

平面分割と直交多項式

京都大学大学院情報学研究科 上岡修平

Shuhei Kamioka
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 はじめに

自然数の 2 次元配列

$$\pi = (\pi_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} & \cdots \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & \cdots \\ \pi_{3,1} & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

$(\pi_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で次の 2 条件を満たすものを **平面分割 (plane partition)** という.

(i) $|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{i,j} < \infty$.

(ii) 任意の $(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^2$ に対して $\pi_{i,j} \geq \max\{\pi_{i+1,j}, \pi_{i,j+1}\}$.

$|\pi|$ を平面分割 π の **ノルム** という. 本研究では平面分割の **良い (nice)**¹ 和公式を (双) 直交多項式を用いて探す.

整数分割を (2 次元) Young 図形で表すように, 平面分割 π も **3 次元 Young 図形** で表すと視覚的に分かりやすい. 例えば平面分割

$$\pi = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(他成分は全て 0) が与えられたとき, 各 $(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^2$ に対して座標 (i,j) のところに $\pi_{i,j}$ 個の箱を積み上げるにより図 1 のような図形を得る. これが平面分割 (2) を視覚化した 3 次元 Young 図形である. なお図 1 には積み上げられた箱の他に 2 つの壁面と床面が描いてある. これにより平面分割を六角形領域の **菱形タイリング (rhombus tiling, lozenge tiling)** と同一視することもできる.

3 次元 Young 図形の底面が $r \times c$ の長方形に収まる平面分割, すなわち $\pi_{r+i,j} = \pi_{i,c+j} = 0$ ($i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) をみたす平面分割の全体を $\mathcal{P}(r, c)$ と書く. さらにそのよう

¹ここでは (3)-(5) のような「 $\Sigma = \Pi$ 」型の等式を **良い (nice)** 和公式と言う [9].

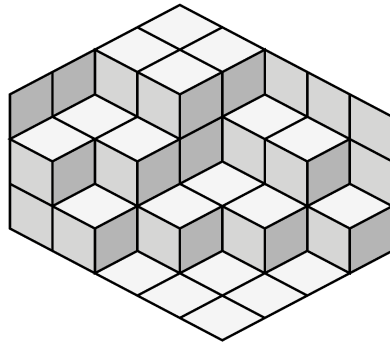


図 1: 平面分割 (2) に対応する 3 次元 Young 図形.

な平面分割の中で 3 次元 Young 図形の高さが n 以下のもの, すなわち $\pi_{1,1} \leq n$ を満たすものの全体を $\mathcal{P}(r, c, n)$ と書く. $\mathcal{P}(r, c)$ が無限集合であるのに対し $\mathcal{P}(r, c, n)$ は有限集合である. 実際 $\mathcal{P}(r, c, n)$ は 3 次元 Young 図形が $r \times c \times n$ の直方体に収まる平面分割の全体であり, そのような平面分割は高々有限個しかない. ちなみに平面分割 (2) は $r \geq 4, c \geq 5, n \geq 3$ のとき $\mathcal{P}(r, c)$ とその部分集合である $\mathcal{P}(r, c, n)$ に属する.

平面分割の良い和公式として最も基本的なものは MacMahon の **ノルム母関数**

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} (1 - q^{i+j+1})^{-1}, \quad (3a)$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c, n)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - q^{i+j+2}}{1 - q^{i+j+1}} \quad (3b)$$

である [10, Section IX]. ノルム母関数 (3a) は同 (3b) から $n \rightarrow \infty$ の極限により得られる. その意味で (3b) は (3a) をより精密化したものである. MacMahon の発見から随分の時間を経て Stanley は **ノルム・トレース母関数**

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c)} q^{|\pi|} a^{\text{tr}(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} (1 - a q^{i+j+1})^{-1} \quad (4)$$

を見つけた [12, 13]. ただし $\text{tr}(\pi)$ は平面分割 π のトレース, すなわち主対角成分の総和である. それから暫くして Gansner は Stanley の結果を **トレース母関数**

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c)} \prod_{-r < \ell < c} q_{\ell}^{\text{tr}_{\ell}(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \left(1 - \prod_{\ell=-i}^j q_{\ell} \right)^{-1} \quad (5)$$

に拡張した [3, 4]. ただし $\text{tr}_{\ell}(\pi)$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) は平面分割 π の ℓ **トレース**と呼ばれ

$$\text{tr}_{\ell}(\pi) = \sum_{j-i=\ell} \pi_{i,j} \quad (6)$$

により定義される. 特に 0 トレースは通常のトレースに一致する.

Stanley のノルム・トレース母関数 (4) および Gansner のトレース母関数 (5) は $\mathcal{P}(r, c)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3a) の一般化である. 実際, 変数の特殊化 $q_0 = aq, q_\ell = q (\ell \neq 0)$ により (5) は (4) に帰着する. さらにトレースを無視する ($a = 1$) ことにより (4) は (3a) に帰着する. ここで素朴に次の疑問が生じる. 「同様の良い和公式で $\mathcal{P}(r, c, n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3b) を一般化するものはあるか.」この疑問に対するナイーブな答えは否である. 実際 (4) および (5) の右辺の $\mathcal{P}(r, c)$ を単純に $\mathcal{P}(r, c, n)$ に取り替えたものは (3b) のように因数分解されない.

本稿では $\mathcal{P}(r, c)$ に対する 2 つのトレース型母関数 (4) および (5) に着目し, それを精密化するような $\mathcal{P}(r, c, n)$ に対する平面分割の良い和公式を求める. すなわち MacMahon のノルム母関数 (3) において (3b) にあたるものを求める. そのために双直交多項式とその組合せ論的解釈を利用する. 以降の議論では紙数の都合上, 証明等の詳細は省略されている場合が多い. 興味ある読者は [7] を参照してほしい.

2 双直交多項式と格子路

$\mathbb{K}$ を体とし, 2 変数 x, y の多項式環の上で定義された線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \mathbb{K}$ を考える. x, y の単項式に対する $\mathcal{F}$ の値をモーメントといい

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] \quad (i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (7)$$

と書く. 線形性より $\mathcal{F}$ はモーメントを決めることにより一意に定まる. モーメントの行列式

$$\Delta_n^{(r,c)} = \det_{0 \leq i,j < n} (f_{r+i,c+j}) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+n-1,c} & \cdots & f_{r+n-1,c+j} & \cdots & f_{r+n-1,c+n-1} \end{vmatrix} \quad (8)$$

は任意の $(r, c, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して非零と仮定する. ただし $\Delta_0^{(r,c)} \equiv 1$ である.

線形汎関数 $\mathcal{F}$ に対する (モニックな) 双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x) \in \mathbb{K}[x]$ を次の 2 条件を満たすものとして定義する.

(i) $P_n^{(r,c)}(x)$ の先頭項は x^n である.

(ii) 非零定数 $h_n^{(r,c)}$ が存在して直交関係式

$$\mathcal{F}[x^r y^{c+j} P_n^{(r,c)}(x)] = h_n^{(r,c)} \delta_{n,j} \quad (0 \leq j \leq n) \quad (9)$$

が成り立つ. ただし $\delta_{n,j}$ は Kronecker のデルタである.

直交関係式 (9) の非零定数 $h_n^{(r,c)}$ は規格化定数と呼ばれる. 双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ の一般形は

$$P_n^{(r,c)}(x) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n-1} & x^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{r+n,c} & \cdots & f_{r+n,c+j} & \cdots & f_{r+n,c+n-1} & x^n \end{vmatrix} \times (\Delta_n^{(r,c)})^{-1} \quad (10)$$

である. これから規格化定数 $h_n^{(r,c)}$ の行列式表示

$$h_n^{(r,c)} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r,c)}}{\Delta_n^{(r,c)}} \quad (11)$$

が得られる. なお変数 x と y の役割を入れ替えた双直交多項式

$$Q_n^{(r,c)}(y) = \begin{vmatrix} f_{r,c} & \cdots & f_{r,c+j} & \cdots & f_{r,c+n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+i,c} & \cdots & f_{r+i,c+j} & \cdots & f_{r+i,c+n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{r+n-1,c} & \cdots & f_{r+n-1,c+j} & \cdots & f_{r+n-1,c+n} \\ 1 & \cdots & y^j & \cdots & y^n \end{vmatrix} \times (\Delta_n^{(r,c)})^{-1} \quad (12)$$

も考えられる. $P_n^{(r,c)}(x)$ と $Q_n^{(r,c)}(y)$ は双直交関係式

$$\mathcal{F}[x^r y^c P_m^{(r,c)}(x) Q_n^{(r,c)}(y)] = h_n^{(r,c)} \delta_{m,n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (13)$$

を満たす. これが「双直交」という名前の由来である. $P_n^{(r,c)}(x)$ と $Q_n^{(r,c)}(y)$ は本質的に同じものなので以下では $P_n^{(r,c)}(x)$ のみを扱う.

命題 1 ([11] 等). 双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ は隣接関係式

$$x P_n^{(r+1,c)}(x) = P_{n+1}^{(r,c)}(x) + a_n^{(r,c)} P_n^{(r,c)}(x), \quad (14a)$$

$$P_n^{(r,c)}(x) = P_n^{(r,c+1)}(x) + b_n^{(r,c)} P_{n-1}^{(r,c+1)}(x) \quad (14b)$$

$((r, c, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3)$ を満たす. ただし $P_{-1}^{(r,c)}(x) \equiv 0$ であり係数 $a_n^{(r,c)}, b_n^{(r,c)}$ は

$$a_n^{(r,c)} = \frac{h_n^{(r+1,c)}}{h_n^{(r,c)}} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r+1,c)} \Delta_n^{(r,c)}}{\Delta_n^{(r+1,c)} \Delta_{n+1}^{(r,c)}}, \quad (15a)$$

$$b_n^{(r,c)} = \frac{h_n^{(r,c)}}{h_{n-1}^{(r,c+1)}} = \frac{\Delta_{n+1}^{(r,c)} \Delta_{n-1}^{(r,c+1)}}{\Delta_n^{(r,c)} \Delta_n^{(r,c+1)}} \quad (15b)$$

により定まる非零定数である.

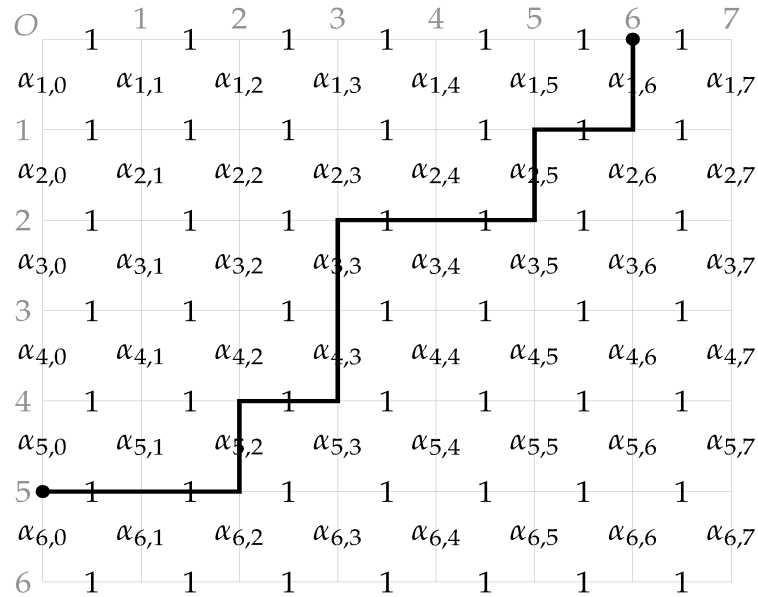


図 2: 辺にラベルの付いた正方格子と $(5,0)$ から $(0,6)$ への格子路.

ここで考えている双直交多項式の概念は, 変数 x と y を同一視する ($x = y$) とき通常の (自己直交的な) 直交多項式に帰着する. 例えば [14] や [2] で議論されているものはそれにあたる. 通常の直交多項式に対する組合せ論的解釈として Viennot による Motzkin 路や Dyck 路による解釈 [15, 16] がある. Viennot のアイディアは直交多項式の満たす隣接関係式 (3 項間漸化式) からモーメントの組合せ論的な表示を得る点にある. このアイディアを隣接関係式 (14) を満たす双直交多項式 $P_n^{(r,c)}(x)$ に借用する.

図 2 のような辺にラベルの付いた正方格子を考える. この正方格子は $\mathbb{Z}^2$ の第 1 象限 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ を行列流の座標で描いたものである. すなわち各格子点は $(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ の形で表され, (i, j) の下および右に隣接する格子点はそれぞれ $(i+1, j)$ および $(i, j+1)$ である. また下端点が $(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ にある縦辺のラベルは $\alpha_{i,j}$ であり, 横辺のラベルは全て 1 である.

この正方格子の上で格子路を考える. 任意の格子点 $(i, j), (k, \ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ に対して (i, j) から (k, ℓ) への格子路と言うときには (i, j) と (k, ℓ) を結ぶ $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ 上の最短路を意味する. ただし $(i, j) = (k, \ell)$ のときは便宜的に長さ 0 の空路 (empty path) を考える. 格子路 P の重みは P の通る全ての辺のラベルの積であり $w(P)$ と書く. ただし任意の空路の重みは 1 とする. 図 2 にあるのは $(5,0)$ から $(0,6)$ への格子路の 1 つであり, この格子路の重みは $w(P) = \alpha_{1,6}\alpha_{2,5}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3}\alpha_{5,2}$ である.

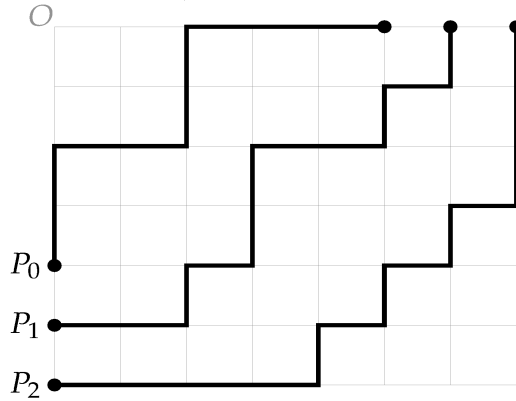


図 3: 非交叉格子路の組 $(P_0, P_1, P_2) \in \mathcal{LP}(4, 5, 3)$.

定理 2. 正方格子の縦辺のラベル $\alpha_{i,j}$ を隣接関係式 (14) の係数 $a_n^{(r,c)}, b_n^{(r,c)}$ を用いて

$$\alpha_{i,j} = a_j^{(i-j-1,0)} \quad (i > j), \quad (16a)$$

$$= b_i^{(0,j-i)} \quad (i \leq j) \quad (16b)$$

により定める. このときモーメント $f_{i,j}$ は

$$\frac{f_{r,c}}{f_{0,c}} = \sum_P w(P) \quad (r, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (17)$$

を満たす. ただし右辺の和において P は $(r, 0)$ から $(0, c)$ への格子路全てを動く.

定理 2 より, モーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ に対する Gessel–Viennot 流 [5, 1] の解釈が可能になる. 自然数の 3 つ組 (r, c, n) に対して, 格子路の n 本組 $(P_0, \dots, P_{n-1})$ で次の 2 条件を満たすものの全体を $\mathcal{LP}(r, c, n)$ と書く.

(i) P_k は $(r+k, 0)$ から $(0, c+k)$ への格子路である.

(ii) $P_0, \dots, P_{n-1}$ は**非交叉的 (non-intersecting)** である. すなわちどの相異なる 2 本も同じ点を通らない.

図 3 にそのような $(P_0, \dots, P_{n-1})$ の例を示す.

系 3. 定理 2 と同じラベルの下で

$$\frac{\Delta_n^{(r,c)}}{\prod_{k=0}^{n-1} f_{0,c+k}} = \sum_{(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r, c, n)} \prod_{k=0}^{n-1} w(P_k) \quad (r, c, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (18)$$

3 little q -Laguerre 多項式

前節の一般論を古典直交多項式の1つである little q -Laguerre 多項式

$$L_n(x; a; q) = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq; q)_n \times {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ aq \end{matrix}; q, qx \right) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (19)$$

に適用する. ただし q 解析の記法は標準的なものである.

- q -Pochhammer 記号

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k). \quad (20)$$

- q -超幾何級数

$${}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, x \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a; q)_i (b; q)_i}{(c; q)_i (q; q)_i} x^i. \quad (21)$$

ただし $a = q^{-n}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) のときは x に関して高々 n 次の多項式になる.

q 解析や little q -Laguerre 多項式については例えば [6] や [8] が詳しい.

little q -Laguerre 多項式の性質を以下にまとめる.

- 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, a)$.
- 線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \mathbb{K}$ のモーメント

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] = (aq^{j+1}; q)_i. \quad (22)$$

- 双直交多項式

$$P_n^{(r,c)}(x) = L_n(x; aq^{r+c}; q). \quad (23)$$

- 直交関係式 (9) の規格化定数

$$h_n^{(r,c)} = f_{r,c+n} \times a^n q^{n(r+c+n)} (q; q)_n. \quad (24)$$

- 隣接関係式 (14) の係数

$$a_n^{(r,c)} = q^n (1 - aq^{r+c+n+1}), \quad (25a)$$

$$b_n^{(r,c)} = aq^{r+c+n} (1 - q^n). \quad (25b)$$

定理2のように正方格子の縦辺のラベル $\alpha_{i,j}$ を定める. 今の場合 (25) より

$$\alpha_{i,j} = q^j(1 - aq^i) \quad (i > j), \quad (26a)$$

$$= aq^j(1 - q^i) \quad (i \leq j) \quad (26b)$$

である. このラベルの下で格子路の重み $w(P)$ を考える. P を $(r, 0)$ から $(0, c)$ への格子路とする. P と正方格子の境界の囲む領域は (2次元) Young 図形とすることができる. これを $\lambda(P)$ と書く. Young 図形 λ の箱の総数を $|\lambda|$ と書く. また主対角にある箱の数 (すなわち Durfee square の大きさ) を $D(\lambda)$ と書く. このとき (26) より P の重みは

$$\frac{w(P)}{(aq; q)_r} = q^{|\lambda(P)|} a^{D(\lambda(P))} \omega(P; a; q), \quad (27a)$$

$$\omega(P; a; q) = \frac{(q; q)_{D(\lambda(P))}}{(aq; q)_{D(\lambda(P))}} \quad (27b)$$

を満たす. 従って系3は

$$\frac{\Delta_n^{(r,c)}}{\prod_{k=0}^{n-1} (aq; q)_{r+k}} = \sum_{(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r, c, n)} q^{\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda(P_k)|} a^{\sum_{k=0}^{n-1} D(\lambda(P_k))} \prod_{k=0}^{n-1} \omega(P_k; a; q) \quad (28)$$

を導く.

実は非交叉格子路に関する和公式 (28) は平面分割の言葉に翻訳することができる. (28) から平面分割の良い和公式を得るために次の2つを実行する.

(a) $\mathcal{P}(r, c, n)$ と $\mathcal{LP}(r, c, n)$ の間の全単射を用いて (28) を平面分割の言葉に書き換える.

(b) 双直交多項式を用いてモーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ の値を計算する.

(a) 全単射による書き換え 古典的な事実として, 平面分割の集合 $\mathcal{P}(r, c, n)$ と非交叉格子路の組の集合 $\mathcal{LP}(r, c, n)$ の間には簡単な全単射が存在する. 全単射では平面分割 $\pi \in \mathcal{P}(r, c, n)$ の3次元 Young 図形から非交叉格子路の組 $(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r, c, n)$ を次のように構成する.

平面分割 π の3次元 Young 図形を高さ k ($1 \leq k \leq n$) のところで切った断面は (2次元) Young 図形になる. この断面の Young 図形を $\lambda_k(\pi)$ と書く. 例えば (2) の平面分割を $\mathcal{P}(4, 5, 3)$ の元と見るとき, その3次元 Young 図形 (図1) からは図4に示す3つの断面を得る. 各断面 $\lambda_k(\pi)$ のジグザグの縁部分を格子路と見なすとき, n 個の断面は $\mathcal{LP}(r, c, n)$ に属する n 本の非交叉格子路の組を与える. もう少し正確に言うと $\lambda_{n-k}(\pi)$ のジグザグの縁部分を $(r+k, k)$ から $(k, c+k)$ への格子路として描くとき n 本の格子路は非交叉的になる. さらに各 $0 \leq k < n$ について $(r+k, 0)$ と

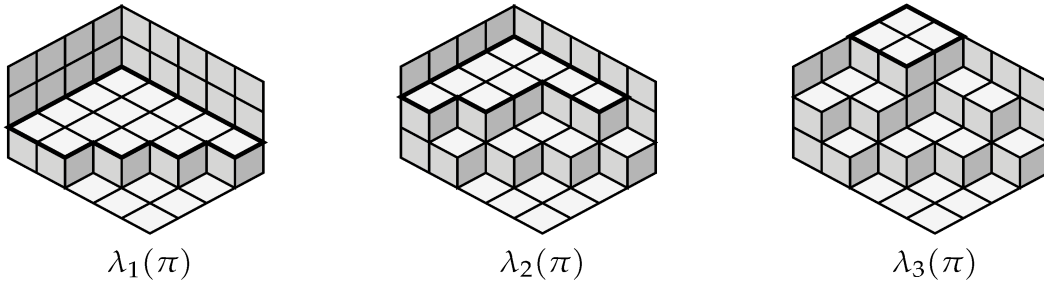


図 4: 3次元 Young 図形の断面のつくる (2次元) Young 図形 $\lambda_k(\pi)$.

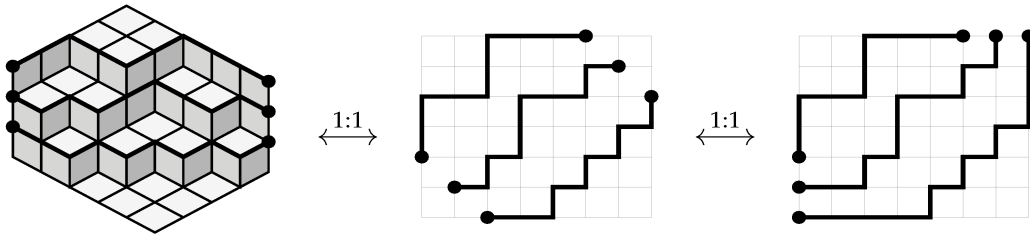


図 5: 平面分割の集合 $\mathcal{P}(r, c, n)$ と非交叉格子路の組の集合 $\mathcal{LP}(r, c, n)$ の間の全単射.

$(r+k, k)$ を結ぶ横線と $(0, c+k)$ と $(k, c+k)$ を結ぶ縦線を描き足すと, $\mathcal{LP}(r, c, n)$ に属する非交叉格子路の組になる. この手続きの例を図 5 に示す. この手続きは明らかに可逆であり, また描き足した横線と縦線は $\mathcal{LP}(r, c, n)$ に属する全ての非交叉格子路の組に含まれるので, $\mathcal{P}(r, c, n)$ から $\mathcal{LP}(r, c, n)$ への全単射になっている.

この全単射を用いて (28) を平面分割の言葉に書き換える. 平面分割 $\pi \in \mathcal{P}(r, c, n)$ と非交叉格子路の組 $(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \mathcal{LP}(r, c, n)$ が全単射により互に対応するとき, 全単射の作り方から

$$|\lambda(P_k)| = |\lambda_{n-k}(\pi)| + k(r+c+k), \quad (29a)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda(P_k)| = |\pi| + \frac{n(n-1)(3r+3c+2n-1)}{6}, \quad (29b)$$

$$D(\lambda(P_k)) = D(\lambda_{n-k}(\pi)) + k, \quad (29c)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(\lambda(P_k)) = \text{tr}(\pi) + \frac{n(n-1)}{2} \quad (29d)$$

が成り立つ. 従って (28) は

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c, n)} q^{|\pi|} a^{\text{tr}(\pi)} \omega_n(\pi) = \frac{\Delta_n^{(r, c)}}{q^{\frac{n(n-1)(3r+3c+2n-1)}{6}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (aq^{k+1}; q)_r (q; q)_k} \quad (30)$$

と等価である。ただし

$$\omega_n(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \frac{(q^{n-k+1}; q)_{D(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1}; q)_{D(\lambda_k(\pi))}} \quad (31)$$

である。

(b) モーメントの行列式の計算 モーメントの行列式 $\Delta_n^{(r,c)}$ の計算は双直交多項式を用いれば簡単である。規格化定数 $h_n^{(r,c)}$ の行列式表示 (18) より一般の双直交多項式に関して

$$\Delta_n^{(r,c)} = \prod_{k=0}^{n-1} h_k^{(r,c)} \quad (32)$$

が成り立つ。これに little q -Laguerre 多項式の規格化定数 (24) をそのまま代入すれば、今必要な $\Delta_n^{(r,c)}$ の値が厳密に求まる。結果として平面分割に関する次の良い和公式を得る。

定理 4. 任意の $(r, c, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c, n)} q^{|\pi|} a^{\text{tr}(\pi)} \omega_n(\pi) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - aq^{i+j+k+2}}{1 - aq^{i+j+k+1}}, \quad (33a)$$

$$\omega_n(\pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \frac{(q^{n-k+1}; q)_{D(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1}; q)_{D(\lambda_k(\pi))}} \quad (33b)$$

が成り立つ。

ここで求めた和公式 (33) は $\mathcal{P}(r, c)$ に対する Stanley のノルム・トレース母関数 (4) の良い精密化である。実際 (33b) より q に関する形式的冪級数として $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(\pi) \equiv 1$ が成り立つ。従って (33a) の左辺の和は $n \rightarrow \infty$ の極限において (4) の右辺の和に一致する。和公式 (33) は $\mathcal{P}(r, c, n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (3b) の良い一般化でもある。これは $\omega_n(\pi)|_{a=1} \equiv 1$ から明らかだろう。

4 一般化 little q -Laguerre 多項式

前節の議論を一般化すると $\mathcal{P}(r, c)$ に対する Gansner のトレース母関数 (5) の良い精密化が得られる。まず記号と記法を準備する。 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots)$ に対して

$$\mathbf{p}_m = (p_{m+1}, p_{m+2}, p_{m+3}, \dots), \quad (34a)$$

$$\mathbf{q}_m = (q_{m+1}, q_{m+2}, q_{m+3}, \dots) \quad (34b)$$

$(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と書く. また任意の $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ に対して添字上昇冪

$$x^{\bar{n}} = \prod_{k=1}^n x_k \quad (35)$$

を用いる. 特に $p_m^{\bar{n}} = \prod_{k=1}^n p_{m+k}$, $q_m^{\bar{n}} = \prod_{k=1}^n q_{m+k}$ である.

一般化 little q -Laguerre 多項式を

$$\mathcal{L}_n(x; a; p, q) = \sum_{i=0}^n x^i \left(\prod_{k=i}^{n-1} p^{\bar{k}} \right) \sum_{i \geq \nu_i \geq \dots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a q^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{p^{\bar{\nu_k}}} \right) \quad (36)$$

$(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ により定義する. 一般化 little q -Laguerre 多項式は文字通り little q -Laguerre 多項式の一般化であり

$$\mathcal{L}_n(x; a; p, q) \Big|_{\substack{p_1=p_2=p_3=\dots=q \\ q_1=q_2=q_3=\dots=q}} = L_n(x; a q^{-1}; q) \quad (37)$$

が成り立つ.

一般化 little q -Laguerre 多項式は以下の性質を持つ.

- 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(p, q, a)$.
- 線形汎関数 $\mathcal{F} : \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \mathbb{K}$ のモーメント

$$f_{i,j} = \mathcal{F}[x^i y^j] = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - a p^{\bar{k}} q^{\bar{j}}). \quad (38)$$

- 双直交多項式

$$P_n^{(r,c)}(x) = \mathcal{L}_n(x; a p^{\bar{r}} q^{\bar{c}}; p_r, q_c). \quad (39)$$

- 直交関係式 (9) の規格化定数

$$h_n^{(r,c)} = f_{r,c+n} \times a^n \prod_{k=0}^{n-1} p^{\overline{r+k}} (q^{\overline{c+k}} - q^{\overline{c+n}}). \quad (40)$$

- 隣接関係式 (14) の係数

$$a_n^{(r,c)} = p_r^{\bar{n}} (1 - a p^{\bar{r}} q^{\overline{c+n}}), \quad (41a)$$

$$b_n^{(r,c)} = a p^{\overline{r+n-1}} q^{\bar{c}} (1 - q_c^{\bar{n}}). \quad (41b)$$

前節と同様の手法により平面分割に関する次の良い和公式を得る.

定理 5. 任意の $(r, c, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r, c, n)} a^{\text{tr}_0(\pi)} \left(\prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\text{tr}_{-i}(\pi)} \right) \left(\prod_{j=1}^{c-1} q_j^{\text{tr}_j(\pi)} \right) \omega_{r, n}(\pi) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - ap^i q^{j+k+1}}{1 - ap^i q^{j+k}} \quad (42a)$$

が成り立つ. ただし

$$\begin{aligned} \omega_{r, n}(\pi) = & \prod_{k=1}^{\pi_{1,1}} \left\{ \prod_{i=1}^{D_k} (1 - q^{\overline{n-k+i}}_{\lambda_{k,i}(\pi)-i}) \right\} \left\{ \prod_{i=D_k+1}^r (1 - ap^{i-\lambda_{k,i}(\pi)-1} q^{\overline{n-k+\lambda_{k,i}(\pi)}}) \right\} \\ & \times \left\{ \prod_{i=1}^r (1 - ap^{i-1} q^{\overline{n-k}}) \right\}^{-1} \quad (42b) \end{aligned}$$

である. ここで $D_k = D(\lambda_k(\pi))$ であり, また $\lambda_{k,i}(\pi)$ は Young 図形 $\lambda_k(\pi)$ の第 i 行にある箱の個数を表す.

和公式 (42) は $\mathcal{P}(r, c)$ に対する Gansner のトレース母関数 (5) の良い精密化である. 実際 (42b) より $q_1, q_2, q_3, \dots$ に関する形式的冪級数として $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n, r}(\pi) \equiv 1$ が成り立つ. 従って $a = q_0, p_\ell = q_{-\ell} (\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ と読み替えれば (42a) の左辺の和は $n \rightarrow \infty$ の極限において (5) の右辺の和に一致する. 和公式 (42) は前節で求めた良い和公式 (33) の一般化でもある. (42) から (33) を得るには $a \leftarrow aq, p_\ell = q_\ell = q (\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ というように変数を特殊化すればよい.

参考文献

- [1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, fifth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.
- [2] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications, vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.
- [3] E. R. Gansner, *The enumeration of plane partitions via the Burge correspondence*, Illinois J. Math. **25** (1981), 533–554.
- [4] E. R. Gansner, *The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 71–89.
- [5] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.

- [6] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [7] S. Kamioka, *Plane partitions with bounded size of parts and biorthogonal polynomials*, arXiv:1508.01674 (math.CO).
- [8] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [9] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Sémin. Lothar. Combin. **42** (1999), Art. B42q.
- [10] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.
- [11] 前田一貴, 三木啓司, 辻本諭, 直交多項式理論からみえてくる可積分系, 日本応用数学会論文誌 **23** (2013), 341–380.
- [12] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.
- [13] R. P. Stanley, *The conjugate trace and trace of a plane partition*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 53–65.
- [14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, fourth ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
- [15] G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Université du Québec à Montréal, 1983.
- [16] G. Viennot, *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications*, Orthogonal Polynomials and Applications (Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1171, Springer, Berlin, 1985, pp. 139–157.