, Anosov flows on infra homogeneous spaces, Proc. Symp. pure Math 14 (1970) 299-327