

Navier-Stokes 方程式の境界値問題の解の解析性について

東北大 理 小松 玄

§0. 序

x -空間の領域 Ω 内に満たされた非圧縮性粘性流体の運動を記述する, 非定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題を考えよう. 本稿では, Ω を解析的な境界を持つ有界領域とし, 滑らかな解の境界まで込めての解析性を論ずる. その詳細は [6] にある. 本稿に対応する講義においては, 証明には殆んどふれなかった. ここでは証明の概略を述べようと思う. 証明の方針は, 非線型放物型方程式の場合の類似な結果 ([5] を見られたい) に対するものと同じである. 放物型方程式に対する Dirichlet 問題の場合には議論が簡単になるので, まずその場合の証明をたどり, しかる後にその議論をどの様に変更すればよいかを述べる.

§ 1. Navier-Stokes 方程式の解の解析性

Ω を x -空間 $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする. 境界 $\partial\Omega$ はいくつかの連結成分を持ち、ていてよいが、その各々は解析的な超曲面を成すとする. I を t -空間 $\mathbb{R}$ の有界開区間とし、 (x, t) -空間 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 内の柱状領域 $Q = \Omega \times I$ において、非定常 Navier-Stokes 方程式

$$(1.1) \quad \partial_t v - R^{-1} \Delta v + \text{grad } p = f - (v \cdot \text{grad})v, \quad \text{div } v = 0$$

の解 $(v, p) \in C^\infty(\bar{Q})$ で、次の Dirichlet 境界条件を満たすものを考える:

$$(1.2) \quad v = 0 \quad \text{on } \Gamma = \partial\Omega \times I.$$

ここで v は速度 vector, p は圧力 potential, f は外力 vector を表わす. R は Reynolds 数と呼ばれる正の定数である. scale を変えることにより, $R = 1$, $I = \{0 < t < 1\}$ と仮定してよい. $F = f - (v \cdot \text{grad})v$ とおけば, (1.1) は

$$(1.1') \quad (\partial_t - \Delta)v + \text{grad } p = F(\nabla_x v, v, x, t), \quad \text{div } v = 0 \quad \text{in } Q$$

と書ける. 我々は (1.1) より一般に (1.1') の形で考える. 次のことを仮定する:

$$(1.3) \quad F(\alpha, \beta, x, t) \text{ は } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n, (x, t) \in \bar{Q} \text{ に対し} \\ \text{て, } (\alpha, \beta, x, t) \text{ の } \mathbb{R}^n \text{-値解析関数である.}$$

σ , $0 \leq \sigma < 1$, に対して次の様におく:

$$(1.4) \quad Q_\sigma = \Omega \times I_\sigma, \quad I_\sigma = \{t; \sigma < t < 1\}.$$

このとき次を得る:

定理 1 ([6]). 条件 (1.3) の下で, 問題 (1.1'-2) の解 $(v, \text{grad } p) \in C^\infty(\bar{Q})$ は, $\bar{Q}_\sigma$ 上で解析的である. ここで σ は, $0 < \sigma < 1$ と満たす任意の数とする.

注意 i) ([6]). 境界条件 (1.2) は次の様に一般化される:

$$v = \varphi \quad \text{on } \Gamma.$$

但しここで, φ は Γ 上で解析的であり, $\partial\Omega$ の Ω に関する単位外法線 ν に対して次の条件を満たすものとする:

$$\int_{\partial\Omega} \nu \cdot \varphi(\cdot, t) dS = 0 \quad \text{for } t \in I.$$

この様な一般化は, 後述の補題 3.2 (の弱い形) を使, て, [2; pp. 112-113] の論法を修正することにより成される.

ii). 領域内部での解の解析性については, [7], [3] がある. これらは共に速度 v と vorticity $\text{rot } v$ の二階連立方程式系を取り扱うのであるが, $\text{rot } v$ に対する境界条件が与えられていないので, 境界まで込めての解析性を含んではいない.

iii). $\text{grad } p$ が与えられれば, p は t にのみ依存する函数を除いて一意的に定まる. 我々の議論においては, p は常に x に関して微分された形でのみ現れる.

§ 2. 非線型放物型方程式の解の解析性

Ω, I, Q, Γ は § 1 の通りとし, 次の境界値問題を考える:

$$(2.1) \quad \partial_t v = F(\nabla_x^2 v, \nabla_x v, v, x, t) \text{ in } Q,$$

$$(2.2) \quad v = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

方程式 (2.1) が解析的放物型であることを仮定する, 即ち,

$$(2.3) \quad (x, t) \in \bar{Q} \text{ に対して, } \partial F / \partial (\nabla_x^2 v) \text{ は正定値行列である;} \\$$

F は $(x, t) \in \bar{Q}$ に対して, $\nabla_x^s v(x, t)$, $s = 2, 1, 0$,

$$(2.4) \quad \text{及び } x, t \text{ の値域において, それらの変数に関する解析関数である.}$$

このとき, 次の成り立つ:

定理 2 ([5]). 条件 (2.3-4) の下で, 問題 (2.1-2) の解 $v \in C^\infty(\bar{Q})$ は, $\bar{Q}_\sigma$ 上で解析的である. ここで $\bar{Q}_\sigma$ は (1.4) で与えられ, σ は $0 < \sigma < 1$ を満たす任意の数である.

注意 ([5]). 境界条件 (2.2) は, Neumann 条件及び, Kinderlehrer - Nirenberg [4] の条件を含む様に一般化される. また問題 (2.1-2) は, 高階放物型方程式系で, その線型化が Solonnikov [11] の条件を満たすものに拡張される.

§3. 大域的に定義された vector fields

定理1及び2のいずれの場合にも, 解の解析性はその逐次導函数に対する Cauchy 評価を導くことにより, 示される (その様な方法の典型的な例としては, [8]を見られたい). まず側境界面 Γ に沿う方向の導函数の評価を, 線型化された混合問題に対する先験不等式を用いて導く. 我々の結果は x -変数に関して局所化できない (注意 4.2 及び 5.4 を見られたい) ので, $\bar{\Omega}$ 全体で定義された解析的な vector fields で, $\partial\Omega$ に接している様なものに沿う導函数を考える.

r は Ω の境界からの距離函数であって, Ω の内側で負, 外側で正となる様に符号付けられているものとする. $\bar{\Omega}$ 上で定義された vector fields が $\partial\Omega$ に接しているとは, $\partial\Omega$ 上で, $Xr = 0$ を満たすときをいう. $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; r(x) < -\varepsilon\}, \quad \Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$$

とおく. このとき,

補題 3.1. 任意の十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{\Omega}$ 上で定義されかつ解析的な有限個の vector fields $X_0, T_1, \dots, T_{N'}, T_{N'+1}, \dots, T_N$ が存在して, 次の性質を持つ:

- i). $T_1, \dots, T_N$ は $\partial\Omega$ に接している;
- ii). $\bar{\Omega}$ 上で解析函数 ξ_k, η_{jk} が存在して,

- $\partial/\partial x_k = \xi_k X_0 + \sum_{j=1}^N \zeta_{jk} T_j \quad \text{on } \bar{\Omega}, \quad 1 \leq k \leq n;$
 iii). $\bar{\Omega}_\varepsilon$ 上で解析函数 ζ_{jk} が存在して,
 $\partial/\partial x_k = \sum_{j=1}^{N'} \zeta_{jk} T_j \quad \text{on } \bar{\Omega}_\varepsilon, \quad 1 \leq k \leq n.$
 iv). $\sum_{k=1}^n (\xi_k)^2 \neq 0 \quad \text{on } \bar{\Omega}^\varepsilon.$

我々はこの補題 3.1 を証明しないが、その証明が次の事実に基くことだけを注意しておく。

補題 3.2. 任意の $x \in \Omega$ に対して、 $\bar{\Omega}$ 上の解析函数 $\varphi_{(x)}$ が存在して、次の性質を持つ：

- i). $\varphi_{(x)} = 0, \quad d\varphi_{(x)} \neq 0 \quad \text{on } \partial\Omega;$
 ii). $\varphi_{(x)} \neq 0, \quad d\varphi_{(x)} \neq 0 \quad \text{at } x.$

さて補題 3.1 における $T_i, 1 \leq i \leq N,$ に対して、 $T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}$ の形の微分作用素を T^k と略記する。この様な略記が許されるのは、非可換な vector fields の間の交換子に関する Leibniz 型の公式が、我々の使う評価の範囲に限れば、形式的には一変数の場合と同じ形をしているという事実に基く（例えば [9] pp. 575-576 を見られたい）。

§ 4. 定理 2 の証明の概略

関係式 (2.1-2) の両辺を t で微分すれば,

$$(4.1) \quad (\partial_t - L) \partial_t v = F_t \quad \text{in } Q, \quad \partial_t v = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

を得る. 但しここで, $F_t = \partial F / \partial t$ であり,

$$Lw = \sum_{s=0}^2 \frac{\partial F}{\partial (\nabla_x^s v)} \cdot \nabla_x^s w \quad \text{for } w \in C^\infty(\bar{Q}).$$

式 (4.1) の両辺に $T^k \partial_t^{j-1}$ を作用させて,

$$(4.2) \quad (\partial_t - L) T^k \partial_t^j v = f_{k,j} \quad \text{in } Q, \quad T^k \partial_t^j v = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

を得る. ここで,

$$(4.3) \quad f_{k,j} = [T^k \partial_t^{j-1}, L] \partial_t v + T^k \partial_t^{j-1} F_t \quad \text{for } j \neq 0.$$

但し記号 $[A, B]$ は交換子 $AB - BA$ を表わす. $j = 0$ に対しても (4.3) と類似な式を得る. 我々は $T^k \partial_t^j v$ を評価するため, 次の混合問題に対する先験不等式を用いる:

$$(4.4i) \quad (\partial_t - L) w = f \quad \text{in } Q, \quad (4.4ii) \quad w = 0 \quad \text{on } \Gamma,$$

$$(4.5) \quad w = 0 \quad \text{on } \{t=0\} \cap \bar{Q}.$$

補題 4.1 ([11]). $w \in C^\infty(\bar{Q})$ が (4.4-5) を満たせば, w

と f に依存しない正の定数 C が存在して,

$$\|w\|_2 \leq C (\|f\|_0 + \|w\|_0).$$

ここで $\|w\|_0$ は w の $L^2(Q)$ -norm であって,

$$\|w\|_2 = \|\partial_t w\|_0 + \sum_{s=0}^2 \|\nabla_x^s w\|_0.$$

さて $w = T^k \partial_t^j v$ は初期条件 (4.5) を満たさないから, (t -変数にのみ依存する) cut-off 函数を導入する. $\zeta_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ を非増加函数で,

$$\zeta_0(t) = 1 \quad \text{for } t \leq 0, \quad \zeta_0(t) = 0 \quad \text{for } t \geq 1$$

を満たすものとする. $0 < \sigma < 1$ なる σ と, $m \in \mathbb{Z}_+$ が与えられたとし, 次の様におく:

$$\zeta_{\sigma,m}(x,t) = \zeta_0(m(1-t/\sigma)) \quad \text{for } (x,t) \in \bar{Q},$$

$$\sigma_m = (1 - 1/m)\sigma \quad \text{for } m \geq 1, \quad \sigma_0 = 0.$$

このとき,

$$(4.6) \quad \text{supp } \zeta_{\sigma,m} \subset \bar{Q}_{\sigma_m}, \quad \zeta_{\sigma,m} = 1 \quad \text{in } Q_\sigma, \\ |\partial_t^s \zeta_{\sigma,m}| \leq C_s (m/\sigma)^s.$$

さて w が (4.4) を満たせば, $\zeta = \zeta_{\sigma,m}$ に対して,

$$(4.7) \quad (\partial_t - L)(\zeta w) = \zeta f + (\partial_t \zeta) w \quad \text{in } Q, \quad \zeta w = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

である. 従って (4.6) より, $m \geq 2$ に対して,

$$(4.8) \quad \|\zeta w\|_2 \leq C (\|\zeta f\|_0 + \|\zeta w\|_0 + (m/\sigma) \|\tilde{\zeta} w\|_0)$$

が成り立つ. 但しここで, $\tilde{\zeta} = \zeta_{\sigma_m, m-1}$ であり, C は m, σ, w, f に依存しない正の定数である.

注意 4.2. x -変数にも依存する cut-off 函数 ζ を取れば, 式 (4.7) の右辺は $-[L, \zeta]w$ を含み, 従って (4.8) の右辺に次の項が加わる:

$$(\sigma/m)^2 \|\tilde{\zeta} w\|_0 + (\sigma/m) \|\nabla_x (\tilde{\zeta} w)\|_0.$$

従って, x -変数に関して局所化した時には, t -変数に関する解の解析性は望めず, x -変数に関して解析的, t -変数に関しては Gevrey class of order 2 (しか得られない ([4] も見られたい)).

法線方向の微分を含む導関数 $\partial_x^{\alpha} T^k \partial_t^j v$ に対しても, (4.2) と同様な関係式

$$(4.9) \quad (\partial_t - L) \partial_x^{\alpha} T^k \partial_t^j v = f_{\ell, k, j} \quad \text{in } \Omega$$

を得る. ここで $f_{\ell, k, j}$ は (4.3) における $f_{k, j}$ と類似な量である. これらの導関数の評価は, 次の補題を用いてなされる.

補題 4.3. $\zeta = \zeta_{\sigma, m}$ とする. $w \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ が (4.4i) を満たせば, ζ, w, f に依存しない正の定数 C が存在して,

$$\begin{aligned} \|\zeta \nabla_x^2 w\|_0 &\leq C (\|\zeta f\|_0 + \|\zeta \partial_t w\|_0 \\ &\quad + \|\zeta \nabla_x T w\|_0 + \sum_{s=0}^1 \|\zeta \nabla_x^s w\|_0). \end{aligned}$$

多重添数 $\alpha = (\ell, k, j) \in \mathbb{Z}_+^3$ に対して,

$$a = |\alpha| = \ell + k + j, \quad D_{\sigma}^{\alpha} = \zeta_{\sigma, a} \partial_x^{\alpha} T^k \partial_t^j \quad (0 < \sigma < 1)$$

とし, 与えられた方程式 (2.1-2) の解 v に対して

$$(4.10) \quad N_{\sigma}(\alpha) = (a - \mu)!^{-1} \sum_{s=0}^1 (a/\sigma)^s \|\zeta D_{\sigma}^{\alpha} v\|_{2-2s}$$

とおく. 但し, $\mu = [n/2] + 5$. さて v の解析性は次の条件 (I_m) から従う:

条件 (I_m) : ある (m に依存しない) 正の定数 M_s , $s = 0, 1, 2, 3$, が存在して, $\alpha \leq m-1$ に対して

$$N_\sigma(\alpha) \leq M_0 M_\sigma(\alpha) \quad \text{for } 0 < \sigma < 1$$

が成り立つ. 但しここで,

$$M_\sigma(\alpha) = (M_1/\sigma)^{(\alpha-\mu)^+} M_2^k M_3^l, \quad r_+ = \max(r, 0).$$

注意. 実は今の場合には $M_2 = 1$ と取ることができ, M_2 は §5 においてはじめて本質的に必要となる.

線型方程式の場合と異なり, (4.2), (4.9) の右辺は, 解 v の導関数のいくつかの積を含む. これらを帰納的に評価するために, 次の様な量を考える:

- (4.11) i) v'' は $\nabla_x^s v$, $s = 0, 1, 2$, を表わす;
 ii) $\bar{F}(v'', x, t)$ は $F_{v''}$, F_x , F_t 又は F_t を表わす;
 iii) $\bar{F}_{(i)}(x, t)$ は $\bar{F}$ の, 階数 i の任意な導関数の $(v''(x, t), x, t)$ における値を表わす.

多重添数 $\beta = (i; \alpha) \in \mathbb{Z}_+^4$ に対して, $b = |\beta| = i + \alpha$ とし, (4.11) における $\bar{F}_{(i)}$ に対して次の様におく:

$$\bar{N}_\sigma(\beta) = (b-\mu)!^{-1} \|D_\sigma^\alpha \bar{F}_{(i)}\|_0.$$

条件 (I_m) の証明に補助的に用いられる次の条件を考える:

条件 $(\bar{I}_m)$: ある正の定数 $\bar{M}_0, K$ が存在して, $b \leq m-2$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\bar{N}_\sigma(\beta) \leq \bar{M}_0 K^\sigma M_\sigma(\alpha) \quad \text{for } 0 < \sigma < 1.$$

さて条件 (I_m) は, 次の2つの補題を組み合わせて帰納的に示される:

補題 4.4. 条件 (I_m) と $(\bar{I}_m)$ がある $m \geq 2\mu+2$ に対して成立すると仮定する. このときもし,

$$M_0/\bar{M}_0 + M_0 M_3^\nu / M_1, \quad \text{但し } \nu = [n/2] + 2,$$

が十分に小さければ, $(\bar{I}_{m+1})$ が成立する.

補題 4.5. 条件 (I_m) と $(\bar{I}_{m+1})$ がある $m \geq 2\mu+2$ に対して成立すると仮定する. このときもし,

$$(4.12) \quad \bar{M}_0 M_3^\nu / M_1 + 1/M_3$$

が十分に小さければ, (I_{m+1}) が成立する.

上述の補題 4.4-5 の証明は, Leibniz の公式と Sobolev の

不等式を用いてなされるが、それは長すぎてここには述べることができない。

§ 5. 定理 1 の証明の概略

関係式 (1.1'-2) の両辺を t で微分すれば、

$$(5.1) \quad L(\partial_t v, \partial_t p) = (F_t, 0) \text{ in } Q, \quad \partial_t v = 0 \text{ on } \Gamma$$

を得る。但しここで、 $(w, \varphi) \in C^\infty(\bar{Q})$ に対して、

$$L(w, \varphi) = L_0(w, \varphi) - (L'w, 0),$$

$$L_0(w, \varphi) = ((\partial_t - \Delta)w + \text{grad } \varphi, \text{div } w),$$

$$L'w = \frac{\partial F}{\partial(\nabla_x v)} \cdot \nabla_x w + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot w.$$

式 (5.1) の両辺に $\partial_x^k T^k \partial_t^{j-1}$ を作用させて、

$$L \partial_x^k T^k \partial_t^j (v, p) = (f^{(k,k,j)}, h^{(k,k,j)}) \text{ in } Q,$$

$$T^k \partial_t^j v = 0 \text{ on } \Gamma$$

を得る。但しここで、 $f^{(k,k,j)} = f_L^{(k,k,j)} + f_N^{(k,k,j)}$ であり、

$$(5.2) \quad f_L^{(k,k,j)} = -\partial_x^k [T^k, \text{div}] \partial_t^j v,$$

$$f_L^{(k,k,j)} = \partial_x^k [T^k, \Delta] \partial_t^j v - \partial_x^k [T^k, \text{grad}] \partial_t^j p,$$

$$(5.3) \quad f_N^{(k,k,j)} = [\partial_x^k T^k \partial_t^{j-1}, L'] \partial_t v + \partial_x^k T^k \partial_t^{j-1} F_t, \quad j \neq 0.$$

$j=0$ に対しても、(5.3) と類似な式を得る。さて (5.2) より特に、 $h^{(k,c,j)} = 0$ となることに注意しよう。このとき、

$$(w, \xi) = \partial_t^j(v, p), \quad T^k \partial_t^j(v, p), \quad \partial_x^k T^k \partial_t^j(v, p)$$

はそれぞれ、次の型の方程式を満たす:

$$(5.4) \quad L(w, \xi) = (g, 0) \text{ in } Q, \quad w = 0 \text{ on } \Gamma,$$

$$(5.5) \quad L(w, \xi) = (g, h) \text{ in } Q, \quad w = 0 \text{ on } \Gamma,$$

$$(5.6) \quad L(w, \xi) = (g, h) \text{ in } Q.$$

我々は、これらの方程式の解に対する、次に述べる様な先験不等式を用いる。

補題 5.1. $(w, \xi) \in C^\infty(\bar{Q})$ は (5.4) を満たすとし、 $\xi = \xi_{\sigma, m}$, $0 < \sigma < 1$, $m > 0$, とおく。このとき、

$$\| \xi w \|_2 + \| \nabla_x \xi \xi \|_0 \leq C (\| \xi g \|_0 + \| \xi w \|_0 + \| (\partial_t \xi) w \|_0)$$

が成り立つ。ここで C は、 w, ξ, g, ξ に依存しない正の定数である。

補題 5.2. $(w, \xi) \in C^\infty(\bar{Q})$ は (5.5) を満たすとし、 $\xi = \xi_{\sigma, m}$ とおく。このとき、 w, ξ, g, h, ξ に依存しない正の定数 C が存在して、

$$\begin{aligned} \| \xi w \|_2 + \| \nabla_x \xi \xi \|_0 &\leq C (\| \xi g \|_0 + \| \xi h \|_{1, (x)} \\ &\quad + \sum_{s=0}^1 \| \xi \partial_t^s w \|_0 + \| (\partial_t \xi) w \|_0) \end{aligned}$$

が成り立つ。但しここで、 $\| h \|_{1, (x)} = \sum_{s=0}^1 \| \nabla_x^s h \|_0$ 。

補題 5.3. $(w, g) \in C^\infty(\bar{Q})$ は (5.6) を満たすとし, $\zeta = \zeta_{\sigma, m}$ とおく. このとき, w, g, g, h, ζ に依存しない正の定数 C が存在して,

$$\begin{aligned} \|\zeta w\|_2 + \|\nabla_x \zeta g\|_0 &\leq C \left(\|\zeta g\|_0 + \|\zeta h\|_{1,(\infty)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=0}^1 \|\zeta \partial_t^s w\|_0 + \|\zeta (\partial_t \zeta) w\|_0 + \varepsilon \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. 但しここで, 補題 3.2 における $T_1, \dots, T_N$ に対して,

$$\varepsilon = \sum_{s=1}^N \left(\|\zeta T_s w\|_{1,(\infty)} + \|\zeta T_s g\|_0 \right) + \|\zeta w\|_{1,(\infty)}.$$

補題 5.1 は本質的には Solonnikov による ([10], [12]). 補題 5.2-3 は, Navier-Stokes 方程式に対する定常問題が楕円型系であることから, [1] の評価を用いることにより従う.

注意 5.4. $\zeta = \zeta_{\sigma, m}$ を, x -変数にも依存する cut-off 函数とする. このとき,

$$(5.7) \quad [\text{grad}, \zeta] g = g \text{ grad } \zeta$$

である. 従って $g = \partial_t^j p$ とおくと, (5.7) において p は x -変数に関して微分されていない. このことから, x -変数に関しても局所化した場合, 注意 4.2 に対応する結果, 即ち, x -変数に関して境界まで込めて解析的, t -変数に関して Gevrey class of order 2, すらも期待できない様に思われる.

方程式(1.1'-2)の解 $(v, \text{grad } p) \in C^\infty(\bar{Q})$ の解析性は, §4
における条件 (I_m) を帰納的に証明することによつて示される.
但しここで, (4.10) に対応して,

$$N_\sigma(\alpha) = (\alpha - \mu)!^{-1} (\|D_\sigma^\alpha v\|_2 + \|\nabla_x D_\sigma^\alpha p\|_0).$$

補助的な条件 $(\bar{I}_m)$ も, $\bar{N}_\sigma(\beta)$ と共に, §4 における形で用い
られる. 但し, (4.11) に対応して次の様におく:

i) v' は $\nabla_x^s v$, $s=0, 1$, を表わす;

ii) $\bar{F}(v', x, t)$ は F_v, F_x, F_T 又は F_t の任意の
成分を表わす;

iii) $\bar{F}_{(i)}(x, t)$ は $\bar{F}$ の, 階数 i の任意な導函数の
 $(v(x, t), x, t)$ における値を表わす.

さらに, 補題 4.4-5 はそのままの形で用いられる. 但し,
(4.12) は次の様に変える必要がある:

$$\bar{M}_0 M_3^2 / M_1 + 1 / M_2 + M_2 / M_3.$$

引用文献

- [1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I and II, Comm. Pure Appl. Math., 12(1959), 623-727 and 17(1964), 35-92.
- [2] S. Itô, The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, 9(1961), 103-140.
- [3] C. Kahane, On the spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 33(1969), 386-405.
- [4] D. Kinderlehrer and L. Nirenberg, Analyticity at the boundary of solutions of nonlinear second-order parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 31(1978), 283-338.
- [5] G. Komatsu, Analyticity up to the boundary of solutions of nonlinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 32(1979), 669-720.
- [6] G. Komatsu, Global analyticity up to the boundary of solutions of the Navier-Stokes equation, Comm. Pure Appl. Math., 33(1980), in press.
- [7] K. Masuda, On the analyticity and the unique continuation

theorem for solutions of the Navier-Stokes equation,
Proc. Japan Acad., 43(1967), 827-832.

- [8] C.B. Morrey, Jr. and L. Nirenberg, On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 10(1957), 271-290.
- [9] E. Nelson, Analytic vectors, Ann. of Math., 70(1959), 572-615.
- [10] V.A. Solonnikov, Estimates of the solutions of a non-stationary linearized system of Navier-Stokes equations, Trudii Mat. Inst. Steklov, 70(1964), 213-317; Engl. transl. in A.M.S. Transl. Series 2, 75(1968), 1-116.
- [11] V.A. Solonnikov, On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general type, Trudii Mat. Inst. Steklov, 83(1965); Engl. transl. A.M.S. in Boundary value problems of mathematical physics, III, ed. by O.A. Ladyzhenskaja, 1967.
- [12] V.A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 38(1973), 153-231; Engl. transl. in J. Soviet Math., 8(1977) 467-529.