

曲面上の同相写像の周期軌道と擬アノソフ組ひも

金 英子 (Eiko Kin), 京都大学 (Kyoto University)

E-mail: kin@math.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

力学系では、ある特別な周期軌道の存在が、他の(無限個の)周期軌道の存在性を強制するという現象が頻繁に起こる。区間連続写像におけるシャルコフスキーの定理などがその典型的な例である。このノートでは、曲面上の同相写像について、ある周期軌道が強制するダイナミクスについて考察する。曲面 F 上の同相写像 f の周期軌道 P は、組ひも型によって特徴づけられる。組ひも型は、periodic, reducible, pseudo-Anosov (pA) という3つのタイプに分類できる。 P の組ひも型が pA の場合は、 f は P から強制される豊富な力学的な性質を持つことがよく知られている。名前から類推できるように、組ひも型と(幾何的な)組ひもの間には密接な関係がある。このノートでは、前半では pA 組ひも型に関する知られている結果を紹介し、後半では、ある pA 組ひもの族とその性質に関する筆者の結果を述べる。最後に、その応用として、pA タイプの3周期軌道が強制するダイナミクスについて触れる。

2 Nielsen-Thurston による曲面同相写像の分類

向き付け可能な genus g の閉曲面を F_g とする。 F_g 内の s 点集合を $S = S_g$ とし、marked point と呼ぶ。 $(S = \emptyset$ でもよい。) 以下では同相写像 $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ を考える。つまり、 F_g 上の同相写像であって、 $f(S) = S$ を満たすとする。Nielsen-Thurston による曲面同相写像 $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ の分類定理に現れる3つの標準写像を定める [CB]: 同相写像 $\Phi : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ は

- (1) periodic map: ある $n \geq 1$ が存在し、 $\Phi^n = id$ (恒等写像) を満たす。
- (2) reducible map: ある互いに交わらない単純閉曲線の和集合 $\Sigma \subset F_g \setminus S$ が存在し、 $\Phi(\Sigma) = \Sigma$ かつ、 $F_g \setminus (\Sigma \cup S)$ の任意の成分のオイラー数は負である。
- (3) pseudo-Anosov map (pA map): (F_g, S) 上の singular foliation $\mathcal{F}^s/u$ と、 $\mathcal{F}^s/u$ に付随する transverse measure μ^s/u が存在し、ある定数 $\lambda > 1$ に対して、

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{F}^s, \mu^s) &= (\mathcal{F}^s, (1/\lambda)\mu^s), \\ \Phi(\mathcal{F}^u, \mu^u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)\end{aligned}$$

を満たす。定数 $\lambda = \lambda(\Phi) > 1$ を dilatation という。 $\mathcal{F}^s/u$ を stable/unstable foliation という。

Theorem 2.1 (Nielsen, Thurston) $2 - 2g - s < 0$ とする. このとき, 任意の同相写像 $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ は, *periodic map* か, *reducible map* か, *pseudo-Anosov map* のいずれかとイソトピックである. ただし, イソトピーは S を固定して考える.

この定理に基づき, f がある pA map とイソトピックであるとき, f のイソトピー類(これを $[f]$ と表す)は pA であるということにする.

ここで pA map Φ の dilatation $\lambda(\Phi)$ の知られている性質について述べたい.

- (Nielsen, Thurston) Dilatation は pA イソトピー類の不変量となる. すなわち, 2 つの pA map $\Phi, \Phi' : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ に対して $\lambda(\Phi) \neq \lambda(\Phi')$ ならば $[\Phi] \neq [\Phi']$.
- (Arnoux-Yoccoz) $g \geq 1$ と s のみに依存する整数 $N = N(g, s) > 1$ が存在し, 任意の pA map $\Phi : (F_g, S_s) \rightarrow (F_g, S_s)$ に対して, dilatation $\lambda(\Phi)$ は, ある非負正方行列 $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ (ただし, $n \leq N$) の特性多項式の最大の零点と一致する. 従って,

$$\Lambda_g^s = \{\lambda(\Phi) \mid \text{pA map } \Phi : (F_g, S_s) \rightarrow (F_g, S_s)\}$$

は集積点を持たない. 一般に, Φ の n 回合成写像 Φ^n に対して, $\lambda(\Phi^n) = (\lambda(\Phi))^n$ が成り立つので, Λ_g^s は上に有界でないが, 下には有界である. Λ_g^s の最小値を λ_g^s と表す.

- (Fathi-Shub) $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ の位相的エントロピーを $h_{\text{top}}(f)$ と表す. PA map の位相的エントロピーは $\log(\lambda(\Phi))$ と等しい. さらに同相写像 $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ が pA map $\Phi : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ とイソトピックならば,

$$h_{\text{top}}(f) \geq h_{\text{top}}(\Phi) = \log(\lambda(\Phi)).$$

3 計算機による Nielsen-Thurston タイプの判定

同相写像 $f : F_g \rightarrow F_g$ が与えられたとする. 我々は, f の位相的エントロピーや, f の軌道の多様性に興味がある. もしも f は, ある周期軌道の和集合 S を持つことがわかっているとすると, $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ の Nielsen-Thurston タイプが pA であるかどうかを調べることによって, f の力学的性質の情報がある程度得られることになる.

ここで $f : (F_g, S) \rightarrow (F_g, S)$ のイソトピー類 $[f]$ が pA であることの必要十分条件を紹介する (例えば [BH]):

$[f]$ は pA $\iff [f]$ が誘導する train track map $g_{[f]} : \tau_{[f]} \rightarrow \tau_{[f]}$ で, $g_{[f]}$ の transition matrix が Perron-Frobenius¹ となるものが存在する.

ここで train track とは, $F_g \setminus S$ にホモトピックとなるようなある種の smooth graph であり, train track map とは, その上の graph map である. Bestvina-Handel [BH] は, $[f]$ のイソトピー類の判定が有限回の操作で得られることを保証するアルゴリズムを与えた. 特に, $[f]$ が pA である場合は, アルゴリズムから train track map $g_{[f]} : \tau_{[f]} \rightarrow \tau_{[f]}$ が構成できる.

このアルゴリズムを用いて, Brinkman は $g \geq 2$ かつ S が一点集合 $\{p^\infty\}$ の場合に $f : (F_g, \{p^\infty\}) \rightarrow (F_g, \{p^\infty\})$ のイソトピー類の判定を与えるプログラムを与えている.

¹非負整数行列 M が Perron-Frobenius であるとは, ある $n \geq 1$ が存在して, M^n の各成分が全て正となることである.

<http://www.math.tu-berlin.de/~brinkman/>

から入手可能である。このプログラムの入力、イソトピー類を決めるデーンツイストの積であり、出力は、そのイソトピー類の Nielsen-Thurston タイプである。特に、pA である場合は、dilatation と train track map の情報を同時に与える。

また、Hall は $g = 0$ (つまり F_g は球面 S^2) かつ S が一点集合 $\{p^\infty\}$ の場合、 $f : (S^2, \{p^\infty\}) \rightarrow (S^2, \{p^\infty\})$ のイソトピー類の判定を与えるプログラムを与えている。

http://www.liv.ac.uk/maths/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html

から入手可能である。このプログラムの入力、イソトピー類を決める組ひもであり (次章を参照)、出力は、上と同じである。

4 組ひも

同相写像 $f : F_g \rightarrow F_g$ が恒等写像にイソトピックである場合、周期軌道の組ひも型は、組ひもで表すことができる。ここでは、簡単のため $g = 0$ の場合について考える。任意の同相写像 $f : F_0 = S^2 \rightarrow S^2$ は恒等写像にイソトピックであることに注意しよう。

4.1 組ひもの dilatation

D を 2 次元閉円板とし、 D の中心を通る水平な線分上に等間隔に並んだ s 点集合を A_s とする。 (D, s) の写像類群を $MCG(D, s)$ と表す。 s -組ひも群 B_s と $MCG(D, s)$ には自然な準同型写像

$$\Gamma : B_s \rightarrow MCG(D, s)$$

が存在する [Bir]。対応は、 B_s の生成元 σ_i に対して、 A_s の i 番目の点と $i+1$ 番目の点の位置を反時計方向に入れ換え、その他の点については動かさないような元を $\Gamma(\sigma_i)$ と定める (Figure 1)。

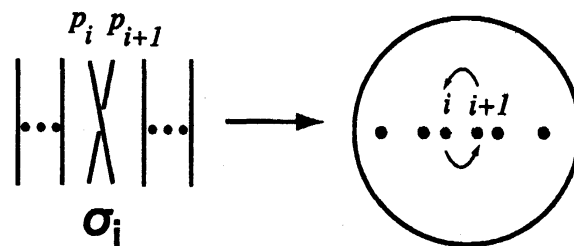


Figure 1:

$MCG(D, s)$ の元 α に対して、 α の代表元 $f : (D, A_s) \rightarrow (D, A_s)$ をとる。円板 D の境界を一点 p^∞ に潰すことによって、球面 S^2 が得られるが、この対応によって、 $f : (D, A_s) \rightarrow (D, A_s)$

から同相写像 $\hat{f}: (S^2, A_n \cup \{p^\infty\}) \rightarrow (S^2, A_n \cup \{p^\infty\})$ が得られる. 従って, 写像

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}: MCG(D, s) &\rightarrow MCG(S^2, s+1) \\ \alpha = [f] &\mapsto \hat{\alpha} = [\hat{f}]\end{aligned}$$

が定まる. 合成写像

$$\hat{\Gamma} \circ \Gamma: B_s \rightarrow MCG(S^2, s+1)$$

を用いて, 組ひも $\beta \in B_s$ の Nielsen-Thurston タイプ (periodic, reducible, pA) を $\hat{\Gamma} \circ \Gamma(\beta) \in MCG(S^2, s+1)$ のそれで定義する.

$\beta \in B_s$ が pA であるとき, β の dilatation $\lambda(\beta)$ を $\lambda(\beta) = \lambda(\hat{\Gamma} \circ \Gamma(\beta))$ と定義する. PA である s -組ひも全体の最小の dilatation を λ_D^s を表す.

補足であるが, 最小の dilatation は $s = 3, 4, 5$ まで決定されている:

Theorem 4.1 [Mat], [Han] λ_D^3 は多項式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の最大の零点 $2.618\dots$ と等しい. λ_D^3 を達成する組ひもは, $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ である.

Theorem 4.2 [KLS], [HS] λ_D^4 は多項式 $x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0$ の最大の零点 $2.296\dots$ と等しい. λ_D^4 を達成する組ひもは, $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$ である.

Theorem 4.3 [HS] λ_D^5 は多項式 $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ の最大の零点 $1.722\dots$ と等しい. λ_D^5 を達成する組ひもは, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2$ である.

Theorem 4.1 は, 3-組ひもの分類を用いて与えることができる. 4-, 5-組ひもの分類は知られていないが, Theorem 4.2, 4.3 では, train track map のオートマトンを用いた計算機を用いた証明が与えられている. また, 最小の dilatation の漸近的振る舞いについては次が示されている:

Theorem 4.4 [HK] $s = 2g + 1$ または $2g + 2$ とする. このとき,

$$\log(\lambda_D^s) \leq \frac{\log(2 + \sqrt{3})}{g}.$$

4.2 組ひもの力学的半順序

この節では, 向き保存同相写像 $f: (D, S_s) \rightarrow (D, S_s)$ に対して, 集合 S_s は f の周期 s の周期軌道と仮定する. ここで, 向き保存同相写像 $h: (D, S_s) \rightarrow (D, A_s)$ をとる.

$$h \circ f \circ h^{-1}: (D, A_s) \rightarrow (D, A_s)$$

のイソトピー類 $[h \circ f \circ h^{-1}] \in MCG(D, s)$ の共役類を, f の周期軌道 S_s の 組ひも型 といひ, $bt(S_s, f)$ と表す. $[h \circ f \circ h^{-1}] \in MCG(D, s)$ が pA であるとき, 組ひも型の dilatation $\lambda(bt(S_s, f))$ を $[h \circ f \circ h^{-1}]$ の dilatation $\lambda([h \circ f \circ h^{-1}])$ として定める.

全ての組ひも型の集合を

$$BT = \bigcup_f \bigcup_s bt(S, f)$$

と定める. 向き保存同相写像 $f: D \rightarrow D$ に対して,

$$bt(f) = \{bt(P, f) \mid P \text{ は } f \text{ の周期軌道}\}$$

とする. Boyland は BT 上の関係 $\geq$ を以下で定義した:

$b_1, b_2 \in BT$ について, $b_1 \geq b_2$ (b_1 は b_2 を強制するという.)
 $\iff$ 任意の $f: D \rightarrow D$ について, $b_1 \in bt(f)$ ならば $b_2 \in bt(f)$ が成り立つ.

組ひも型 $b \in BT$ の genealogy set

$$\mathcal{G}(b) = \{a \in BT \mid b \geq a\}$$

を定める. b が pA であるとき, b の代表元である pA map を Φ_b とすると, [AF], [Hal] により,

$$\mathcal{G}(b) = bt(\Phi_b)$$

が成り立つ. つまり, $b \geq a$ なる組ひも型 a は, pA map Φ_b の周期軌道として必ず実現できる. 一方, pA map の周期軌道は, train track map という 1 次元の graph map によって完全に記述できることを注意しておく.

関係 $\geq$ の定義と位相的エントロピーに関する Fathi-Shub の結果より, $b_1, b_2 \in BT$ は共に pA であり, $b_1 \geq b_2$ ならば $\lambda(b_1) \geq \lambda(b_2)$ が成り立つ. Los は, この状況では真に dilatation は減少することを示した:

Theorem 4.5 [Los] $b_1, b_2 \in BT$ は共に pA とする. $b_1 \geq b_2$ であり, $b_1 \neq b_2$ ならば, $\lambda(b_1) > \lambda(b_2)$ が成り立つ.

この定理の証明には, train track 理論と行列の Perron-Frobenius 理論が使われている.

関係 $\geq$ の定義から直ちに

- $b_1 \geq b_1$,
- $b_1 \geq b_2, b_2 \geq b_3$ ならば, $b_1 \geq b_3$

が成り立つ. 次の定理は, Boyland が分岐理論を用いて最初に証明を与えたものであるが, 後に Los は, Theorem 4.5 を用いて別証明を与えている:

Theorem 4.6 [Boy], [Los] $b_1, b_2 \in BT$ について, $b_1 \geq b_2, b_2 \geq b_1$ ならば $b_1 = b_2$. 従って, 関係 $\geq$ は BT 上の半順序を定める.

Remark 4.7 準同型写像 $\Gamma: B_s \rightarrow MCG(D, s)$ を思い出そう. 組ひも $\beta \in B_s$ で閉包 $\bar{\beta}$ が結び目となるようなものを考える. このとき $\Gamma(\beta) \in MCG(D, s)$ の共役類 $\langle \Gamma(\beta) \rangle$ が一つの組ひも型を与える. 記号の煩雑さをさけるため, $\langle \Gamma(\beta) \rangle$ を単に β と表すことにする.

5 主張

[HK] では, 最小の dilatation の上からの評価式を与える為に, ある 2 つの組ひもの族 $\beta_{m,n}$ と $\sigma_{m,n}$ について考察した. Section 5.1 では, これらの族を紹介し, 組ひも族の性質について触れる. Section 5.2 では, これらの族の間の力学的半順序に関する結果を述べる.

5.1 ある pseudo-Anosov 組ひもの族

2つのパラメーター $m, n \geq 1$ を持つ組ひも $\beta_{m,n}$ と $\sigma_{m,n}$ を Figure 2 のように定める. $\beta_{m,n}$ は 3-組ひもや 4-組ひもの最小の dilatation を達成する組ひもの一般化である. なお $\sigma_{1,3}$ は 5-組ひもの最小の dilatation を達成する組ひもと共役であることが簡単にわかる.

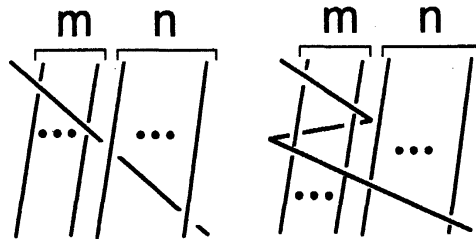


Figure 2: $\beta_{m,n}$ (left), $\sigma_{m,n}$ (right)

$n \geq m+2$ のとき, $\sigma_{m,n}$ は Figure 4 の組ひもと共役である. この組ひもは, Smale-horseshoe 写像 (Figure 3) のある周期軌道の組ひも型として実現できる組ひもである.

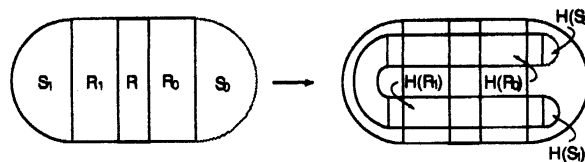


Figure 3: Smale-horseshoe map

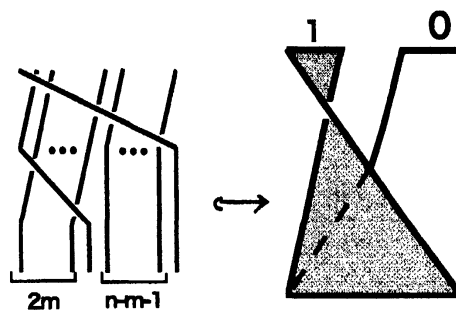


Figure 4: $\sigma_{m,n}$, ただし $n \geq m+2$ と共役な組ひも

Theorem 5.1 [HK]

- (1) 任意の $m, n \geq 1$ について, $\beta_{m,n}$ は pA である.
- (2) $\sigma_{m,n}$ は pA である $\iff |m - n| \geq 2$.

組ひもが pA であることを示す手段として、我々は Bestvina-Handel [BH] による方法を用いた。具体的には、組ひもが誘導するある graph map で、efficient という条件と graph map の transition matrix が Perron-Frobenius になるという条件を満たすものを構成した。それによって、組ひもが pA であることが従い、さらに組ひもの dilatation は、graph map の transition matrix M の特性多項式 $\Lambda_M(t)$ の最大の零点と一致することも保証される。Theorem 5.1 (2) については、 $m = n$ の場合、 $\sigma_{m,n}$ は periodic であり、 $|m - n| = 1$ の場合、 $\sigma_{m,n}$ は reducible になることが組ひもの変形により示せる。また、必要十分条件

$$\sigma_{m,n} \text{ が pA である} \iff \sigma_{n,m} \text{ が pA である}.$$

が成立し、さらに $\sigma_{m,n}$ が pA ならば $\lambda(\sigma_{m,n}) = \lambda(\sigma_{n,m})$ も従う。これらのことから、(2) については $n \geq m + 2$ に対する $\sigma_{m,n}$ と、(1) については任意の $m, n \geq 1$ に対する $\beta_{m,n}$ について、[BH] の条件を満たす graph map を構成すればよいことになる。

Figure 5 は、 $\beta_{m,n}$ が誘導する graph map である。Figure 6 は、 $\sigma_{m,n}$ ($n \geq m + 2$) が誘導する graph map である。これらの graph map を smoothing して得られるものが、train track map である。Figure 7, 8 はそれぞれは Figure 5, 6 の graph を smoothing して得られる。

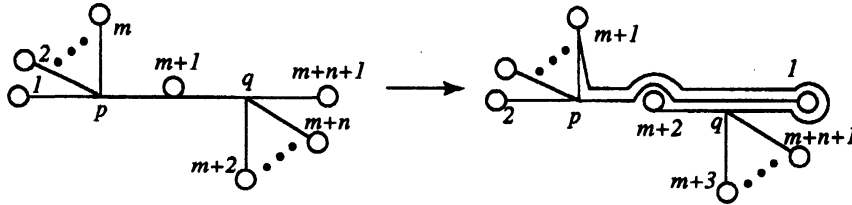


Figure 5:

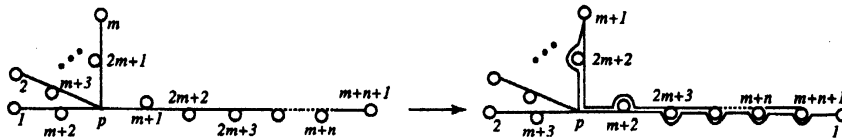


Figure 6:

5.2 2つの族の間の力学的半順序

我々は既に $\beta_{m,n}$ や $\sigma_{m,n}$ が誘導する train track map について知っている。これらの graph map の周期軌道の性質を考察することによって、2つの族 $\beta_{m,n}$ や $\sigma_{m,n}$ の間の力学的半順序が具体的に次のように書ける：

Theorem 5.2 [Kin]

(1) 任意の $m, n \geq 1$ について $\beta_{m,n} \geq \beta_{m,n+1}$, $\beta_{m,n} \geq \beta_{m+1,n}$.

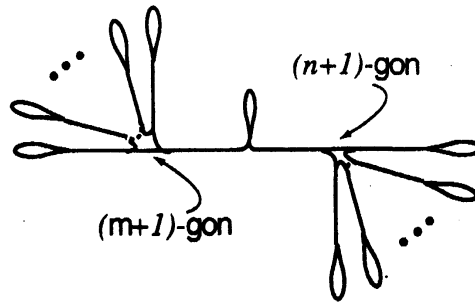


Figure 7:

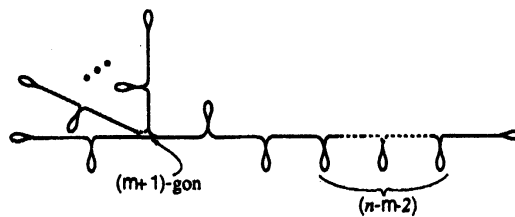


Figure 8:

- (2) $n \geq m+2$ なる任意の $m, n \geq 1$ について, $\sigma_{m,n+1} \geq \sigma_{m,n}$,
 (3) $n \geq m+2$ なる任意の $m, n \geq 1$ について, $\beta_{m,n} \geq \sigma_{m,n}$.

Theorem 4.5 から系として次が得られる:

Corollary 5.3

- (1) 任意の $m, n \geq 1$ について $\lambda(\beta_{m,n}) > \lambda(\beta_{m,n+1})$,
 (2) $n \geq m+2$ なる任意の $m, n \geq 1$ について, $\lambda(\sigma_{m,n+1}) > \lambda(\sigma_{m,n})$,
 (3) $n \geq m+2$ なる任意の $m, n \geq 1$ について, $\lambda(\beta_{m,n}) > \lambda(\sigma_{m,n})$.

次の定理は, $\beta_{m,n}$ や $\sigma_{m,n}$ の dilatation の漸近的振る舞いについて述べたものである.

Theorem 5.4 [HK] $R_m(t) = t^m(t-1) - 2$ とする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\beta_{m,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\sigma_{m,n}) = \lambda(R_m(t)),$$

ここで $\lambda(R_m(t))$ は多項式 $R_m(t)$ の最大の零点 (> 1) である.

Corollary 5.3 より, $n \rightarrow \infty$ のとき $\beta_{m,n}$ は上から $\lambda(R_m(t))$ に収束し, $\sigma_{m,n}$ は下から $\lambda(R_m(t))$ に収束する.

最後に, pA タイプの 3 周期軌道の組ひも型 β の genealogy set $\mathcal{G}(\beta)$ の性質について述べる. Handel の結果 [Han] より, 任意のこのような β は $\beta_{1,1} = \sigma_1 \sigma^{-2}$ を強制する. Theorem 5.2(1) より, 任意の $m, n \geq 1$ について, $\beta_{1,1} \geq \beta_{m,n}$ が成り立つ. 特に 同相写像 $f: D \rightarrow D$

が pA タイプの 3 周期軌道を持つと, 任意の $k \geq 3$ について, f は k 周期軌道を持つことが従う.

さらに, f には, Smale-horseshoe map $H : D \rightarrow D$ の任意の周期軌道と同じ組ひも型を持つ周期軌道を持つ:

Theorem 5.5 [Kin] 同相写像 $f : D \rightarrow D$ は pA タイプの 3 周期軌道を持つと仮定する. このとき,

$$\mathcal{G}(f) \supset \mathcal{G}(H).$$

References

- [AF] D. Asimov and J. Franks, *Unremovable closed orbits*, in Geometric Dynamics, Ed. J. Palis, Lect. Notes in Math. 1007 Springer-Verlag, (1983) 22-29.
- [Bau] M. Bauer, *An upper bound for the least dilatations*, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992), 361-370.
- [BH] M. Bestivina and M. Handel, *Train-Tracks for surface homeomorphisms*, Topology 34 (1) (1994) 109-140.
- [Bir] J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton (1974).
- [Boy] P. Boyland, *Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms*, Comment. Math. Helv. 67 (2) (1992) 203-213.
- [CB] A. Casson and S. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1988.
- [Hal] T. Hall, *Unremovable periodic orbits of homeomorphisms*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 110 (1991) 523-531.
- [HS] J-Y Ham and W. T. Song. *The minimum dilatation of pseudo-Anosov 5-braids*, Preprint. (2005).
- [Han] M. Handel, *The forcing partial order on the three times punctured disk*, Ergodic Theory Dynam. Systems 17 (3) (1997) 593-610.
- [HK] E. Hironaka and E. Kin, *A family of pseudo-Anosov braids with small dilatation*, Preprint.
- [Kin] E. Kin, *The partial order on a family of braids forced by pseudo-Anosov 3-braids* In preparation.
- [KLS] K.H. Ko, J.E. Los, and W.T. Song. *Entropies of Braids*. J. of Knot Theory and its Ramifications, 11 (2002), 647-666.

- [Los] J. Los, *On the forcing relation for surface homeomorphisms*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 85 (1997) 5-61.
- [Mat] T. Matsuoka, *Braids of periodic points and 2-dimensional analogue of Sharkovskii's ordering*, Dynamical systems and Nonlinear Oscillations, Ed. G. Ikegami, World Scientific Press (1986) 58-72.
- [Pen] R. Penner. *Bounds on least dilatations*. Proceedings of the A.M.S. 113 (1991) 443-450.