

等質空間上の確率場の表現について

島根大 文理 麻生泰弘

確率場 (Random fields) の概念が、乱流の統計的解析にと
 いて有効なことは、A. S. Monin & A. M. Yaglom の大著、
 Statistical Fluid Mechanics, MIT, 1971, 及び同、vol. 2
 , MIT, 1975 に十分説明されている。他方、また P. Lévy
 は、彼の Processus Stochastiques et Mouvement Brownien
 , 2 ed. , 1965 の第 8 章及び Complément 第 3 章において、
 多次元パラメータをもつブラウン運動について述べている。

そこで、我々は、定常過程について、そのスペクトル表現
 と、確率的な性質との関わり合いの深い理論をもっているが、
 こゝから述べる確率場についてはまだ十分であると思わし
 る。以下、一つの試みと関連した興味ある結果について述べ
 る。

§1. 諸定義

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 $S = G/K$ を等質空間とす

る。 $f(\lambda) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を可測関数とし、 $\{f(\lambda); \lambda \in S\}$ を Banach 空間 S 上の確率場と云おう。

$s_1, \dots, s_n \in S$ と $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対し、

$$\Phi(s_1, \dots, s_n; E_1, \dots, E_n) := P\{f(s_1) \in E_1, \dots, f(s_n) \in E_n\}$$

定義 1. 確率場 $f = \{f(\lambda); \lambda \in S\}$ が homogeneous であるとは、任意の $s_1, \dots, s_n \in S$ と $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対し

$$(1) \quad \Phi(g s_1, \dots, g s_n; E_1, \dots, E_n) = \Phi(s_1, \dots, s_n; E_1, \dots, E_n) \\ , \quad \forall g \in G$$

のときをい、(1) が、任意の $\lambda \in K$ について成立するときは、isotropic と云う。

上記の Yaglom - Monin のは、 $S = \mathbb{R}^d$ の場合について、関数 f が translation $u \in S$ - 不変のとき、homogeneous であるとい、 $O(d)$ - 不変のとき、isotropic であると同義である。さらに、 $L^2(\Omega)$ を P に由る L^2 乗可積分関数のなすヒルベルト空間とし、その内積は、

$$(2) \quad (f, g) = \int f(\omega) \overline{g(\omega)} dP(\omega)$$

で定義される。次の定義で、 $(f(\lambda), 1) = 0$ ($\lambda \in S$) とする。

定義 2. $\forall s \in S$ について、 $f(s) \in L^2(\Omega)$ とする。このとき、

$$(3) \quad r(s, t) := (f(s), f(t)), \quad s, t \in S.$$

確率場 $\phi(\lambda)$, $s \in S$ が w -homogeneous (homogeneous in the wide sense) であるとは, 任意の $g \in G$ と, 任意の $s, t \in S$ について

$$(4) \quad \Gamma(g\lambda, gt) = \Gamma(\lambda, t)$$

が成立するとをいふ, (4) が任意の $g \in K$ について成立するとを, w -isotropic (isotropic in the wide sense) という。

以下, 我々は, G を局所コンパクト群, K をその閉部分群とし, 確率場 ϕ は, $\forall s \in S = G/K$ について $\phi(\lambda) \in L^2(\Omega)$ で, $(\phi(\lambda), 1) = 0$ ($\forall s \in S$) をみたし, さらに, $\lambda \rightarrow t$ 在 S のとき, $\phi(\lambda) \rightarrow \phi(t)$ 在 $L^2(\Omega)$ とする. このとき, (3) で定義される核関数 Γ は, エルミート対称正値逆符号核である。

(注: 上の, 任意の $s \in S$ について, $(\phi(\lambda), 1) = 0$ なる条件は, 本質的ではない。) 従って, この核の固有関数展開を行うことにより, 我々は, 確率場 ϕ に関するある程度の解析を行うことが出来るが, ここでは省く。

§2. w -homogeneous な確率場の表現と w -isotropic な確率場の表現

確率場 $\phi = (\phi(s), s \in S)$ により, Γ 生成されるヒルベルト

ト空間を成とする。すなわち、一次総和 $\sum_{i=1}^n c_i f(\lambda_i)$,
 $c_1, \dots, c_n$ は複素数, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は S の点, たちの作る線形
 集合を, 内積 $(f(\lambda), g(\lambda))$ ($\lambda, \mu \in S$) により完備化した複
 素空間を成とし, 可算であると仮定する。 ~~元~~ $f(\lambda)$ に
 対する G の作用を

$$(4) \quad T(g)f(\lambda) = f(g^{-1}\lambda)$$

で与える。このとき, $T(g)$ は G の表現であるこ
 とは見易い。さらに, $\lambda_0 = eK \in S$ とすると,
 $T(g)f(\lambda_0) = f(\lambda_0)$, $\forall g \in G$.

(1) として, 確率場 f を w -homogeneous とすると, 任意の
 $g \in G$ と $\lambda, \mu \in S$ について,

$$(T(g)f(\lambda), T(g)f(\mu)) = (f(\lambda), f(\mu)).$$

故に, このとき, 表現 $T(g)$ は, ユニタリー表現で
 あり, L^2 の表現である (K に関する)。逆に,
 表現 $T(g)$ は, 可逆性をもつとき, 確率場 f は,
 w -homogeneous である。Gel'fand & Raikow によれば,

$$(6) \quad T(g) = \int_X T_x(g) d\mu(x)$$

と, 既約成分の連続和に分解される。このとき,

$$\begin{aligned} T(t, \lambda) &= (f(t), f(\lambda)) = (T(g_t)f(\lambda_0), T(g_t)f(\lambda_0)) \\ &= (T(g_t^{-1}g_1)f(\lambda_0), f(\lambda_0)) = \end{aligned}$$

$$= \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1) f_x(\Delta_0), f_x(\Delta_0)) d\mu(x),$$

$$(x = g_1^{-1}\Delta_0, \Delta = g_2^{-1}\Delta_0),$$

すなわち、形式的に、 $\Delta = g\Delta_0$ とすると、

$$(6') \quad f(\Delta) = \int_X T_x(g^{-1}) f_x(\Delta_0) \cdot d\mu(x)$$

$$(7) \quad P(t, \Delta) = \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1) f_x(\Delta_0), f_x(\Delta_0)) d\mu(x).$$

このとき、関数 $P(t, \Delta)$ は、 $g_2^{-1}g_1$ のみに depend するので、改めて $\Delta = g\Delta_0$ とすると、 $P(\Delta, \Delta) = P(g)$ とおいて $P(g)$ は、 G/K 上の K -左不変な関数であり、正値定符号。

Y. Asoo は、上記 X と Y elementary positive definite g_n の集合をとり、A. M. Yaglom は、 G not separable な局所コンパクト、Type I g_n の場合について、 X と Y G の dual をとり、(6'), (7) の coordinate 表示を与えている。(Y. Asoo (1975), A. M. Yaglom (1963))。

我々の問題は、① 如何なる形の連続解を得るか。

- ② 上記の表現 (6'), (7) において $f(\Delta)$,
ある Δ は、 $P(t, \Delta)$ より測度 μ を定める
こと (形式的 inversion formula),

等々を知らねば、群 G の表現 $\pi(g)$, 数々の数々の所類や標準的な性質をしるべき必要外。

(1) 確率場 f が w -isotropic のときは、 $\pi(g) \sim \pi(g)$, 数々

は、 G のユニタリ-表現ではないが、 K に属しては、ユニタリ-であり、さらにワラスである。次に、表現 $\chi_T(g), g \in G$ が、この性質を失ったとき、確率場 χ は、 w -isotropic である。従って、 w -isotropic な確率場については、 G を局所コンパクト群、 K をその閉部分群として、 K に属してワラスである G の表現を扱うこととなる。このような、 w -isotropic な確率場の興味深い例を、R. Gangolli (1967) に従って、次に述べる。

3.3. R. Gangolli による、P. Lévy の多次元ワラス-グライフ運動の存在定理

P. Lévy は、(a) ~~任意の~~ 任意の $a \in \mathbb{R}^d$ に対して、
 $(\chi(a), 1) = 0$, かつ、任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$(8) \quad (\chi(a), \chi(b)) = \frac{1}{2} (|a| + |b| - |a-b|) \quad \text{をみたす}$$

$\chi(a), a \in \mathbb{R}^d$ は過程 $\chi(a), a \in \mathbb{R}^d$ (これは le mouvement brownien ~~à~~ plusieurs paramètres と呼ぶ)、および
 (b) 任意の $a \in S^d$ に対して、 $(\chi(a), 1) = 0$, かつ任意の $a, b \in S^d$ に対して

$$(9) \quad (\chi(a), \chi(b)) = \frac{1}{2} (d(a, 0) + d(b, 0) - d(a, b)) \quad \text{をみたす}$$

$\chi(a), a \in S^d$ (これは la fonction brownien sur la sphere S^d と呼ぶ) を考察している

。同様に (9) は, $\mathbb{R}^d$ 上の $M(d)/SO(d)$ 上の $S^d = SO(d+1)/SO(d)$ 上の正値定符号核であり, $SO(d)$ -不変である。すなわち, 我々の定義 2. に従う w -isotropic な実確率場の例である。グラウソンの運動は, 確率論的に重要な概念であるとともに, 解析学的にも興味深い性質を数々もっているが, このラビフは, 例えば, 飛田 "グラウソンの運動" をお読み下さい。ここで, その存在に関する R. Gangolli の結果についてのみ述べる。 G を可算公理を満たす局所コンパクト群, K をその閉部分群とする。また $S = G/K$ は, 等価空間である。そこで, 確率場 $\{g_i(\lambda), \lambda \in S\}$ は実数値をとるものとするとき, この S 上の ガウス場 であるとする, 任意の実数 $\theta_1, \dots, \theta_m$ と $s_1, \dots, s_n \in S$ に対し

$$(10) \quad \left(\exp \left\{ \sqrt{-1} \sum_{i=1}^n \theta_i g_i(\lambda_i) \right\}, 1 \right) = \exp \left\{ \sqrt{-1} \sum_{i=1}^n \theta_i m(\lambda_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\lambda} \theta_i \theta_j P(\lambda_i, \lambda_j) \right\}$$

を満たす S 上の 実 関数 $m(\lambda)$ と, 正値定符号核 $P(t, \lambda)$

$(t, \lambda \in S)$ が存在するところを言う。特に, このとき, 必要ならば, $g(\lambda) = m(\lambda) (\forall \lambda \in S)$ を与えることになり,

$m(\lambda) \equiv 0 (\forall \lambda \in S)$ とし得る。以下, $m(\lambda) = (g(\lambda), 1) \equiv 0$

とする。すると, $(g(\lambda), g(\mu)) = P(s, t)$ となる。

定義 3: S 上の核 $P(\lambda, t)$ が, Lévy-Schöenberg 核

(以下, 既い L-S 核という) があるとは, 次の諸条件をみたすときをいう;

$$(i) \quad P(s, t) = P(t, s) \quad (s, t \in S)$$

$$(ii) \quad P(s, s_0) = 0 \quad (s_0 = e(K)), \quad \forall s \in S$$

$$(iii) \quad \forall g \in G \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned} P(g s, g s) + P(g t, g t) - 2 P(g s, g t) \\ = P(s, s) + P(t, t) - 2 P(s, t), \quad s, t \in S \end{aligned}$$

$$(iv) \quad P(s, t) : \text{positive definite.}$$

定義4: $P(s, t)$ を, S 上の L-S 核とすると, S 上のガウス場 $\{f(s), s \in S\}$ が, S 上のグラフ ~~構造~~ があるとは, 任意の $s, t \in S$ に対し,

$$(11) \quad f(s), f(t) = P(s, t)$$

がみたさるときをいう。

いま, $K(s, t) = P(s, s) + P(t, t) - 2 P(s, t)$ とおくと,
 P が L-S 核のとき, $K(s, s_0) = P(s, s)$, $K(t, s_0) = P(t, t)$
~~であることは容易に示される。~~

$$2 P(s, t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s, t) .$$

このとき, 任意の $g \in G$ に対し,

$$2 P(g s, g t) = 2 P(s, t) = 2 P(s, t) = 2 P(g s, g t)$$

従、 $\sim$, S 上のイタリニ運動は, w -isotopically (実) 確率場である。(注: 実ほ, isotopically 確率場である)

問題: 等値空間 $S = G/K$ 上の L - S 核を決定せよ。

Gangolli は, (i) G : 連結局所コンパクト・アーベル群, K : G の任意の閉群, (ii) $G = M(d)$, $K = SO(d)$

(iii) G : 連結コンパクト・半単純リー群, K : $S = G/K$ がコンパクトな対称空間となる G の任意の閉群, (iv) G : 中心が finite である noncompact, 連結半単純リー群, K : G の極大コンパクト閉群の端座にたいし, この問題を解いた。

Lemma: 等値空間 $S = G/K$ 上の, $\Gamma(\frac{s}{\varepsilon}, s_0) = 0$ ($s_0 = eK$)

なる対称核が L - S 核であるための必要十分条件は,

(a) 任意の $g \in G$ に対し, $K(g s, g t) = K(s, t)$,

(b) 任意の $\varepsilon \geq 0$ に対し,

$$\theta_\varepsilon(s, t) := \exp \{ -\varepsilon K(s, t) \} \text{ positive def.}$$

を計量とすることができる。

このとき, 任意の $g_1, g_2 \in K$ に対し,

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(g_1 g_2 s_0, s_0) &= \exp \{ -\varepsilon K(g_1 g_2 s_0, s_0) \} \\ &= \exp \{ -\varepsilon K(g s_0, s_0) \} = \theta_\varepsilon(g s_0, s_0) \end{aligned}$$

$$\theta_\varepsilon(e s_0, s_0) = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_\varepsilon(g s_0, s_0) = 1 \quad (g \in G)$$

すなわち, $\theta_z(g s_0, s_0)$ は, normalized zonal spherical fn. である。また, 群 G 上の関数族 $h_z(g)$ ($z \neq 0$) が embeddable であるとは, $\forall z$ に対し h_z が pos. def. であり, $\lim_{z \rightarrow 0} h_z = 1$ をみたすことをいう。さらに, G 上の関数 h が無限分解可能であるとは, h が pos. def. であり, $\forall m \in \mathbb{N}$ に対し $h(g) = h_m(g)^m$ なる pos. def. な関数 h_m が存在することをいう。

以下, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G)$ を, G 上の複素数値, 連続, normalized zonal spherical, 無限分解可能な関数の class とする。

(1) G : 連結局所コンパクト・アーベル群

K : G の任意の閉部分群 の端石

定理: G 上の関数 θ に対し $\theta^*(gk) = \theta(g)$ により, S 上の関数 $\theta^*(s)$ ($s = gk$) を定義すると, $\theta \in \mathcal{R}$ が実数値をとるための条件は, θ^* が

$$(12) \quad \theta^*(s) = \exp \left\{ -\left[\varphi(s) + \int_{\hat{S} \setminus \{e\}} (1 - \chi(s)) d\mu(\chi) \right] \right\}$$

と表現されることである。ここに, φ は,

$$(13) \quad \frac{1}{2}(\varphi(s+t) - \varphi(s-t)) = \varphi(s) + \varphi(t)$$

の連続な, nonnegative sol. であり, μ は, dual $\hat{S}$ 上の対称な pos. meas. であり, $e \in \hat{S}$ の任意の近傍 U 上 $\mu(U) < \infty$ の補集合に finite mass をもち,

(14) $\int_{S \setminus \{s\}} (1 - \operatorname{Re} \chi(s)) d\mu < +\infty, \quad \forall s \in S$
 を示す。さうは、 q, μ は、 θ^* に δ unique に
 決定される。

このとき、

$$K(s, s_0) := q(s) + \int_{S \setminus \{s\}} (1 - \chi(s)) d\mu(\chi), \quad \forall s \in S.$$

と χ は、

$$2P(s, t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s, t, s_0)$$

は L -s 核である。

(10) $G = U(d), K = SO(d)$ の場合 $(d \geq 2)$

S/G の関数 θ は $1/2 / \theta^*(g) := \theta(gK) /$, $g \in G$

G 上の関数 θ が、 $\mathbb{R}^d$ に属すると、対応する $s = G/K$ 上の関数 θ^* は、 $\mathbb{R}^d$ 上の radial f_u であるが、

定理: G 上の関数 θ が、 $\mathbb{R}^d$ に属するための条件は、

$$(15) \quad \theta^*(s) = \exp \left\{ -[c|s|^2 + \sum_{0+} (1 - \gamma_\lambda(\lambda|s|)) d\mu(\lambda)] \right\} \\ (c \geq 0)$$

と表現されることを示す。さうは、

$$Y_d(t) = \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2})} \int_0^\pi e^{\sqrt{-1}t \cos \theta} \sin^{d-2} \theta d\theta \quad (t \geq 0)$$

であり、 μ は、 $[0, \infty)$ 上の (pos. measure ν),

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} d\mu(\lambda) < +\infty$$

を計たす。是より、 $c \geq 0$ とし、 θ^* により unique に決定される。

このとき、

$$K(s, s_0) = c|s|^2 + \int_0^\infty (1 - Y_\alpha(\lambda|s|)) d\mu(\lambda)$$

とおくと、

$$2P(s, t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s-t, s_0)$$

は、 L^2 核である。

特に興味あるのは、 $c=0$ の場合に、 $d\mu_\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}}$ ($0 < \alpha < 2$) とすると、 $K_\alpha(s, s_0) = |s|^\alpha$ となる。

(i) $S = G/K$: コンパクトな対称空間の場合

定理: G 上の関数 θ が、次に示すための必要十分条件は、

$$(16) \quad \theta(g) = \exp \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \varphi_n(g))^2 \right\}$$

と表現されることである。ここに、 $\{\varphi_n(g)\}_{n=0}^{\infty}$ は、

normalized, pos. def. zonal spherical fun., となる

かつ、 $\varphi_n(g) = \int_K \chi_n(g^{-1}h) dh$, $a_n \geq 0$ は、

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ を計たし、 θ により unique に決定される

involution σ を $\sigma(\varphi_n) = \overline{\varphi_n}$ と定義すると

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を、 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ かつ $\sigma(a_n) = a_n$

($\forall n \geq 0$) を計たすようにとり、 $K(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \varphi_n(s-t))$

$g_2^{-1}g_1) (s=g_1K, t=g_2K) \text{ とすると,}$

$$2P(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t)$$

は, $L-S$ 核 $2''$ である。

(=) $S = G/K$: noncompact な対称空間の端石

$\mathcal{M}$ を, elementary pos. def. zonal spherical fn. の集石とする。

定理: G 上の関数 θ が, 記号に属するための条件は,

$$(17) \quad \theta^*(s) = \exp \left\{ -\left[\sigma(s) + \sum_{\mathcal{M} \setminus \{1\}} (1 - \phi(x)) d\mu(\phi) \right] \right\}$$

と表現されることである。ここに,

(a) μ は, $\mathcal{M} \setminus \{1\}$ 上の pos. meas. ν'' ,

$$\mu(A) = \mu(\cup(A)) \text{ をおとし,}$$

(b) $x \in G$ の任意のコンパクトな近傍に対し,

$$I_U(\phi) = \int_U (1 - \operatorname{Re} \phi(x)) dx$$

とすると, $\sum_{\mathcal{M} \setminus \{1\}} I_U(\phi) d\mu(\phi) < +\infty$,

(c) $\{ \cup_n \}_{n=1}^{\infty}$ を, $\cup_n \{1\}$ なる, $1 \in \mathcal{M}$ のコンパクトな近傍列とすると, $\operatorname{Support}(\mu_n) = \cup_n$ なる finite meas. の seq. $\{\mu_n\}$ が存在して,

$$\sigma(s) = \lim_n \int_{\cup_n} (1 - \operatorname{Re} \phi(x)) d\mu_n.$$

σ, μ は, θ^* により unique に決定される。関数 σ を, θ^* により決定される G 上の関数, μ を θ^* により決定される Lévy 測度という。

関数 χ の形を, は, 与えられるには, $1 \in \mathfrak{M}$ の近くの $\mathfrak{M}$ の細かい構造をしることは必要であり, 補系列の表現が関連するとは指摘されてゐる。

例: $G = SL(2; \mathbb{R})$, $K = SO(2)$ のとき

$$\chi(x) = c \log \left(\frac{1}{2} \cosh p(x, o) \right) \quad (c \neq 0).$$

いま, $\psi(x) = \chi(x) + \int_{\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{K}} (1 - \phi(x)) d\mu(\phi)$
と定め, $K(g_1 K, g_2 K) = \psi(g_2^{-1} g_1)$ とすると,

$$2P(s, t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s, t)$$

は, L- $\mathfrak{S}$ 核である。

例: $G = SL(2; \mathbb{R})$, $K = SO(2)$ のとき

$$2P(s, t) = \left(\log \cosh p(s, s_0) / 2 \right)^{1/2} + \left(\log \cosh p(t, s_0) / 2 \right)^{1/2} \\ - \left(\log \cosh p(s, t) / 2 \right)^{1/2}$$

は, L- $\mathfrak{S}$ 核である。

文 献

- (1) Y. Asoo (1975): On Random Fields on Homogeneous Space, Mem. Fac. Lit & Sci., Shimane Univ., Nat. Sci. 8, pp. 25-29.
- (2) R. Gangoli (1967): Abstract Harmonic Analysis

and Lévy's Brownian Motion of
Several Parameters, 5th Berkeley
Symp. Prob. Stat., Vol. 2- Part 1,
pp. 13-30.

- (3) A.M. Yaglom (1963): Second-Order Homogeneous
Random Fields, 4th Berkeley
Symp. Prob. Stat., Vol. 2, pp. 593-
622.