

圏論の集合論的基礎づけに関するノート

とくに " $Z_0$  in ZF" について

九大 工学部 倉田令二朗

0. はじめに. Foundation の種々の試み

0.1 ZF, BG の不十分.

Zermelo-Fraenkel set theory  $\mathcal{Z}$  は category of all sets (all groups) が考えられない. それは Bernays-Gödel set theory  $\mathcal{B}$  は考えられるが 任意の large category  $A, B$  に対する Functor category  $A^B$  が考えられない. これが Category theory 誕生のきっかけとなった基礎づけの問題であり, これに対し種々の approach がある.

0.2. Grothendieck universe は 理論的には満足すべきものだが, 集合論として異常に限るという欠点がある.

ただし, 「問題  $\mathcal{Z}$  に universe を変更するより all の意味が不確定となる」という MacLane [MI] の批判は当たらない.

syntactical system における all, exist の意味はつねに不確定であるという model theory の結論の一つであるからである.

0.3 弱い理論 0.2 の方向とは反対に、Working mathematics にとっては——category 論の基礎づけにとっても——ZF より弱い理論で十分であるとの指摘が Lawvere, MacLane [MI] と他によってなされてきた。

実際 Working mathematics は又ていの場合 自然数論上の comprehension axiom をもつ type-theory で十分である。

本論で扱う  $Z_0$  はこれに対応する集合論である。

Lawvere set theory は Category 一元論によるそれと同値な理論である。

他方、ZF に基礎をかまっても universe は一つに足らざる主張があり (Feferman, MacLane [MII]). Lawvere の

Category of Categories はこの Category 一元論的表現である。

しかし、いつまでもは、さまたける  $\Omega$  に基づく Category of

Categories of Categories ... を考えざるを得ず、狭すぎると思われる。したがって以下では 任意の大きさの universe のために

" $Z_0$  in ZF"

を考へる。しかし既存する全数学の基礎として、こゝの category 論の基礎づけにとつてどれが一番ふさわしいか 確言しがたい。以下は " $Z_0$  in ZF" を中心とするこの方面のメモランダムにすぎない。

以下次の略記を用いる

ZF Zermelo-Fraenkel set theory

BG Bernays-Gödel set theory

GU Grothendieck universe (SGA4)

LS Lawvere: Category of sets

(Proc. Nat. Acad. Sci. 52 1964)

L, C, C. Lawvere: Category of Categories

(Proc. of a Conference on Categorical Algebra (La Jolla) Springer 1966)

GLC :  $\forall x \exists y \rightarrow GLC \text{ is } \dots$  equivalent to system

GLJ intuitionistic type theory with comprehension axiom.

MI MacLane Springer Lecture Note 92 1969

MII MacLane Springer Lecture Note 106 1969

## 1. $Z_0$ axioms

null set, extensionality, pair, sum, power, regularity,  
restricted separation, choice, infinity

restricted separation restricted formula — quantifier bounded  
 $\exists x (x \in y \wedge \dots), \forall x (x \in y \rightarrow \dots)$  — is  $\exists \forall \exists$  separation axiom

## 2. $Z_0$ is finitely axiomatizable

restricted ~~separation~~ separation のかわりに: 任意の set  $X, Y$  に対して,  $X$  の集合  
の  $\exists \forall \exists$  2...; axiom  $\exists \vdash \exists$   $\exists$  あり.

$X - Y, X \times Y, \in \upharpoonright X, D(X), \{ \langle x, y \rangle \in X \mid \langle y, x \rangle \in X \}, \{ \langle \langle x, y \rangle, z \rangle \mid \langle \langle z, x \rangle, y \rangle \in X \}$

## 3. $Z_0$ model, universe

$Z_0$  is finitely axiomatizable であるから  $Z_0$  の standard, transitive model の存在は ZF の中で証明できる。さらに model は inclusive ( $U$ -inclusive とは  $x \in U, y \subset x \Rightarrow y \in U$  である) である。また次の定理 次のことを ZF で証明できる。

$x_0$  を任意の set とするとき、 $x_0 \in U_0$  であるような条件を満たすものが存在する。

(U,1)  $U_0$  は transitive, inclusive

(U,2)  $x, y \in U_0 \Rightarrow \{x, y\} \in U_0$

(U,3)  $x \in U_0 \Rightarrow P(x) \in U_0$

(U,4)  $x \in U_0 \Rightarrow \bigcup x \in U_0$

(U,1) ~ (U,4) を満たす集合を restricted universe (RU) といい。

注1)  $x_0 = \omega$  とおけば  $Z_0$  の transitive, inclusive model となる。

null set の存在, inclusive であることは (U,3) からわかる。regularity, axiom of choice は ZF のことから従う。

注2) inclusive であることにより  $U_0$  は実は  $Z$  の model である。

注3) たとえば青藤正彦「超積と超導解析」2章 参照

#### 4. Grothendieck Universe との関係

$GU$  は (U,1) ~ (U,4) の他に次の条件を満たすものがある。

(U,5) map  $f: x \rightarrow U$  に対し  $\text{Im } f \in U$

あるいは (U,4), (U,5) のかわりに

(U,4')  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  は family of sets of  $U$ ,  $I \in U$  であるとき

$$\text{union } \bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha \in U$$

$$\text{ある } x \text{ に } (U, 4') \iff (U, 4) \& (U, 5)$$

$$(U, 4') \Rightarrow (U, 4) \text{ は } (\alpha)_{\alpha \in x}, (U, 4') \Rightarrow (U, 5) \text{ は } (\{f(\alpha)\})_{\alpha \in x} \text{ を考へる.}$$

$$(U, 4) \& (U, 5) \Rightarrow (U, 4') \text{ は } (x_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ から } I \xrightarrow{f} U \text{ を与えることができる.}$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha = \bigcup \text{Im } f$$

3. 定理に注意. ある  $x$  が (AU) axiom of universe である.

(AU) 任意の  $x$  に対して  $x \in U$  となる  $U$  が存在

ある. これは次の公理と equivalent である.

(ASI) axiom of strongly inaccessible cardinal

任意の cardinal  $\alpha$  に対して  $\alpha < p$  となる strongly inaccessible cardinal  $p$  が存在する. したがって  $U$  の存在は ZF の transitive inclusive model の存在と同値である.

## 5. " $Z_0$ in ZF" における category 論の可能性

$U$  がある  $(A, U)$  の意義は, たとえば functor category が対象とした universe を与える場合にはいつでも上位の universe に移行するこゝによって困難を回避できる点にある.

$S(A)$  はこの意味に於いて自制的であるが, 基本的には

"category はつねに small (ある  $U$  に属する  $U$ -small) にできる"

ということによって支えられている.

この原則は RU がある定理, 不変性 " $Z_0$  in ZF" によって保持されるべきである.

またこの理論において (US) または Replacement が用いられる  
ことは「ついで」  $f: X \rightarrow U$  とする  $U$  を element に  $\in$  RU,  $U'$  を  
考へればよいのである。

たとへば RU では  $U$ -set の category  $\text{Set}_U$  は complete である。

また  $C$  が  $U$ -small,  $D$  が  $U$ -locally small category の場合には  
 $D^C$  は  $U$ - $\int_{\text{locally}} \text{small-Category}$  であるという有名な命題も成立する  
。しかし前者の場合には  $\text{Set}_U$  を  $U' \ni U$  に送る  $U'$ -small と考  
へることにより、後者は  $C \neq D$  かつ  $U'$ -small と見ることによ  
って困難を排除することもできる。

## 6. $Z_0$ と Topos との関係 (1)

### 6.1. $\text{GLJ} \iff \text{Topos}$

$$\text{GLC} \iff \text{WPT (well-pointed topos)}$$

$$= = = \text{WPT} = \text{Topos} + \text{ND (non degenerate)} + \text{G} (1 \text{ is generator})$$

### 6.2. $Z_0$ と LS の関係

$$\text{LS} = \text{WPT} + (\text{A.C}) + (\text{AI}) (\text{infinity})$$

$Z_0$  は LS より強い。  $Z_0$  の model は Category  $\mathcal{C}$  には LS と同じ。

しかし LS では、object  $A$  はない。

$$x \text{ は } A \text{ の element である} \iff 1 \xrightarrow{x} A$$

$$B \text{ は } A \text{ の subset である} \iff B \twoheadrightarrow A \text{ (ある } \omega \text{ の charac map:}$$

$$A \rightarrow \Omega)$$

の対応を考へざるを得ないが、Category 論の map の相等の定義

から  $\alpha$  の対象  $a \in \mathcal{A}$  と  $a'$  は  $\alpha$  に

(i)  $\text{element} \neq \text{subset}$

(ii)  $A \neq A'$  かつ  $A\text{-subset } A \rightarrow \Omega \neq A'\text{-subset } A' \rightarrow \Omega$

( $\alpha$  に  $Z_0$  かつ  $\text{element}$  は  $\alpha$  に  $\text{set}$  である)  $Z_0$  の  $\text{set } A, A'$  は  $\text{common}$

$\text{subset}$  である。また  $LS$  は  $\text{local set theory}$  ( $\frac{1}{2}$  object  $\neq \text{universe}$  である) である。これは  $LS$  である。

$LS$  は  $\alpha$  に  $Z_0$  の  $\text{model}$  を作る手続は

G. Osiris Categorical Set Theory. J. Pure Appl. Alg 4. 1974

によつて与えられる。これは  $LS$  を  $\text{global}$  であることは  $\alpha$  である。次にこれを示す。

## 7. $Z_0 \in \text{Topos}$ の関係 (2). $LS$ は $\alpha$ に $Z_0$ の $\text{model}$ (Osiris)

### 7.1. Transitive-set-object in Topos

$\text{map}: A \xrightarrow{r} PA (= \Omega^A)$  かつ  $\text{tr-set object}$  である

(i)  $r$  は  $\text{monic}$  である。

(ii)  $\text{recursive}$  である。また  $\alpha$  による任意の  $\text{map } PB \xrightarrow{f} B$  に対して

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & B \\ r \downarrow & \uparrow f & \text{が可換である } f \text{ が唯一に存在する} \\ PA & \xrightarrow{Pf} & PB \end{array}$$

これは  $Pf$  は  $\exists f$  である。これは  $\alpha$  による  $X \mapsto PX$  は  $\text{covariant}$

$\text{functor}$  (image である) である。これは  $\alpha$  である。

inclusion  $\Rightarrow$  tr-set object  $A \xrightarrow{r} PA \simeq B \xrightarrow{s} PB$ , inclusion  $\times 12$

$$\begin{array}{ccc} r \downarrow & & \downarrow s \\ PA & \longrightarrow & PB \end{array}$$

① inclusion は つねに mono である。

② inclusion 的存在是唯一的  $\rightarrow$  子集.

$$= a \cdot z \cdot \bar{z} \quad \bar{z} = \overline{im(sr)} \quad \text{と書ける.} \quad r \in S \text{ と } \bar{z} \in \bar{S}.$$

③ 任意  $a, 2 > a$  的 set-object  $K, S$  是  $1, C$  是 (度)  $12$  上  $P_2$

下階の性質  $\exists \vdash r \cup s, r \cap s$  が存在する

## 7.2 Set-object in Topos

Topos is 3-172 Set-object x 12 pair  $(r, N) = (A \xrightarrow{r} PA, A \xrightarrow{N} \Omega)$

$\alpha = \alpha'' \alpha' \beta, \alpha = 1$  is transitive set object,  $N$  is  $A$  as subobject.

### 7.3. model of $Z_0$ in SL

117  $SL^a$  set object  $(r, N) (r, M) = \text{sgl}$ .

$$(r, N) \in (r, M) \iff N \text{ factor through } r \quad (\exists z \text{ s.t. } 1 \xrightarrow{N_e} p_A = 1 \Rightarrow A \xrightarrow{r} p_A)$$
$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R} \forall x \in M \text{ if } |x - a| < \delta \text{ then } |f(x) - L| < \epsilon$$
$$= = 1 \xrightarrow{Ne} PA \text{ 且 } A \xrightarrow{N} \Omega \text{ 且 } \Omega \xrightarrow{A} 1 \rightarrow \Omega^A (= PA)$$
$$x \in M_A \iff 1^x \rightarrow A \xrightarrow{N} \Omega = 1^t \rightarrow \Omega$$

(2)  $SL$  の set-object  $(r, N), (s, M)$  に対して 相等  $\sim$  を次のように

定義する。

$$(r, N) \sim (s, M) \iff \text{in}(r, r \cup s)[N] = \text{in}(s, s \cup r)[M]$$

$\text{in}(r, r \cup s)$  は  $\eta, 1$  の inclusion  $r \rightarrow r \cup s$ .

$i[N]$  は  $N$  の,  $\text{map } i$  に  $K$  の image を与える。

(3)  $SL$  の set-object  $(r, N)$   $(s, M)$  に対する membership relation  $\in$

$$(r, N) \in (s, M) \iff \text{in}(r, r \cup s)[N] \in_{A \cup B} \text{in}(s, r \cup s)[M]$$

ただし,  $u$ -set-object  $r \cup s \in A \cup B \rightarrow P(A \cup B)$  と書き,  $\in_{A \cup B}$  は (1) の意味である。

7.4. 定理 7.3 (2), (3) によつて  $SL$  の set-object の全体は  $Z_0$  の model となる。

問題提起 以上の諸結果をふまえて, 2 つばかりの問題を提起したい。一つは  $\eta$  の結果を一般の Topos に示すこと。直観主義的集合論としての  $Z_0$  を考えること。今一つは Lawvere 的な力を持つ一元的論的 " $Z_0$  in ZF" の定式化に供すること。

## 8. $Z_0$ と Topos の関係 (3) $Z_0$ の Topos での解釈

$\eta$  の諸論の直観主義化を考える。これは  $Z_0$  を  $SL$  に示すのではなく一般の Topos または  $\text{Topo}, + (A, I)$  に示す解釈を意味する。

(1) Mitchell-Bénabou Language の Analogy なるものが示される。



Sum  $UX$  は  $A \xrightarrow{r} PA \xrightarrow{Pr} PPA \xrightarrow{U} PA$  ( $U$  は union map) の  
 power  $PX$  は  $PA \xrightarrow{Pr} PPA$  が対応する.

この解釈を complete Heyting algebra  $\Omega$  上の sheaf の Topos に  
 適用すると、 $\Omega$  上の  $V^{(\omega)}$  の  $\Omega$  係を調べることは、  
 課題として意義があると思われる。

### 9 Category - 元偏り化された "Z<sub>0</sub> in ZF"

Lawvere  $SL$ ,  $L, C, C$  の積順序で  $Z_0$  の universe の hierarchy  
 に対応する  $SL$  の hierarchy を次のように区別することに  
 ができる。これは object of universe を考えることにあたる。

Def Category  $\downarrow_{LS}$  は object of universe とは

(i) internal category である

$$U = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$$

$$::= (C_0, C_1 \text{ は object, } C_1 \xrightarrow[d_1]{d_0} C_0, C_0 \xrightarrow{i} C_1, C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{m} C_1)$$

つまり任意の object of  $X$  of  $SL$  に対応し

$$(X, U) = ((X, C_0), (X, C_1), (X, C_1) \xrightarrow[xd_1]{xd_0} (X, C_0), (X, C_0) \xrightarrow{x\bar{i}} (X, C_1), (X, C_1) \times_{(X, C_0)} (X, C_1) \xrightarrow{xm} (X, C_1))$$

$(X, C_0), (X, C_1)$  は object, map の集合

$xd_0, xd_1$  は domain, codomain,  $x\bar{i}$  identity

$x^m$  composition と考えて、 小つじの意味で "category とする"

(ii)  $X=1$  (terminal object) の  $\exists$  external category  $(1, U)$  は  $SL$  の公理を満たす.

$(1, U)$  は小つじの意味で "category of  $SL$  とする" 同様にして

その中の object of universe を定義するところ

である. したがって Symbolic を意味する存在の  $U$  の

universe 列

$$SL \ni U_1 \ni U_2 \ni \dots \ni U_n$$

と考えておくことができる.

これは " $Z_0$  in  $ZF$ " に model を与える. この universe の列の

存在の仮定は無矛盾である.